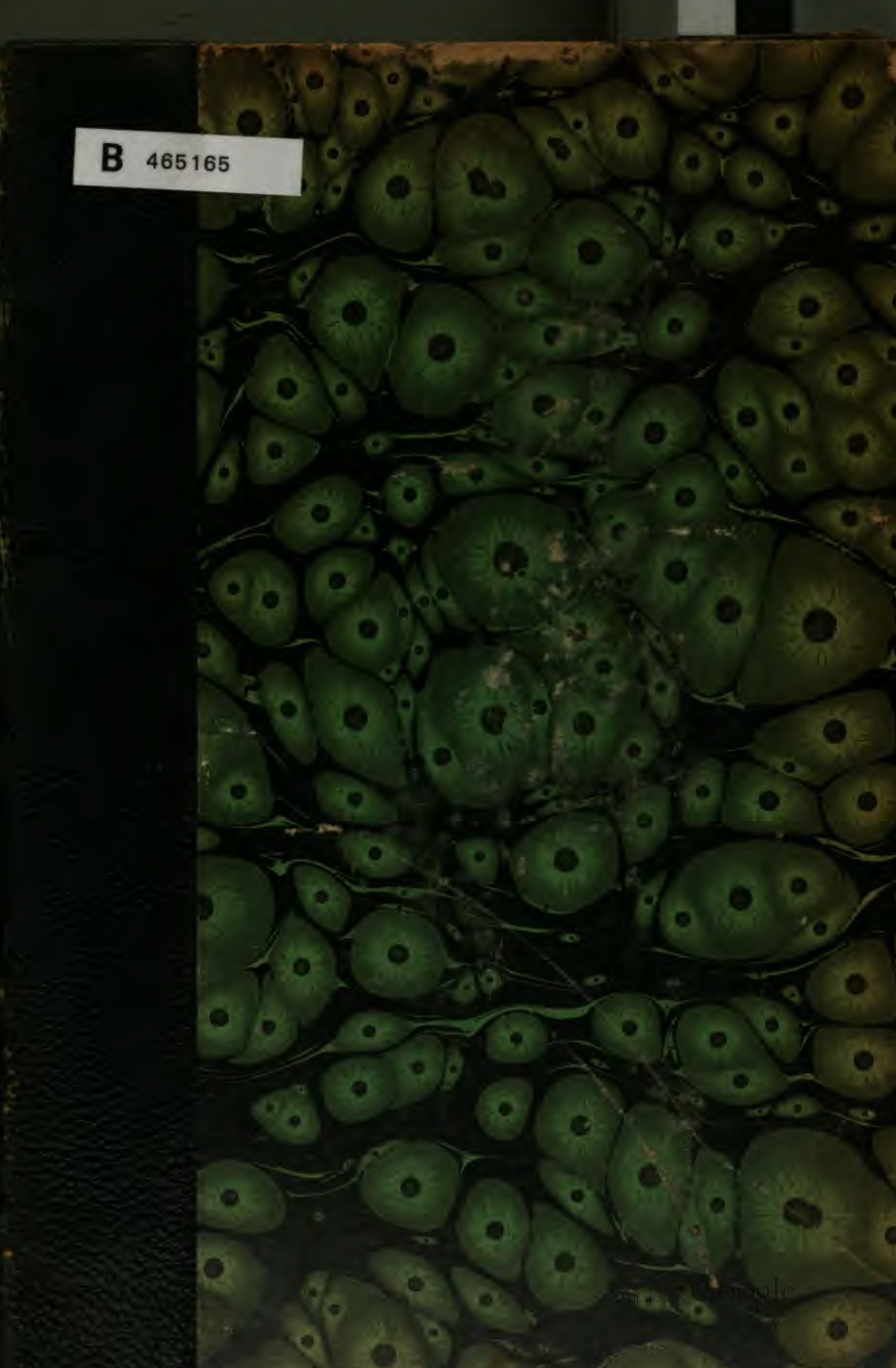
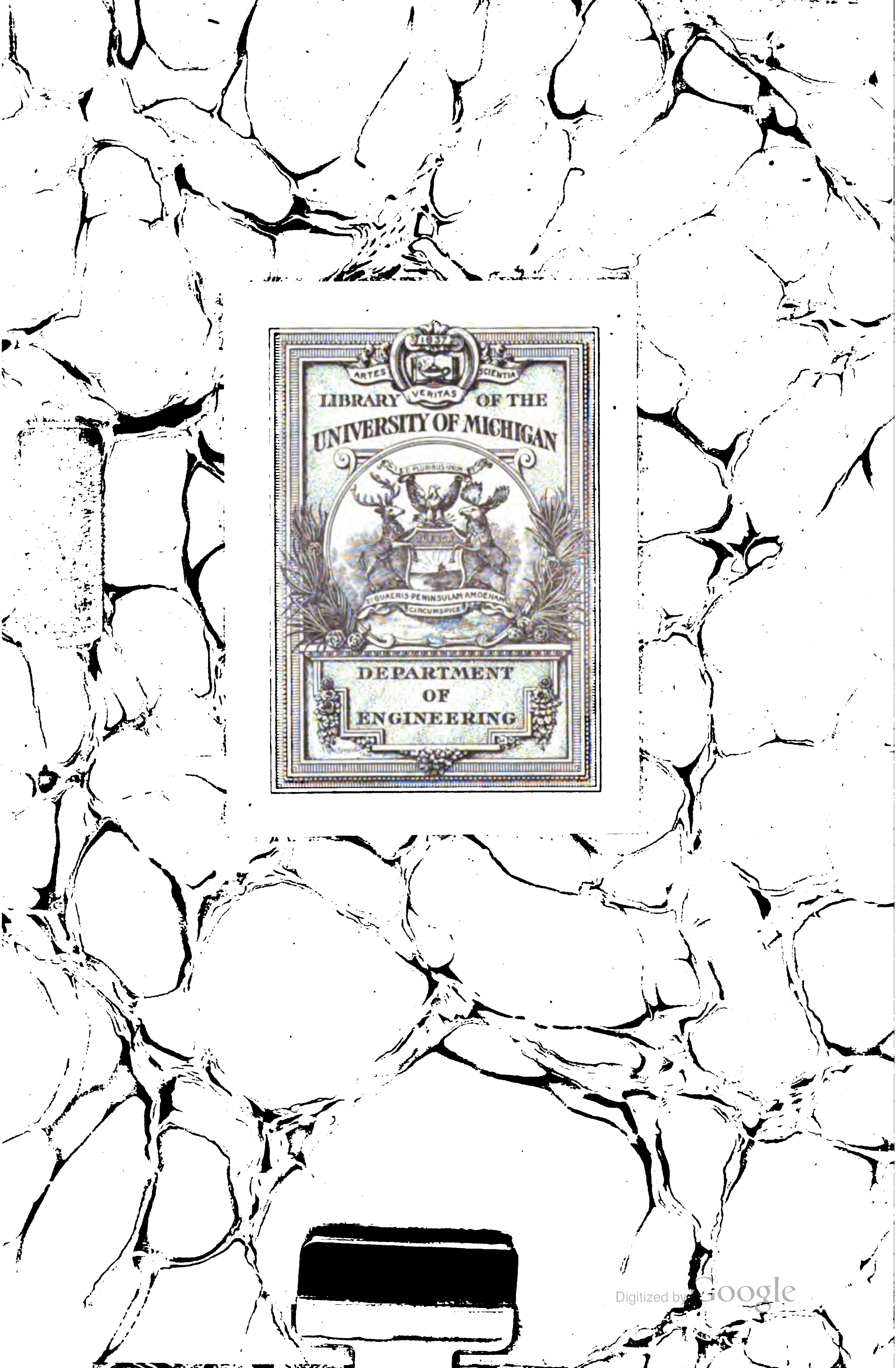

B 465165



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING
Digitized by Google



COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

Paris. — Imp. E. Bernard & Cie, 71, rue La Condamine

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PROFESSÉ

A L'ECOLE SPÉCIALE DU GÉNIE CIVIL DE GAND

PAR

J. BOULVIN

INGÉNIEUR HONORAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME DE FRANCE

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS MARITIMES DE L'ÉTAT BELGE

1er FASCICULE

THÉORIE GÉNÉRALE DES MÉCANISMES

avec 164 figures dans le texte



PARIS

E. BERNARD ET Cie, IMPRIMEURS-ÉDITEURS

LIBRAIRIE | IMPRIMERIE

53ter, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS | 71, RUE LA CONDAMINE, 71

1891

AVANT-PROPOS

Ce cours suppose connue la « *Cinématique appliquée* » c'est-à-dire la composition des *mécanismes* et leurs propriétés, en tant qu'on les envisage au point de vue de la géométrie des mouvements. Pour procéder d'une manière rationnelle, nous devrions diviser notre ouvrage en deux parties, dont la première comprendrait l'exposé synthétique des procédés très nombreux que l'on trouve réalisés dans les machines existantes, procédés qu'on a l'habitude de considérer comme résultant de l'invention, et qui échappent ainsi à toute règle de composition; après quoi nous pourrions aborder *l'étude spéciale*, ou physiologie des machines, dans laquelle on soumet les systèmes à une analyse physique et mécanique permettant de déterminer les circonstances les plus favorables à leur bon fonctionnement.

Cette deuxième branche, basée sur la mécanique rationnelle, a devancé la première, et est devenue depuis longtemps, surtout par les travaux de Poncelet, une science classique, connue sous le nom de *Mécanique appliquée aux machines*.

Dans l'état actuel de nos connaissances, la réalisation de ce plan, esquissé par Reuleaux, présenterait, pour le lecteur qui n'est pas encore initié, plusieurs inconvénients; lors d'une première étude, l'esprit suit plus facilement l'ordre déterminé par l'invention que l'ordre synthétique, c'est pourquoi nous avons cru devoir nous en tenir au système généralement adopté, et qui consiste à grouper les machines d'après l'usage auquel elles sont destinées, en les traitant au double point de vue de leur composition et de leur rendement.

La construction des organes de machines, qui n'est pas abordée dans cet ouvrage, doit fournir les derniers matériaux qui permettent de réa-

liser, dans les meilleures conditions, les conceptions mécaniques connues, et d'en élargir le champ.

A l'exemple de Rühlmann, on peut diviser toutes les machines employées en deux grandes classes : les machines servant à mesurer et à compter, et celles qui accomplissent des travaux mécaniques ; nous ne nous occuperons, parmi celles du premier groupe, que des appareils qui interviennent directement dans la mesure des éléments du travail (*Théorie générale des mécanismes*, Chapitre IV) ; les machines de la seconde catégorie, comprennent les récepteurs, les transmissions et les opérateurs, mais cette division, employée par Poncelet, est purement artificielle, et ne sert qu'à faciliter l'étude, car on peut toujours, par la pensée, isoler l'une quelconque des trois parties, et la considérer comme un système qui reçoit, transmet et effectue un travail ; dès lors, le récepteur, la transmission et l'opérateur, qu'ils soient pris ensemble ou isolément, sont soumis aux lois de l'équilibre dynamique, et il y a lieu tout d'abord d'étudier les circonstances du mouvement et l'effet utile d'un groupe d'organes quelconque.

Tel est l'objet de la *Théorie générale des mécanismes*, qui comprend, d'ailleurs, la théorie des transmissions envisagées au point de vue de la transformation de la force, et que nous examinons sans nous préoccuper de l'origine ou de la destination du travail ; nous abordons ensuite l'étude des récepteurs ou machines motrices ; ensuite, nous passons en revue les opérateurs qui font partie du domaine de la mécanique générale, tels sont les appareils de transport et de levage, ceux qui servent à déplacer les fluides, à comprimer et raréfier les gaz, etc. Les outils de tous genres appartiennent plutôt à la technologie des industries spéciales, il en est ainsi des machines employées dans l'élaboration des matières premières, les industries textiles, etc.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MÉCANISMES

PRÉLIMINAIRES

1. — Au point de vue spécial où nous nous plaçons, les machines ont pour objet la transformation, en travail directement utilisable, de l'énergie des sources naturelles [1], elles sont donc d'autant plus parfaites qu'elles rendent disponible une partie plus grande de l'énergie que fournit la source première ; car, dans le cas même où celle-ci est gratuite, les dépenses d'établissement et d'entretien sont d'autant plus élevées, que le rendement des appareils est plus faible.

2. — La théorie des machines sert à rechercher les conditions auxquelles doit satisfaire leur agencement, les proportions et les vitesses à donner à leurs organes, et, en général, toutes les circonstances de construction et de fonctionnement nécessaires pour qu'elles produisent l'effet utile le plus élevé.

Ce problème est relativement simple pour les appareils qui reçoivent ou dépensent l'énergie sous forme de travail [2], tels sont les récepteurs

1. Reuleaux. — *Cinematique*. Savy 1877. Note 8 — analyse la définition que différents auteurs ont donnée des machines.
2. M. Maurice Lévy distingue les sources de travail alimentées par de la force, c'est-à-dire donnant l'énergie sous forme *potentielle*, et celles alimentées par du mouvement, qui fournissent l'énergie à l'état *cinétique*. — Brisse et Rouché, *Nouvelles annales de mathématiques* 1887, p. 505.

hydrauliques ou pneumatiques, les transmissions, un grand nombre d'opérateurs. Il suffit, pour analyser ces engins, de recourir aux conditions de l'équilibre des forces, et aux théorèmes généraux de la dynamique.

Il n'en est pas de même des organismes dont le jeu est accompagné de transformations physiques, comme les machines à chaleur, les machines magnéto-électriques, etc.

L'énergie calorifique, qui intervient dans les machines à vapeur, à air chaud, à gaz, est la seule qui rentre dans le domaine habituel de la mécanique appliquée ; mais il est permis de prévoir que l'électricité sera appelée à jouer un rôle important, soit dans la production, soit dans le transport du travail.

3. — Au point de vue de leur aptitude à fournir du travail, les machines se distinguent par leur puissance ; l'unité de travail est le kilogrammètre, l'unité de puissance généralement adoptée est celle qui correspond à la production de 75 kilogrammètres par seconde ou *cheval-vapeur*, employée depuis Watt [1].

1. Le cheval-vapeur de Watt équivaut à 33.000 livres-pied par minute ou environ 76 kilogrammètres par séconde ; en Autriche, l'unité de puissance est de 76 kgm, 119 par seconde. Le congrès de mécanique appliquée, tenu à Paris en 1889, a proposé une unité nouvelle de puissance : le *Poncelet*, équivalant à 100 kilogrammètres par seconde. Le cheval-vapeur et le Poncelet constituent des unités absolues qui ne s'appliquent qu'à la mesure de la puissance, et dans lesquelles la notion du temps est implicitement comprise.

CHAPITRE I

Equation générale des Machines.

§ I[er].

CAS OU LES CORPS COMPOSANT LA MACHINE NE SUBISSENT AUCUN CHANGEMENT D'ÉTAT

4. — La force F agissant sur un point matériel M, (fig. 1), on a, en désignant par m la masse du point, par v sa vitesse, et par s l'arc de trajectoire parcouru à l'instant quelconque t :

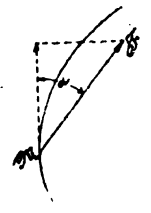


Fig. 1.

$$\int_{s_0}^{s_1} F \cos \alpha \, ds = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\int_{t_0}^{t_1} F v \cos \alpha \, dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

ou, en désignant par τ le produit $Fv \cos \alpha$, qui exprime le travail de la force F par unité de temps à l'instant t :

$$\int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 ; \quad (2)$$

S'il s'agit d'un corps quelconque, dans lequel on peut considérer une infinité de points matériels m, m', m'',.... et qui est soumis en ces points à des forces extérieures F, F', F'',.... nous écrirons, pour chaque point, une équation analogue à l'équation (2), en faisant entrer, dans le premier membre, outre les travaux des forces extérieures, les travaux pro-

venant des liaisons du point avec les autres parties du système. Ajoutant membre à membre ces équations, il vient :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt = \frac{1}{2} \Sigma \, mv_1^2 - \frac{1}{2} \Sigma mv_0^2 \tag{3}$$

Le terme $\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau \, dt$ représente la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui ont agi sur le système depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_1.

5. — L'équation (3) est applicable aux systèmes entrant dans la composition des machines, car ils sont formés de corps en général solides, assujettis par des liens inextensibles ou parfaitement élastiques ; ces corps prennent appui l'un sur l'autre, ainsi que sur des corps extérieurs fixes.

Or, on peut toujours introduire, parmi les travaux du premier membre, tous ceux qui s'exercent réellement sur les différents points matériels des systèmes, soit qu'ils proviennent d'efforts extérieurs appliqués directement en ces points, soit qu'ils proviennent des liaisons ou des réactions produites par les points fixes.

Dans l'application aux machines, l'équation acquiert un sens parfaitement défini, car la plupart des pièces peuvent être considérées comme des solides invariables de forme ; dans ce cas, les *travaux intérieurs* ne figurent pas dans l'équation, vu que leur somme algébrique est nulle ; la force vive d'une pièce peut souvent s'obtenir très facilement, lorsqu'elle possède un mouvement simple (translation ou rotation autour d'un axe connu).

Les travaux qui proviennent de l'existence de liaisons élastiques entre deux pièces peuvent s'évaluer, dans l'ensemble, par le changement de longueur du lien ; quant aux travaux dus aux réactions des appuis, il y a lieu, pour les déterminer, de tenir compte de certains phénomènes physiques qui seront étudiés au chapitre II ; il est à peine nécessaire de remarquer que le travail des réactions, dans un ensemble de deux pièces mobiles appuyées l'une sur l'autre, ne dépend que de leur mouvement relatif.

6. — Les appuis fixes ou mobiles font toujours naître des résistances au mouvement, c'est-à-dire des forces dont le travail est de signe con-



traire à celui des forces motrices; pour cette raison on les nomme résistances passives.

7. — En résumé, il y a lieu de distinguer dans le premier membre de l'équation (3) :

1° Les *travaux moteurs*, c'est-à-dire ceux que l'on applique au système dans le but de vaincre des travaux résistants, nous les désignerons, pour la période considérée, par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m \, dt$$

2° Les *travaux des résistances à vaincre*, et qui constituent le résultat industriel à produire; ainsi dans une machine élévatoire, ce travail correspondrait au produit du poids par la hauteur d'élévation. Nous désignons ces travaux par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u \, dt$$

3° Les *travaux résistants occasionnés par le jeu de la machine* (6) et provenant de diverses causes telles que le frottement des appuis, les résistances des milieux, etc., nous les désignerons par

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt$$

4° Les travaux occasionnés par suite du mouvement des pièces pesantes de la machine, lorsque ces pièces ne sont pas équilibrées; comme ces pièces repassent, après une ou plusieurs évolutions, par leurs positions premières, ou on conclut que, leurs centres de gravité décrivant des courbes fermées, ces travaux sont tantôt positifs, tantôt négatifs; pour une évolution complète, leur somme algébrique est nulle, et il est inutile de les faire intervenir dans l'équation. On peut, du reste, faire entrer les travaux dont il est ici question, dans le terme des travaux moteurs, en leur donnant un signe convenable.

5° Les travaux résistants qui proviennent des *chocs*, lorsque la machine comporte des pièces qui changent brusquement de vitesse, comme dans les anciens marteaux de forge.

On sait que, lorsque le choc se produit entre deux corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, il en résulte toujours, pour l'ensemble des deux masses, une perte de force vive ; Poncelet a admis, dans les problèmes de l'espèce, que les corps soumis à des chocs répétés perdent rapidement toute élasticité.

Sauf dans le cas où le choc est nécessaire pour l'élaboration de la matière première, comme dans le *martelage*, on l'évite de plus en plus, et même le forgeage des grosses pièces est parfois opéré aujourd'hui à l'aide de puissantes presses.

Le choc est accidentel lorsqu'il résulte d'usures, de desserrages ; il occasionne toujours une perte de travail [1].

8.—Lorsque l'on néglige le travail absorbé par les chocs, et qu'on envisage le travail dû au poids des pièces comme faisant partie des travaux moteurs, l'équation générale des forces vives peut s'écrire

$$\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m\,dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u\,dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r\,dt = \frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2$$

ou :

$$(4)\quad \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u\,dt = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m\,dt - \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r\,dt - \Sigma\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 + \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2$$

9. — *Discussion de l'équation générale.* — Si, pour la période considérée, la force vive finale est égale à ce qu'elle était à l'origine, ou, plus généralement, si on considère le fonctionnement de la machine pendant une durée assez longue pour que la variation de force vive soit négligeable vis-à-vis des termes du travail, on a :

$$\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_u\,dt = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \tau_r\,dt$$

d'où, si on désigne par u le rendement, c'est-à-dire le rapport du travail utile produit, au travail moteur, on a :

$$u = 1 - \frac{\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_r\,dt}{\Sigma\int_{t_0}^{t_1} \tau_m\,dt}$$

1. Callon, *Cours de machines*, T. I. N°s 22 et 23 considère aussi le travail des vibrations.

qui exprime, ainsi qu'on pouvait le prévoir, que le rendement de toute machine est inférieur à l'unité. Ce résultat explique aussi la stérilité de toute recherche tendant à produire le *mouvement perpétuel.*

Lorsque l'on envisage le travail de la machine pendant la période de mise en train, c'est-à-dire lorsqu'elle part du repos :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2 = o$$

Dans ce cas on a :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u\, dt = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m\, dt - \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r\, dt - \frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2$$

La moitié de la force vive gagnée se retranche donc du travail utilisé. Tandis qu'en prenant la machine pendant la période d'arrêt, à la fin de laquelle :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = o$$

on aurait :

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_u\, dt = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_m\, dt - \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r\, dt + \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2$$

c'est-à-dire qu'on retrouve, sous forme de travail effectué par la machine, la force vive dont les pièces étaient animées à l'origine de la période.

Il est à remarquer, cependant, que beaucoup d'opérations industrielles exigeant une vitesse constante, il n'est pas possible d'utiliser les machines pendant la période d'arrêt; la force vive qu'elles possèdent lorsqu'on cesse d'actionner les opérateurs est alors perdue.

Enfin, l'équation (4) donne aussi :

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = \frac{1}{2}\Sigma\, mv_0^2 + \Sigma \int_{t_0}^{t_1} (\tau_m - \tau_u - \tau_r)\, dt$$

Ce résultat montre que la force vive des pièces d'une machine varie, à chaque instant, d'après la valeur du terme renfermant les travaux des forces depuis l'origine à partir de laquelle on considère le mouvement.

L'arrêt se produit lorsque

$$\frac{1}{2}\Sigma\, mv_1^2 = o$$

c'est-à-dire quand le terme des travaux prend une valeur négative égale à la moitié de la force vive à l'origine. Le danger de l'arrêt diminue lorsque la valeur $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$ devient de plus en plus considérable, c'est-à-dire lorsqu'il y a dans la machine une grande réserve de force vive.

10. — On peut remarquer ici l'influence des masses sur la stabilité du mouvement des machines, car, à une certaine variation de force vive, répond un changement de vitesse d'autant moindre, que les masses en jeu sont plus considérables.

Si les masses étaient nulles, le mouvement ne pourrait avoir lieu pratiquement, car la vitesse prendrait une valeur infinie.

L'organe auquel on donne le nom de *volant*, a pour but d'augmenter les masses en mouvement, et, par conséquent de diminuer les changements de vitesse qui accompagnent les variations du terme des travaux.

11. — *Mouvement uniforme.* — Appliquons l'équation des forces vives pour une période comptée depuis l'instant t_0 jusqu'à un instant variable θ, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \Sigma \int_{t_0}^{\theta} (\tau_m - \tau_u - \tau_r)\, dt$$

Pour que la force vive ne varie pas, il faut :

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\Sigma m v^2}{d\theta} = o$$

ou :

$$\Sigma\,(\tau_m - \tau_u - \tau_r) = o \tag{5}$$

Les valeurs τ_m, τ_u, τ_r, étant prises à l'instant θ [1].

1. On peut représenter graphiquement les termes tels que

$$\Sigma \int_{t_0}^{\theta} \tau_m\, dt$$

En se reportant (4), à l'origine de la notion nouvelle du *travail par unité de temps*, travail que nous avons désigné par τ, on voit que l'équation (5) donne lieu à ce théorème :

Pour que la force vive de l'ensemble des pièces soit constante à tout instant, il faut que la somme algébrique des travaux de toutes les forces, tant motrices que résistantes, qui se développent sur le système, soit constamment nulle.

La propriété réciproque est évidemment vraie.

Sauf de rares exceptions, on ne peut dire qu'une machine se trouve à l'état de mouvement uniforme lorsque la somme des forces vives de ses pièces ne varie pas, car la constance de cette somme, formée d'éléments complexes, n'exige pas que chaque pièce composant la machine ait une vitesse constante.

Ainsi, dans le mécanisme de la machine à vapeur usuelle, lorsque l'arbre est à l'état de rotation uniforme, le mouvement de la tige de piston est varié, et inversement ; il y a très peu de systèmes qui soient susceptibles de prendre un mouvement uniforme ; cependant, dans beaucoup de cas, certains organes prédominent par leur masse ou par leur vitesse, et l'on peut, sans grande erreur, faire abstraction des parties accessoires.

En se reportant à l'équation (5), on voit que, dans tout système momentanément à l'état de mouvement uniforme, ou pour lequel la somme des forces vives est constante, les forces sont liées entre elles par l'équation du travail virtuel, c'est-à-dire que le système peut-être considéré comme en équilibre ; les résistances passives doivent être comptées au nombre des forces qui sollicitent les pièces.

12. — *Mouvement varié.* — En général l'équation (5) n'est pas vérifiée, et, par conséquent, le terme des travaux, au lieu d'être constamment nul,

car il suffit de porter en abscisses les valeurs de t, en ordonnées les valeurs $\Sigma\,\tau_m$ on obtient une courbe BC (fig. 2), dont l'aire ABCD est le terme cherché ; l'accroissement élémentaire de ce terme à l'instant θ, pour la durée $d\theta$, est donné par CDC'D' dont la valeur est

$$DC \times d\theta$$

c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à θ a pour valeur DC. Mais DC est la valeur que prend, à l'instant θ, le terme $\Sigma\tau_m$, ce qui justifie l'équation (5).

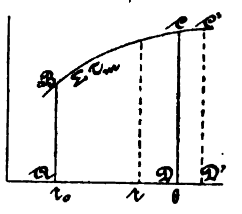


Fig. 2.

peut prendre toute valeur positive ou négative ; on peut, par la représentation graphique, établir clairement la loi de variation de la force vive en fonction du temps, car l'équation générale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \int_{t_0}^{t} [\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]\, dt$$

Portons en abscisses les valeurs du temps (fig. 3); et en ordonnées : d'une part, les valeurs de $\Sigma\tau_m$, d'autre part les valeurs de $\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r$;

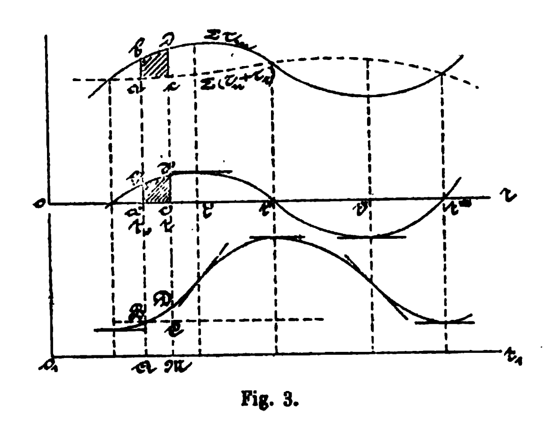


Fig. 3.

nous obtenons ainsi deux courbes, l'une, en trait plein, relative au travail moteur, l'autre pointillée, relative à l'ensemble des travaux résistants utiles et passifs. En retranchant les ordonnées, et en tenant compte du signe, on obtient une ligne qui représente la fonction

$$\Sigma \tau_m - \Sigma (\tau_u + \tau_r)$$

Pour obtenir $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, il suffit, en chaque point tel que M, de porter

$$\text{MC} = \text{AB} = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$$

et d'y ajouter la valeur de l'aire *abcd*, ou *a'b'c'd'*, qui représente la somme des travaux développés depuis l'origine t_0 jusqu'à l'instant final t. On trouve ainsi le point D, et la loi des forces vives est représentée par la

courbe BD; cette ligne, rapportée à l'axe BC, n'est autre chose que la *courbe intégrale* de $b'd'$, ce qui permet d'établir deux propriétés importantes :

1° *Lorsque*

$$\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r) = o$$

la somme des forces vives vasse par une valeur maxima ou minima.

2° *Lorsque*

$$\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)$$

passe par une valeur maxima ou minima, la courbe des forces vives présente un point d'inflexion.

Ces propriétés peuvent être démontrées directement, car

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2}{dt} = \Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)$$

et

$$\frac{d^2\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2}{dt^2} = \frac{d\,[\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]}{dt}$$

Lorsque $c'd' = o$, on a donc :

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2}{dt} = o$$

c'est-à-dire que la force vive passe par un maximum ou un minimun, (points t'' et t'''').

Lorsque $c'd'$ passe par un maximum ou un minimum,

$$\frac{d\,[\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]}{dt} = o$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2}{dt^2} = o$$

donc, la courbe des forces vives passe par un point d'inflexion (points t' et t''').

On peut remarquer, en outre, qu'au moment où la force vive passe par des valeurs maxima ou minima, les forces agissant sur le système se font équilibre, pourvu qu'on y comprenne les résistances passives.

13. — *Mouvement périodique.* — On donne ce nom au mode particulier de mouvement pour lequel tous les organes de la machine repassent périodiquement par les mêmes vitesses; s'il en est ainsi, la somme des forces vives repasse à des intervalles de temps égaux par les mêmes valeurs (1); ainsi, dans tout mouvement périodique, si on porte en abscisses (fig. 4), des intervalles réguliers T, correspondant à la durée

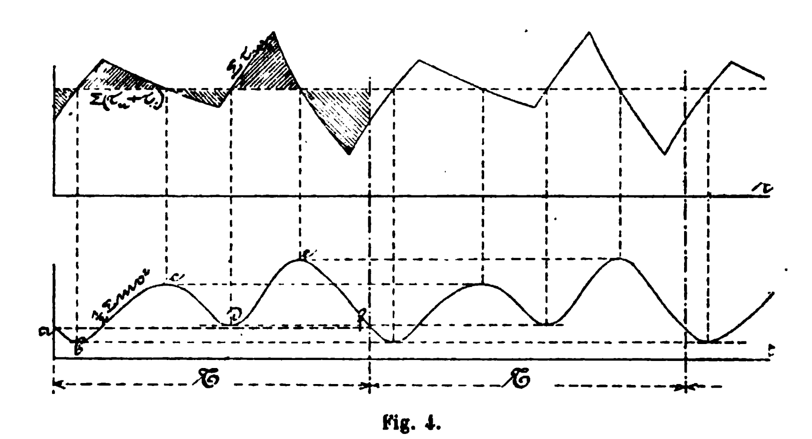


Fig. 4.

de la période, on partage la courbe des forces vives en autant de tronçons superposables : *a b c d e*.

En se reportant au mode de construction de cette courbe, on voit immédiatement que la courbe des travaux doit présenter la même propriété, c'est-à-dire que, dans tout mouvement périodique, la différence

$$\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)$$

repasse périodiquement par la même valeur; quant à l'allure de la courbe $\Sigma\tau_m$, ou de la courbe $\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r$, elle peut notablement différer d'une période à l'autre; enfin, il est évident que, pour la durée d'une période, l'intégrale des travaux développés est nulle.

1. La proposition inverse n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que la somme des forces vives repasse par la même valeur pour qu'un organe déterminé reprenne la même vitesse; il n'en est ainsi que pour certaines machines.

14. — ***Loi des forces vives en fonction de l'espace parcouru par l'un des points de la machine.*** — Pour pouvoir employer le mode de représentation graphique de la force vive en fonction de temps, il faut que la loi suivant laquelle se développent les travaux, tant moteurs que résistants, soit elle-même donnée en fonction du temps. Il arrive plus souvent que les forces motrices ou résistantes agissant aux divers points de la machine sont données en fonction des positions de ces divers points. On peut alors employer l'équation (1) qui, étendue à un système de masses prend la forme

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Sigma\int_{s_0}^{s}[F_m - (F_u + F_r)]\,ds$$

dans laquelle F_m, F_u, F_r, désignent les composantes tangentielles des forces motrices, des résistances utiles et des résistances passives agissant en un point du système.

Pour chaque point soumis à des forces, il y a lieu d'introduire une intégrale de même forme, entre des limites correspondantes à la position initiale et à la position finale, le signe Σ s'étend à toutes ces intégrales.

Quelle que soit la complication du système, soumis à la force motrice P', à la résistance utile Q, et aux réactions R et R' (fig. 5), on peut toujours remplacer chaque force, telle que Q, par d'autres forces dont l'une, transportée au point A, donne seule naissance à du travail; on n'aura

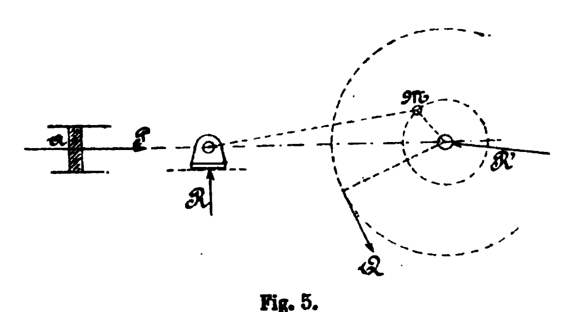


Fig. 5.

plus à considérer, dans le terme des travaux, que les forces agissant en un même point A, et l'on pourra construire un diagramme qui donne, pour toute valeur s, du chemin parcouru par ce point, le terme

$$F_m - (F_u + F_r)$$

d'où l'on passera aisément à l'expression

$$\int_{s_0}^{s} [F_m - (F_u + F_r)] \, ds$$

Nous verrons un exemple de l'application de cette méthode dans le calcul des volants.

15. — *Loi du mouvement dans un cas simple.* — Supposons que la machine soit constituée de telle manière [1] que le terme dû à l'ensemble des forces vives puisse se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2} M v^2$$

M désignant une masse convenablement calculée, et v la vitesse d'un point choisi dans le système.

L'emploi de la méthode exposée au numéro 12 permet de tracer la loi des forces vives en fonction de l'espace parcouru par le point choisi; les ordonnées telles que AB (fig. 6), représentent les valeurs $\frac{1}{2} M v^2$, ou, par

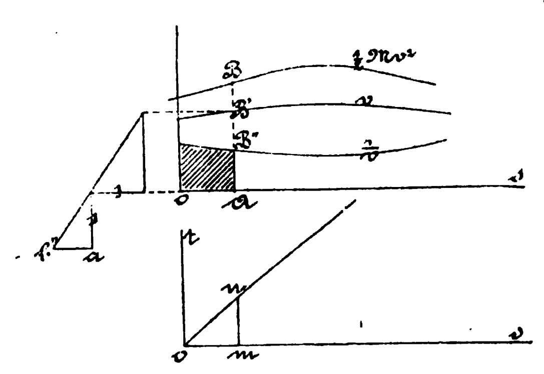


Fig. 6.

un changement d'échelle, les valeurs de v^2; on peut construire le diagramme des valeurs de v, il suffit de porter en AB', la racine de l'ordonnée de la première courbe, et d'effectuer cette construction pour chaque valeur de s, on obtiendra la loi des vitesses en fonction de l'espace parcouru.

1. Machine ne comportant que des pièces à mouvement de translation ou à mouvement de rotation.

Or, on a

$$dt = \frac{1}{v}\, ds$$

d'où

$$t = \int_o^s \frac{1}{v}\, ds$$

en supposant $t = o$ pour $s = o$.

La connaissance des valeurs v permet de trouver le diagramme de $\frac{1}{v}$ au moyen de la construction indiquée pour le point B', on porte AB" $= ab" = \frac{1}{v}$; de là, il est facile de passer à l'intégrale, mn, qui représente t, on en déduira s en fonction de t, c'est-à-dire la loi du mouvement. Réciproquement, si l'on connaît la loi suivant laquelle se développent les travaux en fonction du temps, on peut en déduire $\frac{1}{2} M v^2$, et par conséquent v, d'où l'on passera à la connaissance de

$$s = \int_{t_0}^t v dt$$

16. — *Application.* — Pour rendre plus claire la signification des diagrammes dont il est question aux numéros 12, 14 et 15, prenons le cas d'une machine dont les pièces sont liées invariablement l'une à l'autre (comme dans un train de véhicules, ou dans une série de pièces tournantes) ; supposons que le système soit sollicité par une résistance uniforme Q (fig. 7), (comprenant les résistances utiles et les résistances passives), et par une force motrice, donnée en fonction de l'espace, par la ligne brisée P.

Admettons que la machine soit en repos pour $s = o$, la loi des forces vives sera donnée par la ligne o_1ABC, dont le coefficient angulaire est égal en chaque point à la valeur de P — Q correspondante.

La courbe O_1A'B'C', formée d'arcs de paraboles, est obtenue en prenant les racines des ordonnées de la courbe des forces vives, et, représente, si l'on mesure ses ordonnées à une échelle convenable, la loi des vitesses du système en fonction de l'espace parcouru par un de ses points, c'est-à-dire les valeurs de v.

La courbe A"B"C" donne les valeurs de $\frac{1}{v}$; enfin, la courbe continue

O_2nN.... composée d'arcs de paraboles, est la loi du temps en fonction de l'espace.

La connaissance de cette dernière courbe permet de tracer (fig. 8), le diagramme des forces vives en fonction du temps, ainsi que celui des

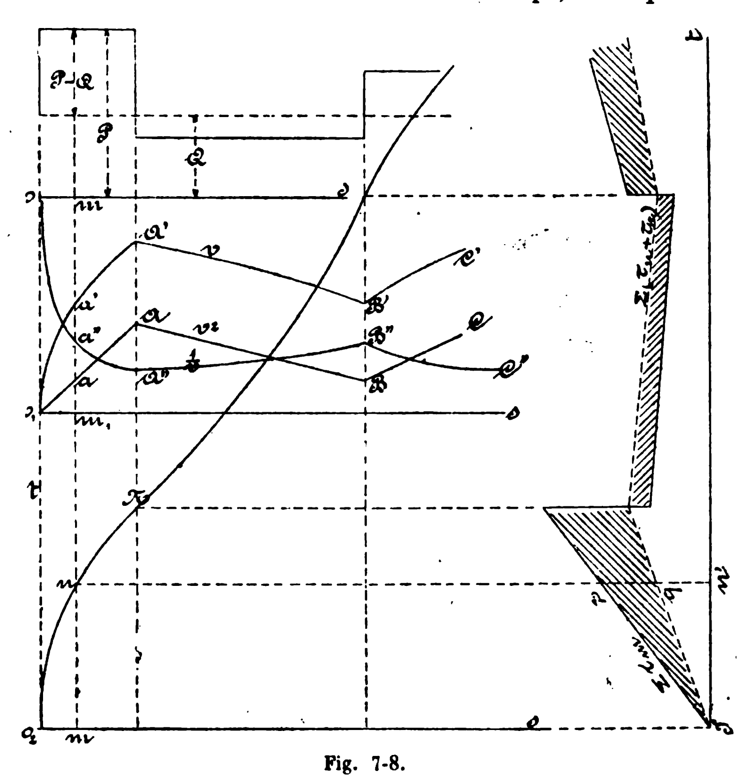


Fig. 7-8.

travaux moteurs et résistants $n'p$, $n'q$, à chaque instant, car ceux-ci sont représentés par le produit des forces P et Q par la vitesse v; on remarquera ici combien les diagrammes des travaux: $\Sigma\tau_m$, $\Sigma(\tau_u + \tau_r)$, qui, dans ce cas particulier, sont formés de lignes droites inclinées, peuvent différer de ceux des forces motrices et résistantes.

Ajoutons qu'on ne pourrait analyser le mouvement d'une manière aussi simple dans la plupart des cas de la pratique, par exemple, lorsque le système comprend des pièces à mouvement alternatif.

17. — *Exemple numérique.* — Un arbre O (fig. 9), animé d'une

vitesse de 75 tours par minute, commande par cadre une pompe à mouvement alternatif; on suppose qu'il reçoit un travail moteur, variable à chaque instant, capable de le maintenir à l'état de mouvement uniforme.

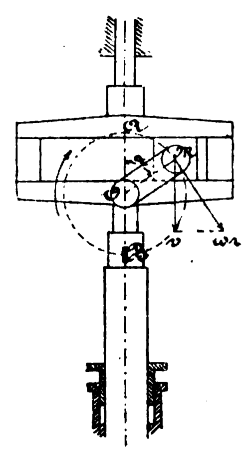


Fig. 9.

Le poids du cadre, de ses tiges, du plongeur, etc., est de 120 kilogrammes; l'effort résistant à vaincre à la levée aussi bien qu'à la descente est de 250 kilogrammes, on suppose que toutes les réactions sont normales aux surfaces frottantes c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement.

On demande de déterminer à chaque instant le travail moteur τ_m à développer sur l'arbre, et d'en déduire l'effort P, qui appliqué à l'extrémité d'un bras de levier égal à 1 mètre produirait ce travail.

Solution :

Soit p, le poids des pièces à mouvement alternatif,

Q, la résistance du piston pour la descente et la levée,

ω, la vitessse angulaire de l'arbre.

v, la vitesse linéaire du piston à l'instant t, correspondant à la position M du bouton.

Considérons comme origine le point A, où la vitesse v est nulle, et appliquons l'équation générale depuis A jusqu'en M; les pièces à mouvement de rotation ayant, par hypothèse, une vitesse constante, ne donnent lieu à aucun accroissement de force vive, et l'on a:

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}v^2 = \int_0^t \tau_m\, dt - \int_0^t Q\, vdt + \int_0^t pvdt$$

d'où, prenant la dérivée, et résolvant par rapport à τ_m:

$$\tau_m = \frac{p}{g}\, v\, \frac{dv}{dt} + Qv - pv$$

On aurait de même, pour la course de bas en haut, en prenant le point B comme origine:

$$\tau_m = \frac{p}{g}\, v\, \frac{dv}{dt} + Qv + pv$$

Or, $v = \omega r \sin \alpha$,

$$\frac{dv}{dt} = \omega r \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \omega^2 r \cos \alpha$$

$$v \frac{dv}{dt} = \omega^2 r^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin 2 \alpha$$

En tenant compte des valeurs numériques

$$r = 0{,}20$$
$$p = 120$$
$$Q = 250$$
$$\omega = \frac{2\pi \times 75}{60} = 7{,}8$$

On obtient, pour le mouvement de descente :

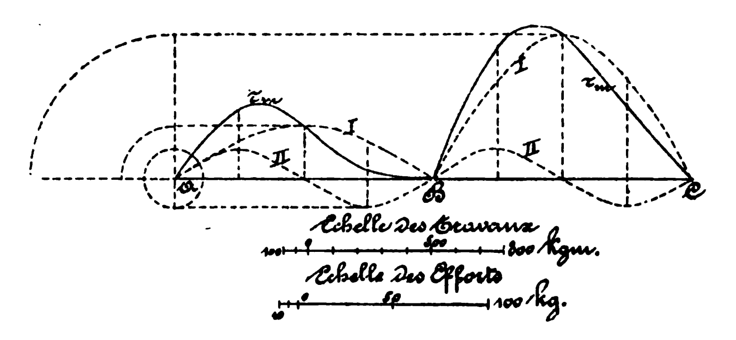
$$\tau_m = 116 \sin 2\alpha + 204 \sin \alpha$$

α variant de o à π depuis le point A.

Et pour le mouvement d'aspiration :

$$\tau_m = 116 \sin 2\alpha + 580 \sin \alpha$$

Les sinusoïdes 116 sin 2 α, 204 sin α, et 580 sin α s'obtiennent facilement (fig. 10), au moyen des circonférences ayant respectivement pour



rayons les nombres 116, 204, 580, en ayant soin de doubler les angles pour la première ; l'échelle des temps, portés en abscisses, est déterminée en remarquant que AC est la durée, connue, d'une révolution.

En ajoutant algébriquement les ordonnées des courbes I et II, on obtiendra les valeurs de τ_m pour une révolution entière.

Enfin, si P désigne la force motrice cherchée, on a

$$P\omega = \tau_m$$

ou

$$P = \frac{\tau_m}{\omega} = \frac{1}{7,8}\tau_m$$

Cette équation montre que les valeurs de P sont proportionnelles à celles de τ_m, ce qui était évident *a priori*, puisque la vitesse du point d'application de l'effort P est constante. Pour obtenir la grandeur de P, il suffit de mesurer les ordonnées de τ_m au moyen d'une échelle convenablement choisie.

§ II.

Equation applicable au cas ou des phénomènes thermiques s'accomplissent dans la machine.

18. — Les machines qui comprennent une source d'énergie calorifique renferment des fluides à température variable, et dont l'état peut même changer par la vaporisation ou la combustion. L'expérience établit que la chaleur peut se convertir en travail ou réciproquement, et que cette transformation s'effectue à raison d'une certaine équivalence.

Désignant par E le travail équivalent à l'unité de chaleur, nous admettons que la quantité de chaleur Q équivaut au travail QE, et qu'inversement, le travail T, communiqué à un corps, peut augmenter de $\frac{T}{E}$ calories la chaleur de ce corps.

La variation de chaleur n'est pas nécessairement accompagnée d'un changement de température, elle peut être employée à opérer un changement moléculaire (fusion d'un solide, vaporisation d'un liquide ou inversement).

Il faut du reste envisager tout corps solide, liquide ou gazeux, comme étant animé, indépendamment de sa force vive d'ensemble ou *extérieure*, d'une force vive *intérieure*, à laquelle correspond une certaine quantité U, de travail ou d'énergie intérieurs. Dès lors, si Q est la quantité de chaleur utilement transformée en travail communiquée au corps fonctionnant dans une machine, depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_1, si on

désigne par $\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$, $\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2$, le terme des forces vives dues aux mouvements apparents, et par U_0, U_1, l'énergie intérieure des corps composant la machine, on pourra écrire:

$$U_1 - U_0 + \frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = QE + \int_{t_0}^{t_1} [\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)]\, dt$$

Et, si le mouvement est périodique, c'est-à-dire si la force vive apparente repasse, ainsi que l'énergie intérieure, par les mêmes valeurs, on aura, en appliquant l'équation à la durée d'une période:

$$U_1 = U_0$$

$$\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$$

Si, en outre, il n'existe pas de forces motrices extérieures,

$$\Sigma \tau_m = o$$

et l'équation donne

$$\int_{t_0}^{t_1} \Sigma \tau_u\, dt = QE - \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \tau_r\, dt$$

Le travail utile recueilli au moyen d'une machine semblable, est égal au travail QE, communiqué sous forme de chaleur, diminué du travail employé à vaincre les résistances passives.

Toute machine thermique peut être étudiée au moyen de l'équation ordinaire du travail, dans laquelle on introduit, comme travail moteur, la quantité QE, correspondant à la chaleur réellement transformée en travail.

19. — *Rendement calorifique, rendement organique.* — La quantité de chaleur Q n'est pas celle qui est dépensée; car nous verrons (3e fascicule), que le fonctionnement de toute machine thermique comprend nécessairement une dépense de chaleur Q", communiquée à un fluide travailleur, lequel en rejette une partie Q' ne pouvant plus servir à la production du travail.

On a donc $Q = Q'' - Q'$.

Le rapport de la quantité de chaleur utilisée à la quantité dépensee se nomme ***rendement calorifique***, il a pour expression:

$$\rho = \frac{Q'' - Q'}{Q''}$$

L'étude de ce rendement fait l'objet de la théorie des machines thermiques; lorsqu'il est connu, on peut déterminer Q en fonction de la chaleur dépensée

$$Q = Q'' - Q' = \rho\, Q''$$

Le ***rendement organique*** doit être envisagé comme au numéro 9, sa valeur est:

$$u = 1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \Sigma\, \tau_r\, dt}{QE}$$

Pour les machines qui font l'objet du § I, et parmi lesquelles on peut citer les moteurs hydrauliques, les moulins à vent, etc., il n'y a lieu de considérer que cette dernière forme de rendement; les moteurs peuvent avoir un rendement thermique très faible, tout en ayant un rendement organique élevé; les comparaisons que l'on a faites parfois entre le rendement *thermique* des machines à vapeur et le rendement *organique* des moteurs hydrauliques, ne pouvaient manquer d'entraîner les inventeurs dans une voie fausse.

L'étude de ρ, ou rendement calorifique, fait l'objet des applications de la Thermodynamique; pour la recherche de u, il suffit, dans toutes les machines, de pouvoir apprécier les travaux des résistances passives, c'est cette détermination qui fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Etude des résistances passives.

Les résistances passives (7) comprennent principalement :

1° Le frottement des solides ;

2° Le frottement des solides immergés dans un liquide qui sera examiné au § II de ce chapitre ; cette résistance est de la même nature que celle qui se produit dans le cas où un liquide est en mouvement contre une paroi fixe ou à l'intérieur d'un tuyau ;

3° La résistance au roulement ;

4° La raideur, ou manque de flexibilité des cordes, courroies, etc., passant sur des poulies ou des tambours d'enroulement ;

5° Le travail absorbé par les chocs et les vibrations ;

6° Le frottement de l'air sur les pièces en mouvement.

Cette dernière résistance est rarement assez grande pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte, si ce n'est dans des cas spéciaux, tels par exemple que le fonctionnement des ventilateurs, la locomotion à grande vitesse ; on peut aussi avoir à examiner l'effet dû au choc, la question est analogue à celle du mouvement des projectiles [1].

§ I.

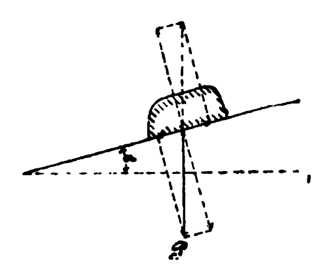
DU FROTTEMENT DES SOLIDES.

20. — L'expérience montre qu'un corps, soumis à une force oblique par rapport à la surface d'appui, peut néanmoins rester en équilibre, ce qui ne pourrait avoir lieu si la réaction de l'appui était normale à la surface ; la résistance au glissement est la composante tangentielle de la réaction.

Cette résistance est nulle lorsque la force sollicitante est normale à la

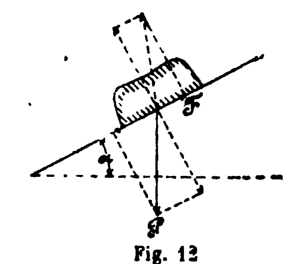
1. Voir le mémoire de O. T. Crosby.— Engineering 1890, 1er sem. p. 663.

surface de contact, elle augmente au fur et à mesure que la force s'écarte de la normale, et atteint bientôt une limite à partir de laquelle le glissement se produit. Lorsqu'il y a mouvement de deux pièces l'une sur l'autre, cette limite est toujours atteinte, et l'expérience permet de la déterminer; c'est cette valeur *limite* de la résistance au glissement, qui a plus particulièrement reçu le nom de *frottement*.


Fig. 11

Ainsi, un corps pesant, (fig. 11), appuyé sur un plan incliné, s'y tient en équilibre pour des valeurs de α modérées. La composante $P \sin \alpha$ du poids P, est équilibrée par la composante tangentielle de la réaction du plan.

Lorsque l'inclinaison α dépasse une certaine limite (fig. 12), la résistance au glissement conserve sa valeur constante, qui est le frottement F; la résultante des forces qui agissent sur le corps, en y comprenant la réaction du plan, est $P \sin \alpha - F$, et est dirigée parallèlement au plan, c'est cette force qui produit le mouvement accéléré du corps.


Fig. 12

21. — *Lois du frottement.* — C'est à Amontons[1] que l'on doit les premières recherches expérimentales sur ce sujet; elles établissent que F ne change pas avec l'étendue des surfaces en contact, mais conserve une valeur proportionnelle à la composante normale, N, de la réaction.

Coulomb reprit, en 1782, les expériences d'Amontons, qu'il compléta; le procédé qu'il employait consistait à observer la loi du mouvement du corps appuyé, pour différentes valeurs de la force sollicitante extérieure, et pour diverses charges.

Dans le cas du plan incliné (fig. 12), si v est la vitesse à l'instant t, on a évidemment :

$$F = P \sin \alpha - \frac{P}{g} \frac{dv}{dt}$$

La connaissance de la loi du mouvement permet de trouver F.

Coulomb a formulé les lois suivantes :

1. Les travaux de ce physicien datent de deux siècles.

1° Pour des corps donnés, le frottement est proportionnel à la pression normale;

2° Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact;

3° Il est indépendant de la vitesse. Il résulte de ces lois; que le frottement ne dépend pas de la pression par unité de surface, mais seulement de la force normale totale. L'étendue plus ou moins grande que l'on donne aux surfaces de contact ne peut donc diminuer le frottement d'une manière directe, mais elle peut avoir pour effet de favoriser le graissage, ou d'empêcher l'arrachement superficiel des corps.

Le petit nombre d'observations de temps et d'espace parcouru que l'on peut faire dans chaque expérience, rend le procédé de Coulomb très incertain. Morin l'a repris, en enregistrant par un diagramme automatique la loi de l'espace en fonction du temps[1]. Les résultats trouvés par Morin pour un grand nombre de surfaces, à l'état sec, ou graissées, confirment les lois de Coulomb, mais elles ont été trop généralisées. Les vitesses des expériences de Morin n'ont pas dépassé $3^m,50$ par seconde; la pression a varié de 0 kg. 05 à 3 kilos par centimètre carré, c'est-à-dire que les vitesses, de même que les pressions étaient très faibles; on trouve en effet, dans la pratique moderne, des tourillons et des pivots vingt fois plus chargés; dans le cas des roues enrayées par les freins des chemins de fer, la vitesse peut atteindre 30 mètres par neconde. Des expériences plus récentes ont démontré que les lois ordisaires du frottement ne s'appliquent pas à ces cas extrêmes.

22. — *Frottement au départ.* — Coulomb avait déjà remarqué, et ce fait a été vérifié par Morin, que le frottement au départ est plus grand, mais qu'il suffit d'un choc léger pour déterminer la mise en train, et donner au frottement sa valeur du mouvement. Plus récemment, Fleeming Jenkin a trouvé, en expérimentant à des vitesses très faibles, que le frottement décroit progressivement et non brusquement, lorsque l'on passe de l'état de repos à des vitesses graduellement croissantes.

23. — *Expression analytique des deux premières lois du frottement.* Ces lois indiquent que le rapport

$$f = \frac{F}{N}$$

1. Morin, *Leçons de mécanique pratique.*
Sonnet. Dictionnaire des mathématiques appliquées. Art. frottement.

a une valeur indépendante de l'étendue des surfaces ; le coefficient f est donc caractéristique de l'état des surfaces seulement, on le nomme coefficient de frottement.

On a, figure 13 ;

$$tg\ \varphi = \frac{F}{N}$$

donc $$f = tg\ \varphi.$$

Fig. 13

On a aussi :

$$F = R \sin \varphi$$

ou :

$$F = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R$$

Le coefficient constant, $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, ou sin φ, se désigne ordinairement par f'.

On a donc, pour calculer F, l'une ou l'autre des relations :

$$F = f\,N$$
$$F = f'\,R$$

La table I donne quelques unes des valeurs trouvées par Morin pour les cas usuels.

Pour les tourillons, où la surface de contact change à chaque instant, le coefficient a une valeur différente, surtout lorsque le graissage est abondant.

Rennie a déterminé quelques coefficients du frottement au repos pour des pressions croissantes et beaucoup plus élevées (Table II); les métaux étaient d'abord graissés, puis essuyés, c'est-à-dire que les surfaces étaient à peu près à l'état sec; il a trouvé que f conserve une valeur constante entre des limites très étendues, mais qu'il s'élève au fur et à mesure qu'on se rapproche du grippement.

TABLE I. — *Coefficients de frottement d'après Morin.*

NATURE DES SURFACES FROTTANTES	ÉTAT DES SURFACES	f AU DÉPART	f PENDANT le mouvement	f POUR DES TOURILLONS GRAISSÉS
Fonte sur fonte ou sur bronze. . .	onctueuses	0.16	0.15	0.054
Fer forgé sur fonte ou sur bronze. .	sèches	0.19	0.18	»
» » » . .	graissées	»	»	0.054
Fer forgé sur fer forgé	onctueuses	0.13	»	»
Bronze sur fer forgé.	onctueuses	»	0.16	»
Fonte sur bois de gaïac	graissées	»	»	0.09
Courroie en cuir sur tambour en bois .	sèches	0.47	0.27	»
Corde en chanvre sur chêne.	sèches	0.80	0.52	»
Courroie en cuir sur fonte	sèches	0.28	»	»
Garnitures en cuir des pistons. . . .	graissées	0.12	»	»

TABLE II. — *Coefficients de frottement au repos d'après Rennie.*

PRESSION PAR CENTIMÈTRE CARRÉ	FER SUR FER	FONTE SUR FER	ACIER SUR FONTE	LAITON SUR FONTE
8k79	0.140	0.174	0.166	0.157
13.08	0.250	0.275	0.300	0.225
15.75	0.271	0.292	0.333	0.219
20.95	0.297	0.329	0.344	0.211
26.22	0.350	0.351	0.351	0.206
31.50	0.395	0.365	0.354	0.208
36.77	0.409	0.366	0.357	0.223
42.18	grippement	0.367	0.359	0.234
47.25		0.376	0.403	0.233
55.12		grippement	grippement	0.232

24. — ***Frottement des corps abondamment lubrifiés.*** — Il est probable que les lois du frottement ne sont sensiblement exactes que pour des

surfaces à l'état sec entre certaines limites de pression et de vitesse. L'interposition d'un lubrifiant a pour effet de substituer au glissement des solides l'un sur l'autre, celui des deux corps sur la matière employée au graissage. Très souvent, le lubrifiant est liquide, or, le frottement des liquides sur les solides est indépendant de la pression, tandis qu'il est proportionnel à la surface, et varie avec la vitesse. D'une manière générale, si on désigne par :

S la surface de contact,

p, la pression par unité de surface,

K, un certain coefficient,

v, la vitesse,

on a pour le frottement du liquide sur la surface S du solide :

$$F = KS\,\psi(v)$$

et pour la pression normale :

$$N = pS$$

d'où pour le coefficient de frottement d'un liquide sur un solide :

$$f = \frac{F}{N} = K.\frac{\psi(v)}{p}$$

le coefficient varie donc avec une certaine fonction de la vitesse, et en raison inverse de la pression.

Lorsque deux pièces solides en mouvement relatif sont séparées par une couche de lubrifiant, le phénomène est très complexe, et le frottement doit dépendre de la viscosité du corps qui sert au graissage et du frottement de ce corps avec chacune des surfaces solides; les lois du frottement des corps lubrifiés ne sont donc pas aussi simples que celles d'un liquide sur un solide ; aussi, Hirn [1] a trouvé, qu'avec des surfaces graissées, *le coefficient de frottement, dans les cas ordinaires, est en raison directe de la vitesse, et en raison inverse de la racine carrée de la pression par unité de surface.* Lorsque les pressions sont extrêmement faibles, l'air peut agir comme lubrifiant, et le coefficient descend jusqu'à $\frac{1}{10\,000}$; enfin, la température, en modifiant la viscosité, exerce une influence sur le coefficient.

Dans le cas qui nous occupe, le frottement dépend de la nature et de

1. Ces recherches sont rappelées dans le *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse 1889, p. 449.*

l'abondance du lubrifiant, plus encore que des métaux en contact, il peut être considéré comme étant la somme de deux efforts : l'un employé à vaincre la cohésion de la couche ; l'autre, à produire le glissement des surfaces solides sur le lubrifiant ; la cohésion du lubrifiant peut devenir la cause prépondérante du frottement, dans tous les cas où la pression normale par unité de surface est assez faible pour que le corps employé au graissage puisse subsister entre les surfaces sous une épaisseur sensible ; aussi les graisses consistantes, employées pour les tourillons chargés, ne peuvent servir au graissage des mécanismes légers ; l'horlogerie emploie, pour cette raison, des huiles d'une fluidité extrême ; l'emploi des graisses semi fluides obtenues par le traitement des huiles minérales, qui s'est substitué partout à celui des huiles ordinaires pour les coussinets fortement chargés, a complètement échoué pour les mécaniques de filatures ; l'épaississement des huiles par le froid, exerce, dans certains ateliers, une grande influence sur la dépense de force motrice à dépenser lors de la reprise du travail après un arrêt prolongé.

25. — M. Petroff[1] a établi analytiquement la formule suivante donnant le coefficient de frottement en se basant sur les propriétés de cohésion du lubrifiant, et sur son adhésion avec les surfaces :

$$f = \frac{\mu v}{\left(\epsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}\right) p}$$

dans laquelle :

f est le coefficient de frottement ;

μ, une fonction de la viscosité ou coefficient intérieur du lubrifiant ;

v, la vitesse avec laquelle les surfaces se déplacent ;

ϵ, l'épaisseur de la couche d'huile ;

λ_1 et λ_2, les coefficients de frottement extérieurs, c'est-à-dire du lubrifiant avec chacune des surfaces ;

p, la pression par unité de surface.

On conçoit, d'après cette formule, que le coefficient de frottement entre des pièces abondamment graissées échappe à toute loi simple ; toutefois elle est confirmée dans une certaine mesure par les résultats de Hirn (24).

1. *Neue Theorie der Reibung* von N. Petroff, traduit du russe par L. Wurzel, Leipzig-Voss, 1887.

M. Thurston [1] donne, comme résultat de ses recherches expérimentales, la formule

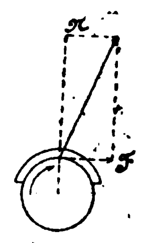
$$f = a \frac{\sqrt[5]{v}}{\sqrt{p}}$$

Ces diverses valeurs indiquent une variation, dans le même sens, du coefficient de frottement avec la vitesse et en raison inverse de la pression.

26. — *Expériences de M. Beauchamp-Tower* [2]. — Ces expériences ont été entreprises dans le but de comparer diverses huiles, elles ont été faites au moyen d'un coussinet en bronze s'appuyant sur un tourillon en acier, elles semblent démontrer contrairement à ce qui a été établi aux numéros 22 et 23, que le coefficient de frottement est indépendant de la vitesse, au moins entre des limites variant dans le rapport de 1 à 10; la température était maintenue à 32 degrés centigrades, la pression par centimètre carré du plan diamétral du tourillon était variable, et son influence sur le coefficient ressort des chiffres ci-dessous :

PRESSION	COEFFICIENT
31	0,00132
23	0,00168
14,8	0,00247
6,2	0,0044

Toutefois, le coefficient de frottement est souvent pris, par les savants anglais, dans un sens restreint, il est obtenu en divisant l'effort F, qui tend à faire tourner le coussinet dans le sens du mouvement (fig. 14), par la pression normale N qui le sollicite, comme s'il s'agissait d'une surface plane, ou comme si le coussinet reposait suivant une seule génératrice, tandis qu'il devrait être déterminé en appliquant à chaque élément de l'arc de contact une composante de la pression normale.


Fig. 14

A part cette restriction, les recherches de M. Beauchamp-Tower ont eu pour résultat de déterminer la loi de répartition des pressions, sur la face de contact du coussinet.

1. *Etude sur le frottement*, etc. par Robert H. Thurston. Traduction Paris-Bernard. 1887.

2. *Engineering* 1883. 2e sem. p. 451 ; 1885 1er sem. p. 458. Remarque de M. Hele Shaw.

Des canaux (fig. 15), pratiqués suivant les génératrices, aboutissent sur la face intérieure, et débouchent en divers points de la surface

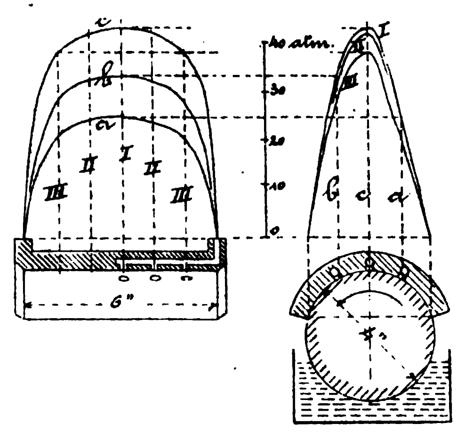


Fig. 15

extérieurement ils sont en relation avec un manomètre qui permet de lire la pression.

La loi de variation de la pression a été représentée par des courbes, dont la hauteur dépend de la charge qui pèse sur le coussinet ; pour des huiles minérales lourdes, la pression s'est élevée à plus de 40 atmosphères.

Le mode d'application du lubrifiant paraît avoir une grande influence sur le phénomène ; celui qui a donné les courbes de la figure 15 consiste à faire tourner la partie inférieure du tourillon dans le bain d'huile [1].

On doit admettre, comme bien établi, que l'huile épaisse peut supporter une pression de 40 kilogrammes par centimètre carré sans être expulsée latéralement, bien que le tourillon ne présente aucune saillie qui soit de nature à la retenir. La pression est la plus grande dans la section située au milieu de la longueur, elle décroît très rapidement près des extrémités ; dans chaque section droite, elle diminue près des bords, mais d'une manière inégale par rapport au milieu de l'arc, c'est le sens du mouvement qui détermine cette inégalité.

1. Les autres modes d'application essayés consistaient encore en un siphon à mèche, ou godet graisseur ordinaire, et en un tampon imbibé placé sous le tourillon, ces deux derniers ont donné des coefficients de frottement de 6 à 7 fois plus élevés que lorsque l'arbre baigne dans l'huile. Les expériences de M. Goodmann au Yorkshire College concluent dans le même sens.

27. — *Expériences de M. Woodbury à Boston* [1]. — Ces expériences ont porté sur une huile minérale sous différentes charges, mais la machine employée était formée de deux disques horizontaux tournant l'un sur l'autre, entre lesquels on interposait le lubrifiant ; la vitesse est donc variable depuis le centre, où elle est nulle, jusqu'à la périphérie, où elle atteint $1^m,50$ par seconde ; le disque inférieur est commandé par une courroie, le moment nécessaire pour équilibrer les frottements sur le disque supérieur est mesuré au moyen d'un dynamomètre, le coefficient de frottement est déterminé par la formule des pivots (48).

Les résultats traduits en diagramme (fig. 16 et 17), accusent nettement la diminution du coefficient lorsque la pression augmente, la température restant constante ; la température exerce un effet analogue, mais spécial au lubrifiant qui a servi à l'essai.

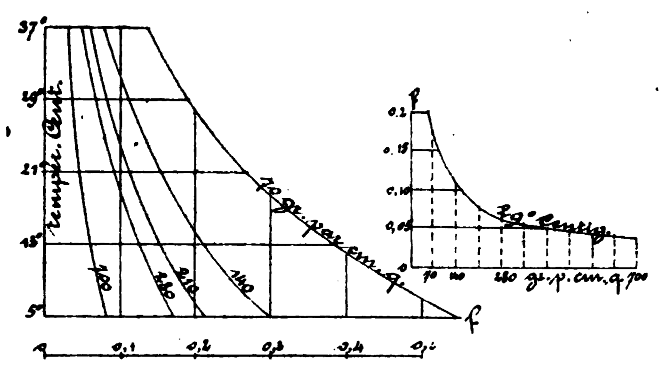


Fig. 16 et 17

28. — *Frottement à sec sous de grandes pressions, à vitesse variable* [2]. — Le frottement à sec a fait l'objet de recherches approfondies, surtout au point de vue du fonctionnement des freins continus. Poirée et Bochet, au chemin de fer de Paris-Lyon, avaient constaté qu'à des vitesses variant depuis 80 jusqu'à 22 kilomètres à l'heure (22 mètres à $6^m,20$ par seconde), le coefficient de frottement des roues enrayées sur les rails secs augmente de 0,136 juqu'à 0,20. MM. Westinghouse et le capitaine Douglas Galton ont trouvé, au moyen d'appareils enregistreurs, sur les lignes du London-Brighton Railway, que le frottement entre les sabots

1. *Engineering*. - 1884 - 2e sem. p. 532.
2. *Engineering*, 1878, 2e sem. pp. 153, 386, 395 et 399.

de frein et les bandages des roues non enrayées, ainsi que celui des roues enrayées sur les rails, augmentent lorsque la vitesse diminue; ils donnent de leurs expériences le tableau ci-dessous, dont les fig. 18,

Expériences de MM. Westinghouse et Douglas Galton.

VITESSES PAR SECONDE	COEFFICIENT DE FROTTEMENT			
	après 3 secondes d'application du frein	après 5 à 7 sec	après 12 à 16 sec	après 24 à 25 sec
	SABOTS EN FONTE, BANDAGES EN ACIER			
27m00	0.062	0.054	0.048	0.043
22.30	0.100	0.070	0.056	—
20.00	0.125	—	—	—
17.90	0.134	0.100	0.080	—
13.50	0.184	0.111	0.098	—
9.00	0.205	0.175	0.128	—
4.50	0.320	0.209	—	—
au-dessous de 2.25	0.360	—	—	—
	SABOTS EN FER, BANDAGES EN ACIER			
21.00	0.110	—	—	
14.00	0.129	0.110	0.099	
8.00	0.170			
	ROUES ENRAYÉES, BANDAGES EN ACIER SUR RAILS EN ACIER			
22.50	0.040	—	—	
20.00	0.051	—	—	
17.00	0.057	0.044	0.044	
11.20	0.080	0.074	—	
6.70	0.087	—	—	
4.50	0.110	—	—	

19 et 20 sont la représentation graphique. On remarque également la diminution du coefficient avec la durée d'application des corps frottants,

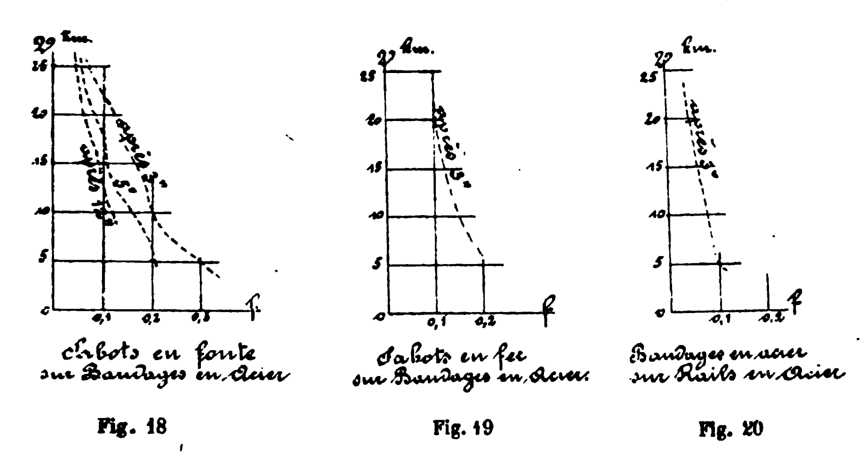


Fig. 18 Fig. 19 Fig. 20

soit que les surfaces s'altèrent en s'usant, soit que la limaille provenant de l'usure produise un effet lubrifiant

29. — *Observation importante sur les procédés employés pour déterminer le coefficient de frottement, et conclusions.* — Le seul procédé qui conduise à des résultats précis est celui employé par Morin (21); les surfaces portantes sont assez rigides pour qu'on puisse supposer la charge uniformément répartie; on obtient le frottement par un calcul sommaire pour chaque vitesse, peu importe qu'il soit constant ou variable. Dans l'application, la difficulté consiste à réaliser un mouvement ayant assez de durée et d'amplitude pour fournir des résultats exacts.

Malheureusement, les pressions pour lesquelles Morin a opéré sont très faibles, de même que les vitesses, et, bien que ses tables renferment des coefficients pour quelques surfaces graissées, aucune de ses expériences n'a été faite dans des conditions semblables à celles où se trouvent les pièces de machines, car celles-ci ne peuvent fonctionner qu'à la condition d'être abondamment lubrifiées; aussi, les lois du frottement (21), et les coefficients de Morin et de Rennie semblent devoir convenir à certains problèmes où le frottement au repos intervient, comme dans les constructions fixes.

Lorsqu'on se sert de deux disques appuyés l'un sur l'autre (procédé de Mac-Naught, Woodbury, etc.), la vitesse est variable avec le rayon

relatif à chaque élément; les coefficients sont déterminés en mesurant le moment résistant dû aux frottements sur toute la surface commune ; ce moment, égal à l'expression tirée de la formule des pivots (48), permet de déterminer *f*, mais cette formule suppose que le coefficient cherché est indépendant de la vitesse ; le résultat trouvé ne serait donc exact que dans cette hypothèse, or toutes les expériences, si l'on en excepte celles de M. Beauchamp-Tower (26), semblent démontrer que le coefficient augmente avec la vitesse.

Rankine a évalué le temps que met à s'arrêter un système tournant, lancé à une certaine vitesse, puis abandonné à lui-même; comme il n'est soumis alors qu'au travail du frottement sur ses tourillons, si le coefficient cherché est indépendant de la vitesse, le mouvement est uniformément ralenti, et le travail du frottement peut s'évaluer facilement d'après la force vive connue au commencement de l'expérience. Si au contraire, *f* dépend de la vitesse, cette expérience ne peut donner de résultats précis que si l'on enregistre la loi de décroissance de la vitesse en fonction du temps.

Enfin, plusieurs expérimentateurs, MM. Robert Thurston, Beauchamp-Tower, ont envisagé des tourillons se mouvant sous des pressions et à des vitesses réglées pour chaque expérience, mais variables d'une expérience à l'autre; ils ont trouvé des coefficients qui descendent parfois au centième de ceux trouvés par Morin pour des surfaces planes glissant l'une sur l'autre, et au trentième de ceux attribués par ce savant aux tourillons graissés.

Il importe de laisser à la plupart des expériences faites sur les tourillons leur véritable signification [1], elles ne donnent pas le *coefficient de frottement* au sens que les auteurs classiques (Coulomb, Navier, Poncelet, Morin) ont attribué à ce mot, car la pression normale par unité de surface varie d'un point à l'autre du coussinet (26); alors même que le mode de répartition serait connu, le coefficient *f* ne peut être déterminé s'il dépend de la pression suivant une fonction plus ou moins compliquée. Le coefficient serait, dans tous les cas, variable d'un point à l'autre de la surface, tandis que les auteurs admettent la notion d'un seul coefficient, tiré de l'expérience, en divisant la valeur de l'effort tangentiel par la pression normale, comme si le contact n'avait lieu que suivant une génératrice.

1. Voir au n° 162 l'appareil de Thurston.

Dans les calculs qui ont pour objet l'évaluation des travaux absorbés par les résistances passives, il convient d'exagérer la valeur numérique des coefficients de frottement, afin d'éviter tout mécompte ; le graissage n'est pas toujours opéré avec tout le soin nécessaire, et surtout les erreurs de montage, les mouvements légers dans les massifs de fondation des machines, peuvent donner aux pressions des valeurs plus grandes que celles qui résultent de la décomposition des forces agissant régulièrement.

30. — *Echauffement produit par le frottement.* — Le travail correspondant au frottement est équivalent au travail d'arrachement ou d'usure des surfaces frottantes, augmenté du travail correspondant au dégagement de chaleur qui accompagne le phénomène. Ce dégagement de chaleur peut avoir pour effet d'échauffer les pièces, et de rendre leurs surfaces impropres à supporter le frottement, il est alors nécessaire de les refroidir. Généralement, lorsque la vitesse et la charge sont modérées, l'accroissement de température est limité, parce que la chaleur s'écoule par conductibilité, par contact avec l'air ambiant, et surtout par vaporisation d'une légère partie du lubrifiant; ce n'est que dans des cas spéciaux qu'il est nécessaire de refroidir les organes par arrosage à l'eau froide.

Le travail d'usure des surfaces et la chaleur produite par le frottement varient dans le même sens, le premier effet du lubrifiant est de diminuer le travail d'usure, et par conséquent la chaleur produite; par une action subséquente, due, non à ses propriétés lubrifiantes, mais à son état liquide, la matière employée au graissage limite encore l'élévation de température.

31. — *Lubrifiants.* — On emploie comme lubrifiants les matières liquides ou semi-fluides, parfois même des corps solides onctueux, comme le talc et le graphite [1].

Les matières liquides employées sont, surtout, les huiles animales (de baleine, de pied de bœuf, de lard, etc.), les huiles végétales (d'œillette, de colza, d'olive, etc,) et les huiles minérales plus ou moins lourdes qui distillent au-delà de 300°.

La graisse consistante, qui jouit aujourd'hui d'une grande vogue, est un produit à base de vaseline, qui fond par une légère augmentation

1. Thurston - ouvrage cité.

de température des coussinets, et fonctionne dès lors comme les huiles liquides.

Les qualités des huiles dépendent:

1° De leur pouvoir réducteur du coefficient de frottement.

2° De leur viscosité lorsqu'il s'agit de grandes pressions; il y a lieu de remarquer que cette propriété ne dépend pas nécessairement du poids spécifique.

3° De leur résistance à l'oxydation, les huiles végétales surtout sont siccatives à divers degrés, l'huile de lin doit être rejetée.

4° De l'absence d'action chimique sur le métal, les huiles minérales sont exemptes de ce défaut, les autres huiles peuvent être fortement acides, soit qu'elles n'aient pas été bien débarrassées de l'acide sulfurique qui a servi à les raffiner, soit qu'elles renferment des acides gras; celles qui en sont purifiées se nomment huiles neutres, et sont recherchées pour le graissage.

5° De l'élévation du point d'ébullition et d'inflammation.

6° De l'abaissement du point auquel elles se congèlent.

L'expérience a démontré que les acides gras libres sont impropres au graissage, et qu'ils détériorent les surfaces; les huiles acides, après avoir servi au graissage, renferment à l'analyse une proportion notable de cuivre, provenant du bronze des coussinets; il importe donc de ne faire usage que des huiles neutres.

Pour les organes baignés par la vapeur à haute pression, on n'emploie plus que les huiles minérales; les huiles végétales et les corps gras d'origine animale, ont sous l'action de la vapeur, la propriété de se dédoubler en mettant en liberté leur acide gras, qui attaque les parois métalliques.

32. — *Mode d'application du graissage.* — Le mode d'application de la matière lubrifiante à une grande influence sur le frottement. D'après les expériences de Beauchamp-Tower et de Goodmann (26), les paliers graisseurs dans lesquels l'arbre tourne dans un bain d'huile, seraient préférables à tout autre système, le graissage au moyen d'un godet à mèche est dispendieux et peu efficace.

Pour un coussinet très chargé et dont la pression s'exerce toujours

dans le même sens, il est nécessaire de pratiquer des canaux pour permettre à l'huile d'arriver en tous les points de la surface de contact.

On a remarqué aussi que les coussinets épousant complètement la demi-circonférence d'un tourillon s'échauffent beaucoup plus vite que ceux qui sont évidés latéralement, et qu'on emploie couramment pour les fusées des essieux de wagons (fig. 21): dans ces derniers la projection *ab*, de l'arc de contact, descend jusqu'à 0,7 du diamètre *d*, du tourillon; certains constructeurs pratiquent un évidement analogue, quoique moins prononcé, dans les coussinets des transmissions; quelquefois, l'évidement est pratiqué dans le pivot, lorsque le mouvement de rotation n'a qu'une amplitude faible, il en est ainsi dans les articulations de pied de bielles des machines de Porter-Allen (fig. 22); l'évidement a encore pour but, ici, de prévenir l'ovalisation.

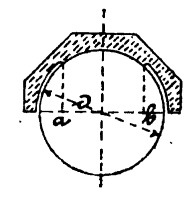


Fig. 21

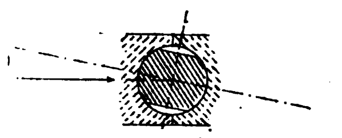


Fig. 22

§ II.

Du frottement des liquides sur les solides.

33. — Le frottement de l'eau sur des parois solides de diverse nature a fait l'objet des recherches des hydrauliciens; sa connaissance est indispensable à l'étude du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts [1]. Il est essentiel de remarquer toutefois, que les expressions admises pour mesurer soit la perte de charge, soit la perte de pression dans les tuyaux, ne permettent pas de trouver l'action s'exerçant réellement entre le liquide et la paroi, car ces expressions tiennent compte d'un phénomène plus complexe, celui du frottement des couches successives l'une sur l'autre, depuis la paroi jusqu'au filet le moins retardé par leur action.

Le frottement du liquide sur la paroi, tel qu'il s'exerce sur certaines

1. Voir pour ces recherches le *Traité d'Hydraulique* de Bresse et la bibliographie fort complète indiquée par M. Haton de la Goupillière, *Cours de Machines* T I. 71.

pièces de machines, mobiles dans l'eau [1], ou sur la carène des navires, a surtout été étudié en vue de la propulsion; les expériences les plus anciennes que l'on connaisse sur ce sujet sont celles entreprises à Londres par le colonel Beaufoy à la fin du siècle dernier; le vice-amiral Bourgois en a tiré la formule

$$R = (0,05\ V + 0,11\ V^2)\ S$$

R étant la résistance, en kilogrammes,
V la vitesse, en mètres par seconde,
S la surface mouillée, en mètres carrés.

Beaufoy n'avait opéré que sur des surfaces en bois, et la formule ci-dessus se rapporte à du bois raboté et peint.

C'est à W. Froude que l'on doit les expériences les plus précises sur le frottement de l'eau en mouvement sur diverses surfaces; le frottement par mètre carré est donné par:

$$R = ASV^n$$

A étant un coefficient qui diminue peu à peu lorsque la surface mouillée est plus longue dans le sens de la vitesse de l'eau, et dont la valeur est donnée par le tableau.

S est la surface en mètres carrés.

n augmente de 1,83 à 2,06 en passant d'une surface très unie à une surface rugueuse.

Expériences de W. Froude

NATURE DE LA SURFACE	VALEURS DE A, SURFACE AYANT :		
	15m00 de long	2m44 de long	0m61 de long
Enduite de vernis	0.122	0.158	0 200
Feuille d'étain	0.120	0.135	0.146
Calicot	0.231	0.305	0.424
Sable fin	0.197	0.284	0.394
Sable moyen	0.238	0.304	0.438

1. Voir notre 7e Fascicule, machines servant à déplacer les fluides n° 130. Paris. — E. Bernard.

Enfin, M. Unwin ([1]), au moyen d'un appareil fort ingénieux (50), a trouvé, pour des disques tournant dans l'eau, que la formule de Froude se vérifie, le coefficient A et l'exposant n prennent les valeurs suivantes, lorsque l'on transforme les mesures anglaises en mesures métriques:

Expériences de M. Unwin

NATURE DE LA SURFACE	A	n
Bronze poli.	0.143	1.85
Fonte peinte	0.153	1.86
Fonte peinte et vernie.	0.125	1.94
Fonte.	0.112	2.00
Surface couverte de sable fin. . . .	0.169	2.05
Surface couverte de gros sable . . .	0.415	1.91

34. — Le frottement entre les liquides et les solides ne dépendant pas de la pression, il est possible, dans certains cas, de réduire notablement la résistance au mouvement au moyen de dispositions inventées par Girard, et qui ont pour but de substituer le frottement du liquide sur solide, à celui des solides entre eux ; on y parvient en maintenant, entre les faces en contact, une nappe d'eau très mince, refoulée sous pression. On a pu, de cette manière, rendre possible le fonctionnement de lourds arbres verticaux ([2]) au moyen du pivot hydraulique (fig. 23); l'arbre porte à sa base un plateau d'une certaine étendue, reposant sur un plateau fixe, qui reçoit à son centre l'eau refoulée par une petite pompe ([3]); on pourrait évaluer le frottement en se servant des coefficients de M. Unwin, au moyen de a méthode qui sera exposée plus loin (48).

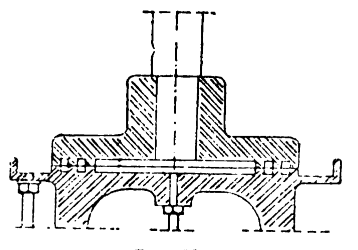


Fig. 23

1. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers.* Vol. LXXX.
2. Les étages des filatures étaient commandés autrefois par une ligne d'arbres verticale donnant le mouvement aux arbres secondaires par des roues coniques ; le poids de l'arbre vertical chargé de ses nombreuses roues de transmission étant fort considérable, le fonctionnement du pivot était souvent défectueux ; les transmissions sont aujourd'hui disposées autrement.
3. Pour le *Pivot hydraulique de Girard*, V. Armengaud, Vignole des mécaniciens p. 139.

35. — La réduction de résistance obtenue par ce procédé est si considérable, qu'on a songé à l'employer pour éviter la résistance au roulement. Le chemin de fer hydraulique, dont l'idée, reprise récemment, remonte également à Girard, comporte en effet, outre le mode propulseur, un système de patins glissant sur l'eau, remplaçant les roues des véhicules ordinaires.

Des difficultés pratiques presque insurmontables empêcheraient sans doute la réalisation du système en grand, mais on a pu [1] établir une courte ligne d'essai dont le fonctionnement a justifié les prévisions de l'inventeur.

La figure 24 représente les patins de support employés, la face qu

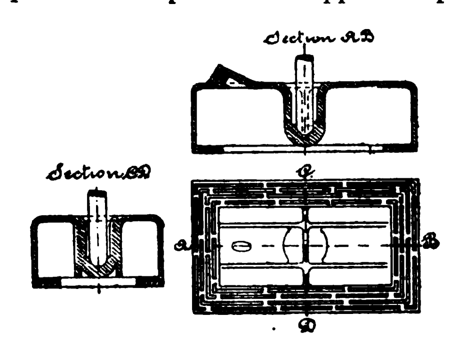


Fig. 21

porte sur le rail plat est rectangulaire, et entourée de cannelures, dont le but est de créer de fortes pertes de charge à la sortie du liquide, c'est-à-dire de diminuer le débit de la fuite, pour une même pression sous le patin; la pression est d'environ 4 kilogrammes par centimètre carré.

Girard a aussi proposé de substituer l'air comprimé à l'eau sous pression; le coefficient de frottement est incomparablement moindre pour l'air que pour l'eau, à égalité de pression, mais le volume beaucoup plus grand, débité pour un même intervalle entre le patin et le rail, serait un obstacle à son emploi.

Il n'est sans doute pas permis d'appliquer à une lame d'eau de moins d'un millimètre d'épaisseur les coefficients de Froude et de Unwin (33), et de nouvelles expériences devraient être entreprises à ce sujet, sinon il serait possible de calculer la résistance à vaincre pour entrainer les

1. Exposition universelle de Paris. *Notice sur le chemin de fer glissant*. Paris. Imp. Cabasson - 1889.

charges sur le chemin de fer glissant; à la pression effective de 4 kilogrammes par centimètre carré, la surface de patin correspondant à une tonne de charge est

$$S = 0^{mq},025$$

et l'on obtient, pour la résistance à différentes vitesses, dans le cas de la fonte:

V MÈTRES PAR SECONDE	V' KILOMÈTRES A L'HEURE	R^k PAR TONNE DE CHARGE
10	36	0.28
20	72	1.12
30	108	2.52
40	144	4.48

Ces résistances sont, en effet, de beaucoup inférieures à celles qu'opposent au roulement les véhicules les mieux construits, sur les lignes ferrées en bon état.

§ III.

Résistance au roulement.

36. — Cette résistance, qu'on appelle parfois improprement: frottement de roulement, se manifeste à la génératrice de contact de deux pièces qui roulent l'une sur l'autre, et provient de la déformation très légère qui se produit dans le voisinage du point d'appui; ainsi, dans le cas d'un cylindre de poids P, roulant sur un plan (fig. 25), la déformation, tant du cylindre que du plan, occasionne une résistance qui peut être vaincue par l'effort T, parallèle au plan.

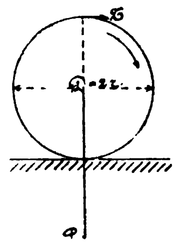


Fig. 25

Les expériences sur la résistance au roulement

sont peu nombreuses. Coulomb à trouvé qu'elle peut être donnée par la formule

$$T = A \frac{P}{D}$$

T et P sont les forces exprimées en kilogrammes, et D est le diamètre du rouleau en mètres ; le coefficient A dépend de la nature des surfaces, les cylindres avaient de 2 à 6 pouces de diamètre, le plan de roulement était en bois de chêne; A prend les valeurs suivantes:

Rouleau en bois de gaïac. . . . $A = 0.000097$
» en orme . . . . $A = 0.00162$

L'équilibre exige que l'on ait (fig. 26),

$$T \times ab = P\delta$$

ou, très approximativement:

$$T = \delta \frac{P}{D} \quad (1)$$

On voit que le coefficient A, de Coulomb, a pour valeur la distance δ, comprise entre le point d'application, C, de la réaction, et la verticale passant par le centre du rouleau (δ serait ainsi constant pour des rouleaux de divers diamètres, ce qui est peu vraisemblable).

Nous empruntons au *Traité des Mécanismes*, de M. Haton de la Goupillière, les valeurs de δ généralement admises

NATURE		δ, EN MÈTRES
DU ROULEAU	DE LA SURFACE	
fonte	granit uni	0.0010
orme	gaïac dressé	0.0010
orme	chêne dressé	0.0016
fonte	rail saillant	0.0012
jante en fer	chêne brut	0.0102
id.	pavé (au pas)	0.0185
id.	pavé (au trot)	0.0238
id.	empierrement	0.0414
id.	cailloutis neuf	0.0634

37. — Le travail de la force T, pour un déplacement ds, du point de contact, est évidemment:

$$2T\,ds$$

Ce résultat peut être interprété en considérant la résistance au roulement comme une force appliquée au centre, en sens inverse du mouvement, égale à

$$2T, \text{ ou } \delta \frac{P}{r}$$

En appliquant ce résultat à un rouleau en orme, de $0^m,10$ de diamètre on aurait:

$$A = 0.00162$$
$$D = 0.10$$
$$2T = 0.0324\ P$$

Le frottement de glissement serait, d'après Morin:

$$F = 0.38\,P$$

La résistance au roulement est donc de beaucoup inférieure au frottement proprement dit, il en est ainsi dans tous les cas usuels.

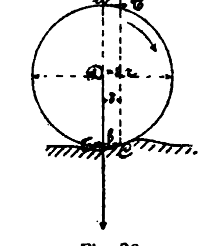


Fig. 26

Il serait facile du reste, de démontrer que le roulement ne peut avoir lieu que si T est inférieur à F, le mode de sollicitation étant celui de la figure 26, sinon, le glissement se produirait au moment où la force T serait égale à F.

38. — D'une manière plus générale, si l'on suppose que l'effort de traction X (fig. 27), est appliqué en un point quelconque A, du rouleau, celui-ci, sollicité à la fois par son poids P et par la force X, c'est-à-dire par leur résultante R, ne se mettra à rouler, que si cette force fait, avec la verticale, un angle inférieur à l'angle de frottement, condition qui exige:

$$\frac{\delta}{Ab} < tg\ \varphi$$

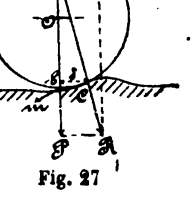


Fig. 27

ou, très approximativement:

$$\frac{\delta}{Am} <$$

c'est-à-dire

$$Am > \frac{\delta}{f}$$

39. — On peut supposer aussi que le cylindre est sollicité par une force verticale T' (fig. 28); la réaction du plan est alors verticale, et l'équilibre conduit à l'équation :

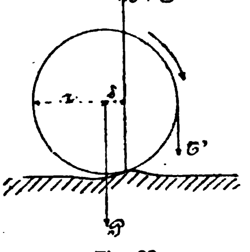


Fig. 28

$$T' = \delta' \frac{P}{r - \delta'}$$

ou, d'une manière approchée :

$$T' = \delta' \frac{P}{r}$$

Le travail de T', pour un déplacement du cylindre, est dans ce cas :

$$T' \, ds$$

les choses se passent donc comme si le cylindre était soumis à une résistance T', agissant dans le plan, en sens contraire du mouvement.

Il convient de remarquer que T' est à peu près double de la valeur T donnée par l'équation (1), car δ' ne saurait différer notablement de δ; il devait en être ainsi, puisque le bras de levier de T' par rapport au centre instantané de rotation, n'est que la moitié de celui de T par rapport au même point.

40. — Les résultats trouvés par Coulomb ne peuvent s'appliquer à tous les cas; il est évident, en effet, que δ n'est pas constant, car, pour un cylindre de rayon inférieur à cette quantité, la réaction passerait en dehors du rouleau; aussi, Dupuit, dans son *Essai sur le tirage des voitures*, qui date de 1837, admet pour δ la valeur:

$$\delta = c \sqrt{r}$$

équation dans laquelle le coefficient c prend les valeurs suivantes:

Bois sur bois.	$c = 0{,}0011$
Fer sur bois humide.	$c = 0.0010$
Fer sur fer	$c = 0.0007$
Roues sur chaussées empierrées.	$c = 0.0300$

On en tire pour la résistance au roulement :

$$2\,T = c\,\frac{P}{\sqrt{r}}$$

La résistance augmenterait donc, non en raison inverse du rayon, mais en raison inverse de la racine carrée de cette quantité.

41. — Enfin, Gerstner [1], prenant comme point de départ la pénétration de la roue dans un milieu élastique, trouve que la résistance est donnée par

$$2T = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3\ P^4}{\mu\ br^2}}$$

μ est un coefficient dépendant de la nature de la surface fixe, b est la largeur de la roue.

Cette valeur de la résistance conduit à admettre :

$$\delta = \frac{r}{P} \times 2T = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3\ Pr}{\mu b}},$$

elle montre l'influence de la largeur des jantes sur la résistance au roulement.

§ IV.

De la raideur des cordes.

42. — Cette résistance particulière se produit au passage de tout lien flexible (corde, courroie, câble métallique) sur une poulie ou un tambour. Les auteurs classiques [2] ont admis que la résistance Q (fig. 29), ne pouvant, par suite de la raideur du lien, être tangente à la circonférence moyenne de la corde enroulée, on a

$$P > Q$$

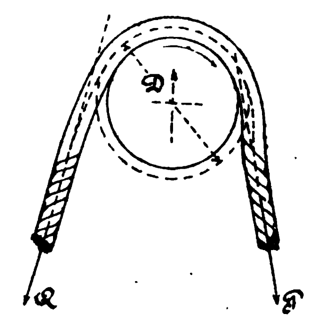


Fig. 29

Si la corde, au contraire, était parfaitement flexible, on aurait :



$$P = Q$$

1. Ruhlmann-Allgemeine Maschinenlehre, Band III.
2. Coulomb, Weisbach.

Coulomb a traduit les résultats de ses expériences sur des cordages en chanvre par la formule :

$$P - Q = \frac{A + BQ}{D}$$

P — Q se nomme la raideur ;

D est le diamètre moyen, mesuré sur l'axe du cordage enroulé ; si on l'exprime en mètres, et qu'on évalue P et Q en kilogrammes, les constantes A et B sont données par le tableau ci-dessous, tiré par Navier des expériences de Coulomb :

Table de Navier.— Cordages en chanvre

NATURE DES CORDAGES	NOMBRE de fils de caret	DIAMÈTRE d du cordage	POIDS par mètre	A	B
Cordes blanches. . . .	30	0.0200	0k2834	0.22246	0.00974
	15	0.0144	0.1448	0.06351	0.00552
	6	0.0090	0.0522	0.01060	0.00238
Cordes goudronnées. . .	30	0.0236	0.3326	0.34960	0.01255
	15	0.0168	0.1632	0.10593	0 00606
	6	0.0096	0.0693	0.02121	0.00260

Lorsque le diamètre d', du cordage, ne se trouve pas dans la table, Navier conseille de prendre le diamètre d qui s'en rapproche le plus, en admettant que les constantes A et B augmentent suivant une certaine puissance du diamètre

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$$

On prend

$\mu = 2$ pour les cordes neuves ;

$\mu = 1.5$ pour les cordes assouplies ;

$\mu = 1$ pour les cordages usés et très flexibles.

Cette loi serait applicable aux cordages blancs, tandis que, pour les cordes goudronnées, il suffit d'admettre que la raideur est proportionnelle au nombre de fils de caret.

Le *moment additionnel* dû à la raideur, est l'excès du moment de P (par rapport au centre de la poulie), sur le moment de Q, cette dernière force étant supposée agir tangentiellement ; la valeur de ce moment est donc :

$$P\frac{D}{2} - Q\frac{D}{2} = \frac{A + BQ}{2}$$

on retrouve souvent cette expression dans les théories de la mécanique appliquée.

43. — Morin, en interprétant les résultats des expériences de Coulomb, a constaté que l'influence du diamètre de la corde n'est pas traduite exactement par les considérations ci-dessus, et a proposé des formules dans lesquelles la grosseur est caractérisée par le nombre de fils de caret.

M. de Longraire [1] fait remarquer que les diverses formules mises en avant pour exprimer la raideur, bien qu'elles ne s'accordent guère, sont tirées des seules expériences de Coulomb ; les écarts, parfois considérables, que l'on trouve entre les auteurs, commandent la plus grande circonspection. D'ailleurs, parmi les expériences de Coulomb, il y a lieu de faire un choix; M. de Longraire élimine, notamment, celles qui ont porté sur un diamètre d'enroulement trop faible, comparativement à la grosseur du cordage, il arrive ainsi à une formule simple et pratique, applicable à la fois aux cordages blancs et aux cordages goudronnés, et dont l'accord avec les expériences de Coulomb et les formules de Morin est très satisfaisant; dans notre système de notations, elle s'écrit :

$$P - Q = 0.04\, Q\frac{p}{D}$$

p est le poids du cordage par mètre courant, en kilogrammes.

Le moment additionnel dû à la raideur prend la valeur :

$$(P - Q)\frac{D}{2} = 0.02\, Qp$$

44. — Pour résoudre les problèmes usuels relatifs aux appareils dans

1. *Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils* 1889.

la composition desquels entrent des cordages, on peut se servir utilement des données suivantes [1] :

$$p = 0.0007\, d^2$$

d est le diamètre en millimètres.

Pour les cordes goudronnées

$$p = 0.0006\, d^2$$

la charge de rupture pour des cordages ordinaires [2] c'est-à-dire commis en aussières, est

$$R = 5\, d^2$$

Il convient, pour le travail courant, de ne pas dépasser le sixième de cette tension. Le chanvre de Manille est notablement plus résistant que le chanvre ordinaire ; le chanvre d'Anjou atteint une résistance de 11 kg. par millimètre carré de section de fil de caret, ce chiffre est réduit de moitié pour certains chanvres goudronnés.

Les câbles spéciaux en chanvre fort des Flandres, fabriqués par la maison Vertongen-Goens, à Termonde, ont donné une résistance atteignant au minimum

$$R = 7\, d^2$$

Les câbles de transmission (103) de cette maison répondent aux formules suivantes :

Chanvre de Manille :

$$p = 0.00066\, d^2$$
$$R = 6{,}25\, d^2$$

Chanvre fort des Flandres :

$$p = 0.000825\, d^2$$
$$R = 6{,}25\, d^2$$

Les poulies et tambours sur lesquels s'enroulent les cordes doivent avoir, *pour rayon*, au moins 3 ou 4 fois le diamètre de celles-ci. Pour les câbles qui fatiguent beaucoup, et qui sont employés journellement

1. Voir en outre : *Des Ingénieurs Taschenbuch*, von dem Verein Hütte; ainsi que l'*Aide-Mémoire du constructeur de Navires*, par *Martinenq*. — Paris, E. Bernard.
2. D'après les cahiers des charges des chemins de fer de l'État, en Belgique.

dans les treuils à vapeur, le rayon doit avoir une valeur double ou triple au moins.

Les câbles plats peuvent être considérés, au point de vue de la raideur, comme formés par la réunion de cordages ronds dont le diamètre serait égal à l'épaisseur du câble plat; il est probable que la formule de M. de Longraire s'applique à ce genre de cordages, on pourra donc l'employer, à défaut d'expériences directes.

45. — Il existe très peu d'expériences sur la raideur des câbles métalliques, dont la composition, et par conséquent la flexibilité, varient beaucoup; les données les plus récentes à ce sujet sont celles de M. Murgue [1]. M. G. Leloutre arrive, il est vrai, à déterminer la raideur d'un cordage en fil de fer, mais il procède d'une manière indirecte, dans laquelle il est difficile de faire la part des résistances dues à d'autres causes. Redtenbacher et Grashof se sont aussi occupés de cette question, sans arriver à des résultats concordants. Les chiffres trouvés par M. Murgue (d'accord avec ceux de Grashof), répondent aux formules suivantes :

I. — Câbles en fil de fer

$$P - Q = (2 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

II. — Câbles en fil d'acier

$$P - Q = (3{,}50 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

III. — Câbles rouillés, en fil d'acier

$$P - Q = (3.00 + 0.0032\ Q)\ \frac{p}{D}$$

IV. — Câbles lubrifiés, en fil d'acier

$$P - Q = (1.90 + 0.0021\ Q)\ \frac{p}{D}$$

Les câbles expérimentés avaient des âmes en chanvre, parfois aussi chaque toron était muni d'une âme centrale; les diamètres ont varié de 21 à 33 millimètres.

1. Citées par M. de Longraire dans son important mémoire à la Société des Ingénieurs Civils de France.

La cause principale de la raideur est probablement la résistance au glissement des fils composant le cordage, résistance qui doit être vaincue aussi bien à l'enroulement qu'au déroulement, et qui se traduit par une consommation de travail; de là l'influence du goudronnage sur les câbles en chanvre, et celle du graissage sur les câbles métalliques.

46. — La composition des câbles métalliques étant très variable comme nature, grosseur, nombre de fils, disposition des âmes en chanvre, commettage en aussières ou en grelins, il serait difficile de caractériser leurs propriétés par une formule unique; comme première approximation, on peut s'en rapporter, pour les cordages en fer ou en acier, aux expériences suivantes, dans lesquelles p, d et R, ont la signification déjà indiquée :

$$p = 0.0035\ d^2$$
$$R = 15\ d^2 \text{ pour le fil de fer}$$
$$R = 35\ d^2 \text{ pour le fil d'acier}$$

La charge de travail est à peu près $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture (1).

1. Les câbles métalliques de la fabrication de M. Vertongen-Goens répondent aux formules

$$p = nd^2$$
$$R = md^2$$
$$d = K\delta$$

dans lesquelles n, m et K ont les valeurs du tableau ci-dessous; δ est le diamètre du fil.

NATURE DU CORDAGE	NOMBRE des âmes en chanvre	n	m		K
			ACIER MARTIN	ACIER FONDU	
6 torons de 6 fils . . .	—	0.003	20.5	47	9.5
6 — 7 — . . .	—	0.00325	23.7	55	9.5
6 — 8 — . . .	7	0.0026	18.4	42	11.5
6 — 10 — . . .	7	0.0024	16.8	38	13.5
6 — 12 — . . .	7	0.0025	16.2	37.5	15
6 — 19 — . . .	1	0.004	26	60	15

L'industrie fournit actuellement des câbles très flexibles, qui passent sur des poulies dont le rayon est égal à 10 à 15 fois le diamètre du cordage, mais ils sont en fils fins, et ne résistent pas à l'usure, ils ne conviennent pas pour les appareils de levage établis d'une manière permanente; pour ces derniers, le diamètre des tambours et molettes doit avoir au moins 1500 à 2000 fois le diamètre du fil dont se compose le câble.

§ V.

TRAVAIL ABSORBÉ PAR LES CHOCS.

47. — Le choc se produit lorsque deux pièces, animées de vitesses différentes, entrent en contact; on sait que, dans les cas où les corps ne sont pas parfaitement élastiques, il en résulte toujours une perte de force vive pour l'ensemble du système; lorsque leur élasticité est parfaite, et que la détente qui suit la période de compression a pour effet de les ramener à leur forme primitive au moment où cesse le contact, l'ensemble des masses ne subit aucune perte de force vive. En réalité, les pièces entrant dans la composition des machines n'appartiennent à aucune de ces catégories; on admet cependant, au risque d'exagérer les pertes, que les pièces qui se choquent sont dépourvues d'élasticité, elles conservent alors, après le choc, une vitesse commune suivant la normale aux surfaces de contact.

Lorsque deux masses, m, m', se meuvent dans la même direction, et sont animées des vitesses v et v' respectivement, la vitesse V, après le choc, est pour les deux masses :

$$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

L'effet du choc est, dans ce cas, de faire perdre au système total la force vive

$$m\,(v - V)^2 + m'\,(V - v')^2$$

et, conséquemment, le choc absorbe une quantité de travail égale à la

moitié de cette force vive, cette énergie transformée en chaleur n'est pas utilisable, elle est perdue pour la production du travail moteur.

Dans les machines, les masses qui se choquent ne sont pas libres, mais se trouvent soumises à des forces extérieures telles que leur poids, les actions motrices, les résistances utiles, etc. On sait que le travail de ces forces, pendant la durée du choc, est négligeable, puisque leur intensité reste finie, et que les chemins parcourus par leurs points d'application sont très petits, tandis que les réactions dues au choc sont très grandes, et que les déplacements de ces réactions sont du même ordre que ceux des forces. On arrive donc à déterminer les vitesses après le choc comme dans le cas de deux masses libres. Toutefois, lorsque le système est tel que le choc développe des réactions sur les appuis, comme celles-ci sont du même ordre que les forces qui naissent au point où la rencontre se produit, on ne peut négliger les travaux passifs qu'elles occasionnent.

On évite le choc autant que possible dans les mécanismes modernes, on ne le rencontre plus guère que dans les cas où il constitue un procédé d'élaboration (martelage, étampage, etc.), et dans des mécanismes accessoires, ayant fort peu de masse, tels que ceux employés dans les distributions de certains moteurs à vapeur. Navier [1] et Poncelet [2] ont analysé d'une manière très complète le marteau commandé au moyen d'un arbre à cames (108), appareil qui était fort répandu autrefois, mais auquel on a substitué aujourd'hui le marteau pilon à vapeur. Nous traiterons ce problème d'une manière sommaire au Chapitre III, afin de donner une idée de la marche à suivre dans l'étude de ces mécanismes.

1. Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique etc.
2. *Traité de Mécanique appliquée aux Machines*.

CHAPITRE III.

Equilibre des mécanismes soumis à des résistances passives.

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à envisager les mécanismes qui, par leur combinaison, constituent les transmissions ; nous supposons ces mécanismes connus au point de vue cinématique, c'est-à-dire en ce qui concerne les mouvements qu'ils réalisent. Notre but est d'arriver à la connaissance du terme

$$\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \tau_r \, dt$$

ou de

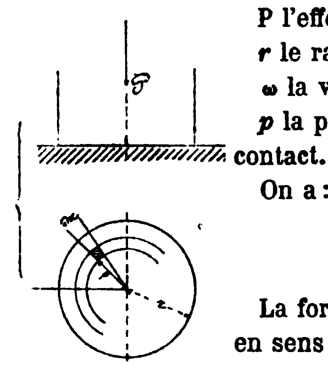
$$\Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{F}_r \, ds$$

qui entre dans les deux formes données à l'équation des forces vives. Nous supposerons que les systèmes sont à l'état de mouvement uniforme, ou bien, s'ils n'en sont pas susceptibles, que leurs vitesses sont, en tous cas assez faibles pour qu'on puisse négliger les forces d'inertie. Les seules forces à considérer sont donc les actions extérieures, et les résistances passives naissant du mouvement (11).

§ I.

SYSTÈMES DANS LESQUELS ON N'A A CONSIDÉRER QUE LE FROTTEMENT

48. — *Pivot chargé suivant son axe.* — (fig. 30). Appelons :


Fig. 30

P l'effort agissant suivant l'axe ;
r le rayon du pivot ;
ω la vitesse angulaire constante ;
p la pression uniforme par unité de la surface de contact.

On a :

$$p = \frac{P}{\pi r^2}$$

La force tangentielle qui sollicite chaque élément, en sens contraire du mouvement est :

$$f p \rho \, d\alpha \, d\rho$$

Pour l'élément de temps *dt*, on trouve facilement que le travail des forces analogues sur toute la surface de contact est donné par

$$\tau_r \, dt = \frac{2}{3} \pi f p r^3 \omega \, dt = \frac{2}{3} f P r \omega dt$$

le travail absorbé par seconde serait :

$$\tau_r = \frac{2}{3} f P r \omega$$

ω s'exprime souvent en fonction du nombre de tours n que fait l'arbre par minute ; or :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

Le travail résistant devient alors :

$$\tau_r = n \, \frac{\pi f P r}{45} \tag{1}$$

Exemple :

$P = 3.000$ kil.
$r = 0.05$
$f = 0.07$
$n = 70$

Le travail absorbé par seconde par le frottement du pivot sera :

$$\tau_r = 51.3 \text{ kgm.}$$

ou

$$\frac{51.3}{75} = 0.69 \text{ cheval vapeur}$$

La formule (1) nous apprend que le travail perdu est proportionnel au rayon du tourillon, il y a donc intérêt à le réduire ; d'autre part, la pression par unité de surface étant limitée par la considération du graissage, on ne peut descendre pour r en dessous d'une certaine limite.

49. — La formule précédente peut s'étendre aux épaulements des arbres sollicités suivant leur axe, analogues à ceux qu'on trouve dans les paliers de butée des arbres d'hélice. Le travail absorbé par seconde est alors :

$$\tau_r = \frac{2}{3} f P \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \omega$$

P est la pression suivant l'axe supporté par l'ensemble des cannelures ou par l'épaulement unique ;
r_1, le rayon extérieur ;
r_0 le rayon intérieur de la surface de contact.

Exemple : Le palier de butée du steamer *Grecian* comporte onze cannelures

$$r_0 = 0.194$$
$$r_1 = 0.232$$
$$P = 12000 \text{ kil.}$$
$$n = 50$$
$$f = 0.05$$

On trouve $\tau_r = 675$ kgm., environ
et

$$\frac{\tau_r}{75} = 9 \text{ chevaux}$$

50. — Certaines expériences sur les lubrifiants (27) ont été faites au moyen de deux disques horizontaux appuyés l'un sur l'autre ; un mouvement de rotation étant communiqué au disque supérieur, on mesure

le moment M à exercer pour maintenir en repos le disque fixe, ce moment a pour expression

$$M = \frac{2}{3} f P r$$

on tire de l'équation la valeur de f, qui est la seule inconnue. Mais on admet implicitement que le coefficient de frottement est le même dans toute l'étendue du plateau, c'est-à-dire qu'il est indépendant de la vitesse.

On peut opérer en prenant comme point de départ une autre hypothèse, et admettre *a priori*

$$f = \psi(v) = \psi(\omega\rho)$$

En introduisant cette valeur dans le calcul du numéro 48, et en opérant à différentes vitesses, on obtiendrait les paramètres de la fonction inconnue.

M. Unwin a opéré de cette manière pour déterminer le frottement des liquides sur les solides (33). En admettant que la résistance par unité de surface est donnée par

$$AV^n$$

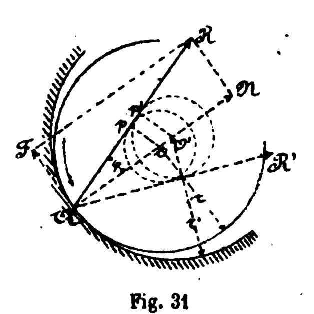
formule dans laquelle V désigne la vitesse, A et n des paramètres inconnus, il vient, en appliquant à un disque mince tournant dans l'eau le calcul du numéro 48, et en remarquant que le disque présente deux faces :

$$M = \frac{4\pi}{n+3} A\omega^n r^{n+3}$$

r étant ici le rayon extérieur du disque; deux expériences à des vitesses différentes, mais connues, permettent de trouver les valeurs de A et n après quoi il est nécessaire encore de s'assurer que la formule se vérifie pour une vitesse quelconque, car sinon, la loi supposée ne pourrait être admise.

51. — *Tourillons.* — Les arbres terminés par des tourillons reposant sur coussinets, sont généralement sollicités par des forces perpendicu-

laires à leur axe. On admet que la surface du tourillon, ne pouvant s'emboîter exactement dans le coussinet, ne touche la surface intérieure que suivant une génératrice, c'est-à-dire que les sections droites du tourillon et du coussinet n'ont qu'un point de contact, A (fig. 31). — Les centres du tourillon et du coussinet sont en O et O' respectivement ; lorsque le tourillon est en mouvement dans le sens de la flèche, la réaction du coussinet fait avec la normale, c'est-à-dire avec les rayons OA, O'A, un angle égal à l'angle du frottement, en désignant par r le rayon du tourillon, par r' celui du coussinet, la réaction R passe donc à la distance


Fig. 31

$$Op = r \sin \varphi$$

du centre O,
ou à la distance

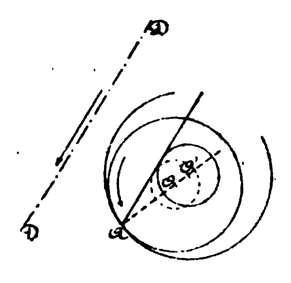
$$O'p' = r' \sin \varphi$$

du centre O'

Si le mouvement avait lieu dans l'autre sens, la réaction R, tangente aux circonférences Op, $O'p'$, serait au contraire dirigée suivant AR'.

Lorsque le mouvement est uniforme, la réaction R doit être égale et opposée à la résultante de toutes les forces qui agissent sur le système, on en déduit la direction suivant laquelle agit cette résultante lorsque l'on connait le point de contact A.

Réciproquement, si on connait une direction DD, à laquelle la résultante est parallèle (fig. 32), ainsi que le contour du coussinet dont le centre est en O', et le sens du mouvement, il suffit pour avoir le point de contact A, et par conséquent le centre du tourillon, de décrire du point O' la circonférence de rayon $r' \sin \varphi$, et d'y mener une tangente parallèle à DD, on trouvera ainsi le point de contact A, et l'on portera $Ao = r$ pour avoir le centre du tourillon.


Fig. 32

Il faut remarquer que la composante tangentielle de la réaction doit

toujours être en sens contraire du mouvement du tourillon; pour le sens de rotation inverse du précédent, on obtient donc la construction indiquée figure 33.

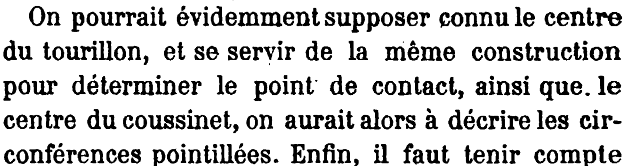


Fig. 33

On pourrait évidemment supposer connu le centre du tourillon, et se servir de la même construction pour déterminer le point de contact, ainsi que le centre du coussinet, on aurait alors à décrire les circonférences pointillées. Enfin, il faut tenir compte du sens de la résultante des forces extérieures, en supposant que la pièce à laquelle appartient le tourillon soit sollicitée vers le haut suivant la direction D_1D_1, on obtient, pour les deux sens de rotation, les figures 34 et 35.

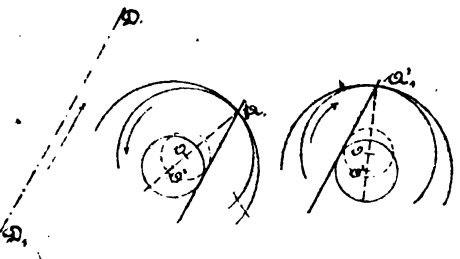


Fig. 34 et 35

Il peut arriver que le tourillon soit fixe, le coussinet fait alors partie de la pièce tournante à laquelle sont appliquées les forces extérieures : il en est ainsi dans les roues tournant sur fusées fixes, les poulies des moufles, les poulies folles, etc, soit O' (fig. 36), le centre de l'œil d'une poulie sollicitée par des forces extérieures dont la résultante est parallèle à DD et agit dans le sens de la flèche. Soit r' le rayon de l'œil, il suffira pour trouver le point de contact avec le pivot, de décrire de O' la circonférence $r' \sin \varphi$, et d'y mener une tangente parallèle à DD on trouvera ainsi le point A pour le sens de rotation indiqué.

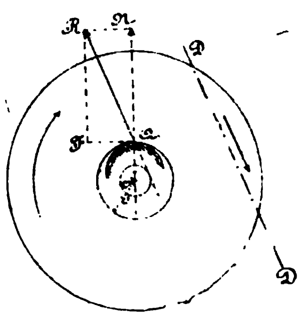


Fig. 36

52. — Pour exprimer l'équilibre du système tournant et arriver à la connaissance de la force motrice qu'il est nécessaire de lui appliquer,

on doit recourir à une équation de moment autour de l'axe de rotation; cet axe est choisi de préférence à tout autre, parce qu'il donne aux moments des forces une expression plus simple, il faut donc introduire, dans l'équation, le moment de la réaction du support fixe; si R désigne la réaction (fig. 31), le moment à introduire est

$$R\, r \sin \varphi$$

ou bien (23)

$$Rrf'$$

Dans le cas où le tourillon est fixe (fig. 36), ce moment devient

$$Rr'f'$$

53. — *Galet de guidage.* — Le dispositif représenté par la figure 37, était autrefois employé pour guider en ligne droite le pied de bielle des machines à vapeur verticales; pour le mouvement de haut en bas, le galet, tournant dans le sens de la flèche, doit être en équilibre sous l'action de la force qu'il reçoit de la fourche F de la crossette, et de la réaction qu'il reçoit du guide; il suffit, pour avoir la direction de ces forces, de porter $mM = \delta$ à partir du point de contact géométrique du galet, et de mener par M une tangente au cercle de rayon $r \sin \varphi$, r étant le rayon du pivot.

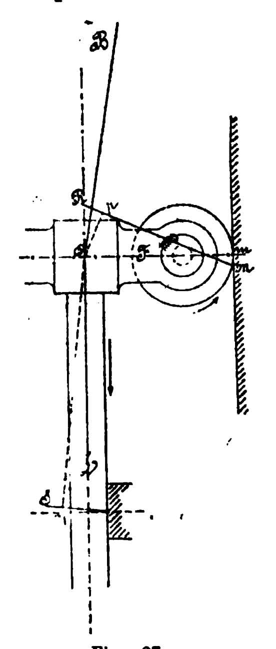


Fig. 37

Si, pour simplifier le problème, nous supposons que les tractions de la tige du piston et de la bielle agissent suivant les axes de ces pièces, on voit que la crossette, et la tige qui fait corps avec elle sont soumises :

1° A la force verticale V provenant de l'action de la vapeur,

2° A la traction de la bielle, dont la direction seulement est connue,

3° A la réaction R transmise par le pivot du galet, réaction dont on possède également la direction,

4° A la réaction S provenant du presse-étoupes, inclinée sur la normale de l'angle du frottement.

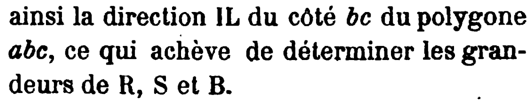
Toutes ces forces transportées en un point de l'espace et supposées connues, doivent former un contour fermé (équilibre de translation) (fig. 39), il faut de plus :

$$M_o(R, S) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{S} = \frac{Oq}{Op}$$

la connaissance du rapport $\frac{R}{S}$ permet d'effectuer la construction suivante : en un point quelconque I (fig. 38), on mène les quantités IK, KL, parallèles aux directions connues R et S, et égales à Oq, Op ; on connait ainsi la direction IL du côté *bc* du polygone *abc*, ce qui achève de déterminer les grandeurs de R, S et B.



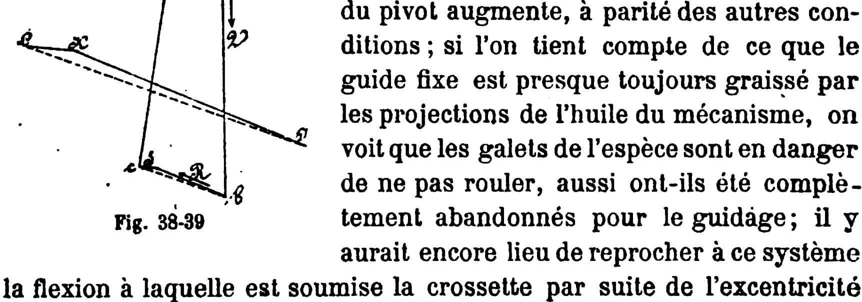


Fig. 38-39

Les choses ne se passent comme nous l'avons supposé, que si la réaction R est comprise dans l'angle du frottement possible entre le galet et le guide, sinon, le galet, au lieu de tourner, fonctionnerait comme une glissière, et l'état de sollicitation se trouverait modifié.

On remarque que la réaction R s'incline d'autant plus sur la normale, que le rayon du pivot augmente, à parité des autres conditions ; si l'on tient compte de ce que le guide fixe est presque toujours graissé par les projections de l'huile du mécanisme, on voit que les galets de l'espèce sont en danger de ne pas rouler, aussi ont-ils été complètement abandonnés pour le guidage ; il y aurait encore lieu de reprocher à ce système la flexion à laquelle est soumise la crossette par suite de l'excentricité de la force R par rapport au point O.

54. — ***Glissière ordinaire.*** — Dans le cas le plus simple, mais purement hypothétique, d'une glissière (fig. 40) soumise aux forces P et B, agissant sur une articulation centrale O, sans frottement, la réaction R

de la glissière sur le patin passe nécessairement par O, et son inclinaison étant donnée par l'angle du frottement, on déduit la grandeur des forces B et R du triangle des forces, qu'on construit immédiatement.

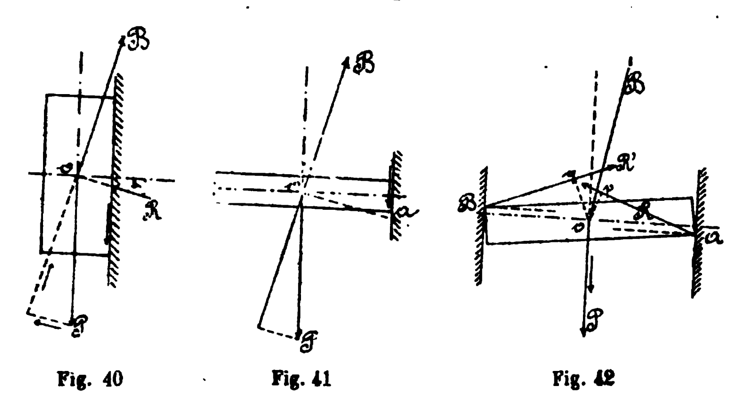


Fig. 40 Fig. 41 Fig. 42

L'équilibre indiqué ci-dessus n'est toutefois réalisé que si la direction OR tombe dans la face de contact du patin; le fonctionnement de la glissière (fig. 41), serait impossible, car l'effet de la résultante de P et B serait précisément de faire tourner le patin autour de son arête A. On peut empêcher ce pivotement, il est vrai, au moyen d'une deuxième glissière (fig. 42), le patin glisse alors par deux arêtes opposées A et B, et est soumis aux réactions R et R' dont les directions sont connues.

On doit avoir par l'équation des moments autour de O:

$$\frac{R}{R'} = \frac{Oq}{Op}$$

On pourra facilement tracer la direction de la ligne *bc* (fig. 43), et, en menant par *a* une parallèle à la bielle, on achèvera de déterminer R, R' et B.

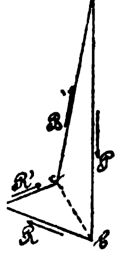


Fig. 43

Ce système serait évidemment très défectueux, puisqu'il fait naître une réaction nouvelle R', et que le frottement dû aux deux réactions R, R' est incomparablement plus grand que celui de la réaction R de la figure 40, mais pratiquement, il est même impossible d'admettre un frottement par les arêtes vives des pièces, le graissage ne serait plus satisfaisant, et il s'ensuivrait aussitôt un grippement.

55. — Dans l'application, les patins de guidage font corps avec la tige, à laquelle ils sont liés par assemblage rigide ou même par soudure (crossettes des machines marines); il est beaucoup plus rationnel de supposer alors que le patin porte également par toute sa face de contact, puisque cette face conserve toujours la direction de la tige, c'est-à-dire celle du guide lui-même, admettons donc que la réaction R du guide agisse au centre de la face d'appui (fig. 44), on pourra, comme dans les numéros précédents, trouver le rapport

$$\frac{R'}{R} = \frac{Op}{Oq}$$

Fig. 44

et, par conséquent, construire le polygone qui donne les forces inconnues B, R et R'.

Dans le cas particulier où $\varphi = \varphi'$ ce polygone devient le triangle *abc* (fig. 45), dans lequel *bc* est parallèle à la fois à R et R', et représente leur somme; on peut remarquer alors que la composante B conserve la même valeur quel que soit le point où agit la réaction du guide; φ diffé-

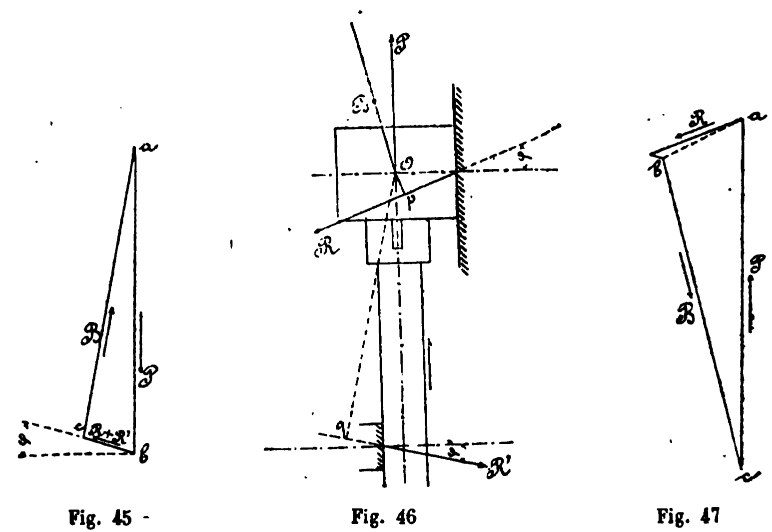


Fig. 45 — Fig. 46 — Fig. 47

rant toujours fort peu de φ', la construction de la figure 45 donne la valeur de B avec une approximation très suffisante.

Dans le mouvement ascendant du piston, cette simplification n'a plus lieu, l'état de sollicitation est celui donné par les figures 46 et 47.

Si l'on admet que le corps du piston est libre dans le cylindre, c'est-à-dire ne touche la paroi que par l'intermédiaire de garnitures, qui ont toute liberté de jouer latéralement dans leurs rainures (pistons suédois) on constate que le bourrage de la tige est soumis (fig. 44 et 46), à des efforts R' qui changent de sens à chaque course [1], et dont la grandeur varie d'après la position de la crossette, attendu que la force R varie, aussi bien que le rapport des bras de levier Op, Oq.

56. — Ajoutons, cependant, qu'il n'est pas permis dans les systèmes de l'espèce, de faire abstraction des forces d'inertie, attendu que le mouvement ne saurait être uniforme pour chacune des pièces en particulier qui les composent; ces dernières peuvent être partagées en deux catégories :

1° celles qui participent au mouvement rectiligne du piston;

2° la bielle, dont le mouvement résulte à chaque instant de la translation de son centre de gravité et de la rotation autour de ce point.

L'effet de l'inertie sur les premières pièces est de modifier la grandeur de P, et s'il existait seul, il suffirait de tracer les polygones des forces en ajoutant à P et en tenant compte de son signe, la réaction d'inertie des pièces du premier genre; quant aux forces d'inertie provenant du mouvement de la bielle, il est plus difficile d'en tenir compte; M. Massau [2] a résolu complètement cette question, nous mettrons sa méthode à profit dans une autre partie de ce cours.

57. — *Transmission par manivelle lorsque l'on tient compte de tous les frottements.* — Nous simplifierons la question en supposant, comme dans les systèmes à mouvement uniforme, que l'inertie des pièces qui changent de vitesse est négligée; nous ferons aussi abstraction du poids des pièces.

Le sens de rotation étant celui qui se trouve déterminé dans la figure 48, et la bielle étant isolée du manneton, ainsi que du tourillon fixé dans la crossette, il est facile de voir que dans le premier quadrant M_0M_1,

1. Il en est ainsi tout au moins lorsque l'articulation est comprise dans l'angle formé par les réactions R obtenues à la descente et à la montée.

2. *Annales de l'Association des Ingénieurs* sortis des Ecoles spéciales de Gand, 1891.

la ligne d'action des forces qui s'équilibrent par l'intermédiaire de la bielle ne peut être dirigée que suivant la tangente commune $t_1 t_1$, aux circonférences pointillées dont il a été question au numéro 51 ; nous ne ferons aucune distinction ici entre le rayon du tourillon, et celui de son logement dans les coussinets, ces deux quantités étant pratiquement les mêmes.

L'équilibre de la crossette exige : 1° que les forces P, B, R et R' portées bout à bout, forment un polygone fermé, 2° que

$$M_I\ (R, R') = o$$

ou

$$\frac{R'}{R} = \frac{Ip}{Iq}$$

Le point I est l'intersection des deux forces P et B, la direction de cette dernière est connue par la construction déjà indiquée. La force B une fois connue par le triangle de la figure 49, il est facile de déterminer les actions qui se développent sur le système tournant, si l'on fixe, par exemple, la direction de la résistance utile à vaincre, Q. En effet, les forces B et Q devant être équilibrées par la réaction R_1 du coussinet de l'arbre, celle-ci doit passer par leur point d'intersection I' ; d'autre part, R_1 doit être tangente à la circonférence du frottement sur l'arbre, ce qui achève de déterminer sa direction, et par conséquent sa grandeur, avec celle de Q.

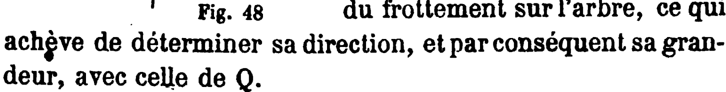


Fig. 48

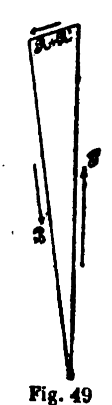


Fig. 49

Lorsque l'on tient compte du sens des forces qui se produisent dans les deux courses successives, et du changement du sens de rotation de la bielle autour de son pied pendant la révolution entière de l'arbre, on constate que la ligne

d'action prend, par rapport à l'axe géométrique de la bielle, les positions indiquées (fig. 50, 51 et 52.) Il résulte nécessairement de ces diverses

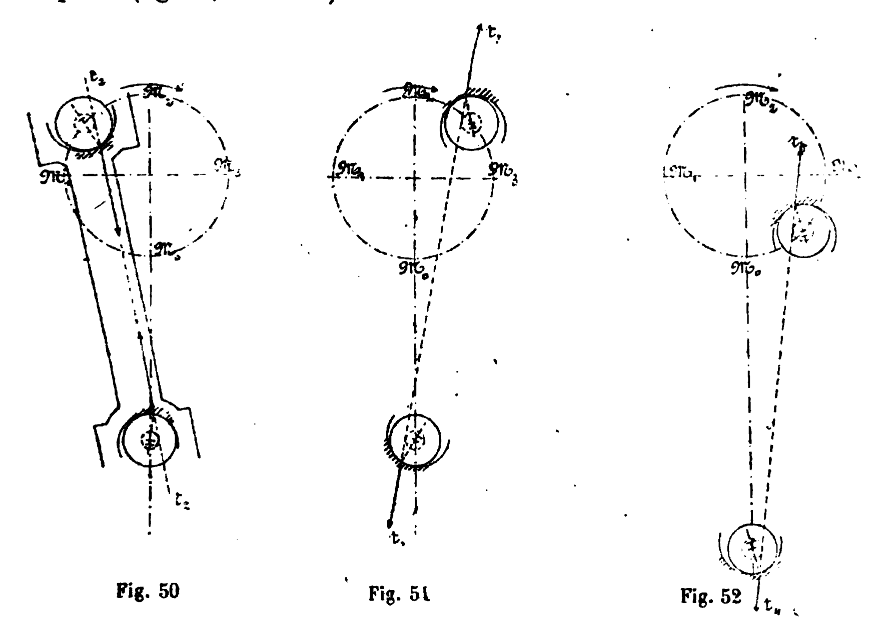


Fig. 50 Fig. 51 Fig. 52

positions de la ligne d'action, d'autant plus excentriques que les tourillons sont plus grands relativement à la longueur de la bielle, un état de sollicitation tout particulier dont il y a lieu de tenir compte pour le calcul des dimensions des bielles; les tourillons des manivelles prennent surtout de grands rayons dans le cas des arbres coudés.

58. — Le travail absorbé par le frottement des bielles sur leurs tourillons est variable à chaque instant avec les forces en jeu; remarquons d'abord que l'amplitude, très faible, du mouvement oscillatoire, permet de négliger le travail du frottement sur le tourillon de la crossette; quant au bouton de manivelle, on peut remarquer que si la bielle se déplaçait parallèlement à elle-même, et si le point de contact avec les coussinets était invariable par rapport à ceux-ci, on aurait, pour le travail élémentaire du frottement:

$$f' \mathrm{B} \rho \, d\alpha$$

B étant la force exercée par la bielle;

ρ le rayon du bouton;
$d\alpha$ l'angle décrit par l'arbre.

Toutefois, lorsque l'on tient compte du mouvement oscillatoire de la bielle, on constate qu'il a pour effet d'augmenter la vitesse de glissement dans le premier et le quatrième quadrants, et qu'il exerce un effet inverse dans l'autre demi-tour; pour une révolution entière, on obtient approximativement le travail du frottement sur le bouton par l'expression

$$2\pi f' B_m \rho$$

B_m étant la valeur moyenne de l'effort exercé par la bielle [1].

Lorsque l'arbre effectue n révolutions par minute, on obtient pour le travail résistant par seconde, exprimé en chevaux:

$$\frac{\tau_r}{75} = \frac{2\pi n}{60 \times 75} f' B_m \rho$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que ce travail est toujours proportionnel au rayon du bouton.

Applications numériques. — 1° Les machines motrices du paquebot *Servia* comportent un arbre moteur à trois coudes, on a:

$$B_m = 70{,}000 \text{ kil. environ}$$
$$\rho = 0{,}820$$
$$n = 53$$

On admet qu'avec le système de graissage employé,

$$f' = 0{,}011$$

On a donc: $\frac{\tau_r}{75} = 18{,}2$ chevaux, ou, pour les trois bielles: 54,6 chevaux.

Ce chiffre peut paraître fort élevé mais il faut remarquer qu'il s'agit ici d'un appareil qui développe plus de 10,000 chevaux, et que les tourillons des coudes ont 640 millimètres de diamètre.

1. Cette valeur moyenne devrait être calculée en prenant un certain nombre de positions équidistantes de la manivelle.

2° On a pour une machine fixe:

$$B_m = 7{,}000 \text{ kil.}$$
$$\rho = 0{,}065$$
$$n = 60$$
$$f' = 0{,}011$$

Il vient, pour le travail perdu à la tête de bielle:

$$\frac{\tau_m}{75} = 0{,}42 \text{ chevaux}$$

Les valeurs ci-dessus se rapportent a un moteur développant environ 200 chevaux.

On voit, par ces exemples, que le travail absorbé par le frottement des têtes de bielle est peu important, surtout pour les manivelles ordinaires.

59. — ***Points morts.*** — Les transmissions par bielle, lorsqu'on les suppose sans frottement, n'ont que deux positions d'arcboutement, auxquelles on donne le nom de *points morts*. On suppose bien entendu, que le système est employé pour transformer le mouvement alternatif en mouvement de rotation, car, dans le cas inverse, la commande est toujours possible.

Lorsque l'on tient compte du frottement qui se produit aux différents points de contact des pièces entre elles, on reconnaît que l'arcboutement s'étend de part et d'autre des points morts, dans une zone qu'on peut déterminer.

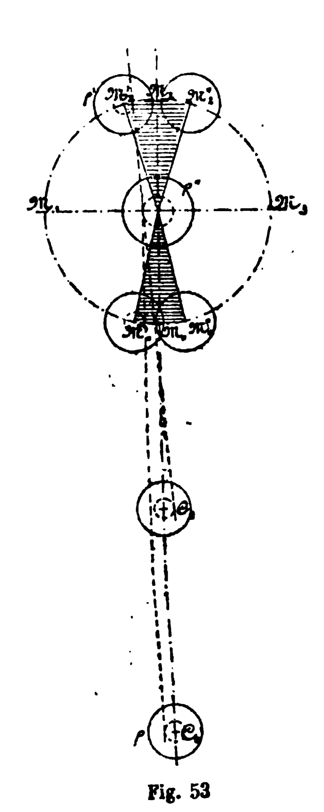


Fig. 53

Pour que le mouvement soit possible, il est nécessaire que la ligne d'action de la bielle, déterminée en tenant compte des frottements aux deux articulations, passe en dehors de la circonférence de rayon $\rho'' \sin \varphi$ qui appartient à l'arbre.

En prenant la bielle dans la position $C_0M'_0$ (fig. 53), qui correspond à la limite de la

zone d'arcboutement, on voit facilement que la ligne d'action est tangente à la fois aux trois circonférences-enveloppes ; de plus, en tenant compte de ce qui a été expliqué au n° 57, on reconnaît que la zone cherchée, $M'_0M''_0$, est symétrique par rapport au point mort géométrique M_0; la zone qui correspond au point mort supérieur est $M'_1M''_1$ elle est un peu plus étendue, et augmente la difficulté de mise en train des machines.

60. — *Arcboutement des excentriques.* — Tout ce qui contribue à augmenter les rayons des circonférences-enveloppes, a pour effet d'augmenter l'étendue des zones d'arcboutement; il faut citer, en premier lieu, l'influence du rayon du bouton de manivelle, qui peut prendre, dans les excentriques (fig. 54), une valeur très grande en comparaison du rayon d'excentricité; les circonférences $\rho' \sin \varphi$, $\rho'' \sin \varphi$ peuvent arriver à se toucher, auquel cas la zone d'arcboutement envahit toute la circonférence.

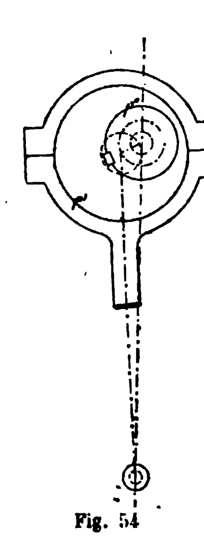


Fig. 54

Il est évident, pour cette raison, que l'excentrique ne peut être employé pour la transformation du mouvement alternatif en mouvement circulaire, et qu'il doit être réservé pour la transformation inverse ; l'importance du travail absorbé par le frottement limite l'emploi de l'excentrique au cas où l'effort à transmettre est peu considérable, comme pour la commande des distributeurs [1], des pompes alimentaires, et exceptionnellement, des pompes à air.

61. — *Coins de calage.* — Le coin permet d'obtenir une grande multiplication d'efforts sans aucune complication de mécanisme, puisqu'il suffit, pour réaliser une pression pour ainsi dire illimitée, de diminuer l'angle de ses faces; sa propriété d'être irréversible en dessous d'une certaine inclinaison le rend particulièrement propre au calage des ponts mobiles, à la fixation de certains assemblages, etc. Pendant la période d'enfoncement du coin, la force motrice P (fig. 55) est équilibrée par les réactions R, R' dirigées en sens convenable, et inclinées, sur les nor-

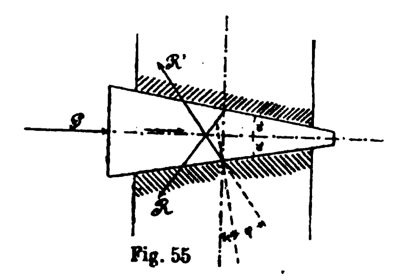


Fig. 55

1. On peut citer parmi les plus grands excentriques qui existent, ceux du paquebot Servia, dont les tourteaux ont 1m, 448 de diamètre (4'-9")

males aux deux faces, de l'angle du frottement; les directions R et R' étant connues, ainsi que leur point de concours, on peut trouver en grandeur et direction la valeur de l'effort P, supposé horizontal, que l'on doit exercer pour vaincre les réactions lorsque l'on connaît leur composante verticale N (fig. 56).

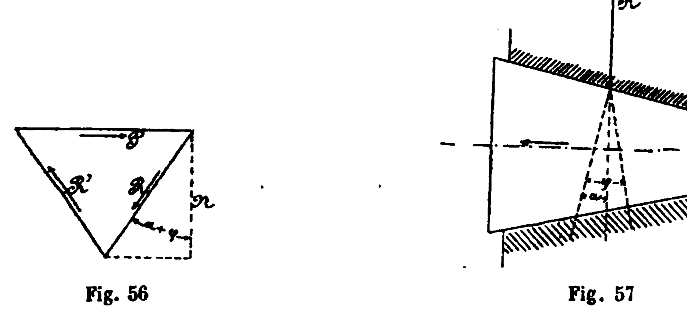


Fig. 56 Fig. 57

Lorsque le coin est abandonné à lui-même, la force verticale N qui tend à rapprocher les sabots (fig. 57), ne peut déterminer le mouvement si elle est comprise dans l'angle φ mené à partir de la normale aux points d'application, cette condition exige que l'angle 2α, du coin, soit inférieur à 2φ; il y a lieu, cependant, de se tenir pratiquement en dessous de cette limite, à cause de l'incertitude qui règne sur la valeur du coefficient de frottement.

La même observation s'applique aux clavettes de serrage employées dans les organes de machines.

Le rendement du coin employé comme appareil de levage est égal au rapport U entre le travail utile accompli

$$2\,N\,dh$$

(dh étant le déplacement de chacune des réactions N), et le travail dépensé $P ds$.

ds étant le déplacement du coin suivant son axe; or, on a (fig. 56)

$$P = 2\,N\,tg\,(\alpha + \varphi)$$

et

$$dh = ds\,tg\,\alpha$$

D'où

$$U = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varphi)}$$

Lorsque α est inférieur à φ, ce qui existe toujours dans le coin non reversible, la valeur de U est faible et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Abstraction faite de la condition d'arcboutement, le rendement U est susceptible d'un maximum qu'on obtiendrait en posant

$$\frac{dU}{d\alpha} = o$$

Cette recherche est analogue à celle du numéro 63.

62. — *Vis à filet carré.* — Admettons que la vis soit employée comme appareil de levage, c'est-à-dire qu'elle ait à vaincre une force Q dirigée suivant son axe (fig. 58), supposons en outre qu'elle se meuve dans un écrou fixe, ainsi que cela a lieu pour les vérins de levage, et que les forces motrices soient appliquées sous forme d'un couple, P*p*, ou M agissant dans un plan normal à l'axe.

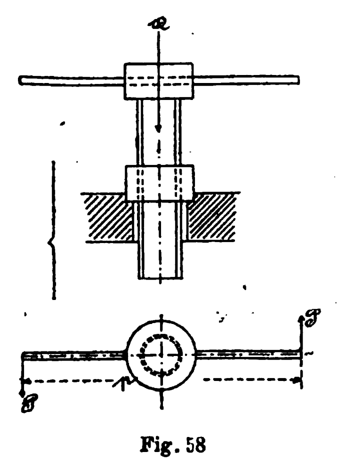


Fig. 58

Pour simplifier la question, nous ferons abstraction de la largeur du filet dans le sens du rayon, en le réduisant à l'hélice moyenne de contact; la vis isolée est soumise à l'effort Q, au couple M, et aux réactions qui se développent en chaque point de l'hélice moyenne; s'il n'y avait pas de frottement, ces réactions seraient, en chaque point, normales à l'hélice moyenne, et situées dans le plan tangent au cylindre qui la contient; l'effet du frottement est de faire naitre sur chaque élément, ds, du filet, une résistance tangentielle

$$fN\,ds$$

dirigée en sens contraire du glissement du filet de la vis sur l'écrou.

Par la nature du problème, il suffit, pour exprimer l'équilibre, et déterminer la valeur des réactions N et du moment P*p*, d'avoir recours à deux équations: l'une, d'équilibre de translation parallèlement à l'axe, l'autre, d'équilibre de moment autour du même axe; on arrive facilement à éliminer N, et à déterminer le moment inconnu M.

On peut aussi ramener l'équilibre à celui d'un corps pesant posé sur

un plan dont l'inclinaison serait celle du filet. Pour y parvenir, effectuons sur les forces des transports parallèles, et substituons aux couples, des forces d'égal moment par rapport à l'axe de la vis; si ces changements sont choisis de manière à n'altérer aucune des deux équations, l'équilibre du nouveau système exprimera en même temps celui des forces agissant réellement.

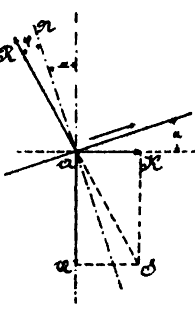


Fig. 59

Ainsi, transportons la force Q parallèlement à elle-même en un point A de l'hélice moyenne (fig. 59), substituons au moment du couple M celui de la force K, agissant dans le plan tangent au cylindre et dans une direction perpendiculaire à l'axe, la force K inconnue, étant choisie de manière à ce que

$$Kr = Pp$$

Substituons enfin, aux réactions qui agissent sur chaque élément, leur somme algébrique pour tout le filet, comme si elles étaient parallèles dans l'espace, et appliquons ces forces ou leur résultante R, au point A dans le plan tangent au cylindre.

Les seules forces Q, K et R sont situées dans le même plan, et leur équilibre entraine celui des forces réelles; la force R est connue en direction, puisqu'elle est inclinée de l'angle φ sur la normale; cette condition permet d'achever le rectangle QSK qui détermine à la fois R et K.

La figure donne

$$K = Q\, tg\, (\alpha + \varphi)$$

ou

$$Pp = Qr\, tg\, (\alpha + \varphi)$$

Le moment conserve une valeur finie pour autant que l'on ait

$$\alpha < 90^\circ - \varphi$$

La valeur de φ étant toujours très faible, on voit qu'il est généralement possible de vaincre la charge Q au moyen d'un couple de moment Pp [1],

1. Pour la vis à filet *triangulaire*, on peut procéder par le calcul; on trouve, en appelant β l'angle de la génératrice du profil avec le rayon, et en adoptant, pour le reste, les même notations que ci-dessus :

$$Pp = Qr \frac{tg\,\alpha + f \cos\alpha \sqrt{1 + tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta}}{1 - f \sin\alpha \sqrt{1 + tg^2\,\alpha + tg^2\,\beta}}$$

pour $\beta = o$, on retombe sur la formule de la vis à filet carré. Dans la série Whitworth, on a :

$$\beta = 27^\circ 30'$$

63. — *Rendement de la vis à filet carré.* — Le travail utile effectué, qui correspond au déplacement angulaire, β, de la vis, a pour expression

$$Qr\,\beta\,tg\,\alpha$$

et le travail du couple est

$$Pp\,\beta = Qr\,\beta\,tg\,(\alpha + \varphi)$$

ce qui donne pour le rendement

$$U = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varphi)}$$

cette valeur s'annule pour

$$\alpha = o$$

et pour

$$\alpha = 90^{\circ} - \varphi$$

Le maximum est fourni par

$$\frac{dU}{d\alpha} = o$$

équation qui donne :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Cette valeur α étant voisine de 45°, ne conviendrait pas à un appareil de levage, car la vis qui en résulterait n'exercerait aucun effet multiplicateur ; une autre condition est du reste généralement imposée en ce cas, c'est que le mouvement de la vis ne peut être réversible, c'est-à-dire que la force Q, agissant seule, ne doit pas déterminer le mouvement ; ce point est examiné au numéro suivant.

64. — Pour étudier les conditions de réversibilité de la vis, nous

admettrons qu'elle puisse céder à l'effort longitudinal Q; il s'agit alors de trouver le moment M capable de maintenir la vis en mouvement uniforme. Le glissement relatif ayant changé de sens, il en est de même de l'inclinaison φ sur la normale au filet, on trouve donc (fig. 60)

$$K = Q \, tg \, (\alpha - \varphi)$$

c'est-à-dire que le moment M est positif pour toute valeur

$$\alpha > \varphi$$

Fig. 60

à défaut de ce moment M, la vis cède à l'effort longitudinal; pour que l'appareil ne soit pas réversible, on doit avoir

$$\alpha \overline{\overline{<}} \varphi$$

condition qui doit toujours être réalisée dans les appareils de levage.

Application numérique. — D'après les règles en usage dans la construction des vis à filet carré, on a:

$$p = 2 + 0.09 \, d$$

$$c = \frac{1}{2} p = 1 + 0.045 \, d$$

d représente le diamètre extérieur du filet, p et c représentent le pas et le creux, respectivement; toutes ces quantités sont exprimées en millimètres.

On a donc

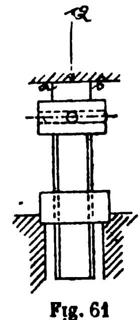
$$2r = d - c = 0.955 \, d - 1$$

$$tg \, \alpha = \frac{p}{2\pi r} = \frac{2 + 0.09 \, d}{\pi (0.955 d - 1)}$$

$tg\alpha$ augmente au fur et à mesure que d diminue, prenant par exemple $d = 30$ ce qui correspond à une vis de petit diamètre, on a

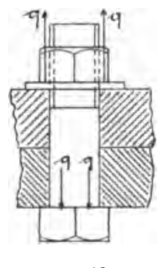
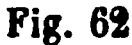
$$tg \, \alpha = 0{,}054$$

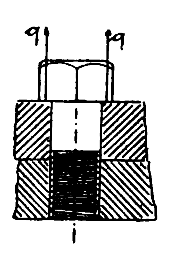
Le coefficient de frottement au repos des métaux, même lorsqu'ils sont graissés, reste au-dessus de cette valeur, on en conclut que la vis dans les conditions ordinaires n'est pas réversible.


Fig. 61

La tendance au desserrage est encore combattue, dans la plupart des cas de la pratique, par le moment résistant du frottement occasionné sur la face terminale *ab* de la vis (fig. 61), lorsque l'effort Q s'exerce par l'intermédiaire d'une face de contact *ab* plus ou moins étendue.

65. — On peut avoir à considérer aussi le cas d'une vis immobile, sur laquelle se trouverait engagé un écrou, ainsi que cela existe toujours pour les boulons de serrage (fig. 62); si l'on suppose que la base de l'écrou repose sans frottement sur une rondelle, la réaction des pièces serrées produit sur l'écrou des forces *q* ayant une résultante Q, agissant suivant son axe, et la théorie du numéro 63 peut s'appliquer



Fig. 62


Fig. 63

entièrement; en réalité, le frottement qui s'exerce sur la base de l'écrou combat la tendance au desserrage, et a pour effet d'élever la limite des inclinaisons possibles; l'emploi d'une large embase ne peut que contrarier le desserrage (49). Nous ajouterons que, dans les cas où le corps du boulon est soumis à des efforts alternatifs, comme dans les assemblages des tiges de piston, par exemple, ou lorsque les pièces sont exposées à des vibrations, il faut recourir, pour assurer la tenue de l'écrou, à des moyens spéciaux, bien connus des constructeurs mécaniciens.

Les remarques-ci-dessus s'appliquent également aux vis d'assemblage (fig. 63).

66. — ***Des engrenages.*** — Nous supposons connues les diverses méthodes employées pour le tracé des engrenages; les axes O et O' étant donnés, ainsi que les vitesses angulaires ω et ω', on sait que si r et r' désignent les rayons des cercles primitifs,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

ce qui permet de déterminer le point M (fig. 64); σ étant le profil adapté à la roue O, et Σ celui adapté à la roue O', C le point de contact des deux dents, la ligne MC est normale aux deux profils en leur point de contact.

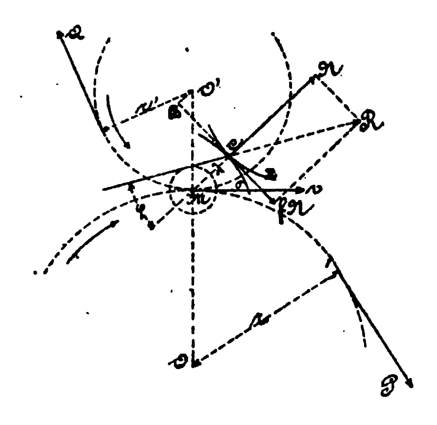


Fig. 64

Le mouvement relatif des deux roues peut s'obtenir en rendant fixe la roue O, et en faisant rouler la roue O' sur celle-ci, de manière que leur point de contact M se meuve vers la gauche avec la vitesse ωr; de cette manière la dent σ est fixe, et le profil Σ se déplace en restant tangent à σ; ce déplacement résulte à la fois du roulement des deux courbes l'une sur l'autre, et de leur glissement relatif suivant la tangente; la vitesse v_g du glissement est donnée par

$$v_g = \Omega\lambda$$

Ω étant la vitesse angulaire du système roulant O' et λ la grandeur de la normale CM pour la position considérée.

Ω se déduit facilement de la vitesse des roues, on a pour les engrenages extérieurs :

$$\Omega = \omega + \omega', \; v_g = (\omega + \omega')\,\lambda$$

tandis que l'on a pour des roues intérieures,

$$\Omega = \omega' - \omega, \; v_g = (\omega' - \omega)\,\lambda$$

ω' se rapportant à la petite roue.

Et pour un pignon engrenant avec une crémaillère :

$$\Omega = \omega', \; v_g = \omega'\,\lambda$$

Lorsque les dents sont appliquées l'une sur l'autre par une certaine pression provenant de l'application des forces extérieures, le glissement entraîne du frottement, tandis que la résistance au roulement, toujours très faible, peut être négligée.

67. — Pour déterminer l'état de sollicitation de chacune des roues, nous remarquerons que la réaction au point de contact C, au lieu d'être dirigée suivant la normale CM, fait avec celle-ci l'angle φ du frottement ; le sens dans lequel il faut porter l'angle φ, dépend du sens du mouvement. Nous négligerons d'abord le frottement des arbres O et O' sur leurs supports.

Pour achever de résoudre le problème, on peut employer diverses méthodes :

1° On peut écrire l'équation d'équilibre du système O', la force R sera, pour plus de facilité, remplacée par ses deux composantes : N et fN ; on écrira ensuite l'équation d'équilibre du système O ; l'élimination de N entre les deux équations fournira la relation cherchée entre P et Q.

2° On peut écrire l'équation des travaux virtuels pour l'ensemble du système ; soit v la vitesse linéaire du point de contact M, on a évidemment, pour les engrenages extérieurs :

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega' = \frac{v}{r'}$$

$$v_g = v\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\lambda$$

L'équation des travaux virtuels donne, après simplification :

$$P = Q + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \lambda N$$

Pour éliminer N, il est encore nécessaire de recourir à une équation d'équilibre, celle du système O', par exemple ; on a, en désignant l'angle O'MC par α, et faisant O'B $= p$

$$N = \frac{r'}{r' \sin \alpha + fp} Q$$
$$p = r' \cos \alpha - \lambda$$

α et λ peuvent être liés par une relation géométrique (tracé épicycloïdal) ou rester indépendants (tracé en développante) ; quoiqu'il en soit leurs valeurs peuvent être déterminées pour chaque position du point C.

On sait que, pour le tracé épicycloïdal à flancs droits, $p = o$; cette condition, introduite dans les équations, donne :

$$P = Q + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{\lambda}{\sin \alpha} Q$$

La valeur de P varie à chaque instant ; si on veut trouver le travail de cette force pour un certain déplacement du point M, on devra écrire

$$\int_{s_0}^{s_1} P ds = Q(s_1 - s_0) + f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) Q \int_{s_0}^{s_1} \frac{\lambda}{\sin \alpha} ds$$

Pour obtenir la valeur du dernier terme, il est nécessaire d'exprimer λ et α en fonction de s.

On se contente d'une solution approchée, qui consiste à chercher la valeur moyenne de P en supposant que le contact commence à la ligne des centres, on sait qu'il se termine généralement à une distance égale au pas ; on attribue à λ une valeur constante égale à la moitié du pas, et α étant voisin de 90°, on fait $\sin \alpha = 1$. On a du reste, si m et m' désignent les nombres de dents des roues O et O', et si a représente le pas :

$$2\pi r = ma$$
$$2\pi r' = m'a$$

et l'on fait

$$\lambda = \frac{a}{2}$$

ce qui donne finalement:

$$P = Q + \pi f Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \tag{1}$$

Telle est la formule usuelle qui donne la valeur P en fonction de Q, en négligeant toute résistance autre que le frottement des dents; elle nous apprend que le terme additionnel dû à ce frottement, diminue au fur et à mesure que m et m' augmentent, c'est-à-dire que les dentures deviennent plus fines.

On trouverait facilement, pour les roues qui engrènent intérieurement:

$$P = Q + \pi f Q \left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right) \tag{2}$$

et pour les crémaillères:

$$P = Q + \pi f Q \frac{1}{m'} \tag{3}$$

Enfin, on applique aussi la formule (1), au cas des roues coniques, m et m' représentent alors les nombres de dents qui entreraient dans les circonférences de rayon OS et O'S, respectivement (fig. 65).

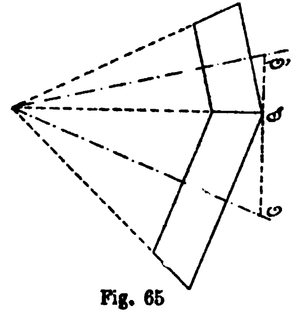
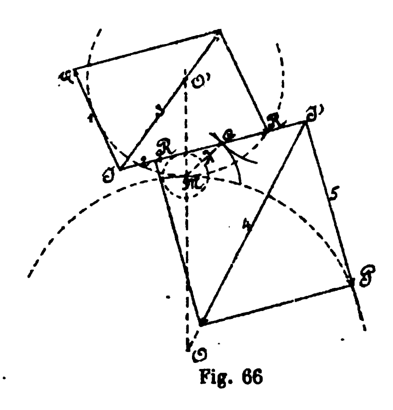


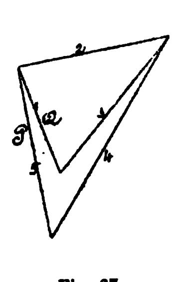
Fig. 65

Le tracé épicycloïdal n'est employé que pour des roues de grand rayon, à denture peu fatiguée, le tracé en développante ou la méthode de Willis, sont préférables dans la plupart des cas; néanmoins, on peut encore, avec une approximation suffisante, adopter les formules ci-dessus pour ces divers tracés; il faut observer, en effet que le contact ayant toujours lieu dans le voisinage de la ligne des centres, la pression normale qui engendre le frottement est à peu près égale à l'effort Q.

En réalité, l'effort est exercé par plusieurs dents qui agissent simultanément, la manière suivant laquelle il se partage entre les dents en prise, dépend du degré de précision que présentent les dentures, mais on conçoit que le travail des résistances reste à peu près le même que dans l'hypothèse admise.

3° Enfin, on peut trouver, par un moyen graphique, la grandeur de la force P : considérons d'abord le système O' (fig. 66) ; la direction de


Fig. 66

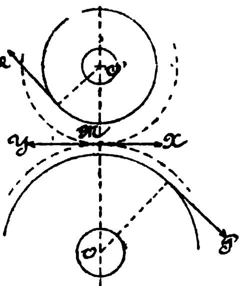

Fig. 67

la force R est connue, elle reste tangente, quelle que soit la position du point C, à une circonférence décrite du point M, et dont le rayon est

$$\lambda \sin \varphi$$

On achève facilement le parallélogramme qui donne P ; on peut aussi opérer au moyen de tracés polygonaux (fig. 67).

68. — Pour tenir compte du frottement des arbres sur leurs coussinets, on adopte une solution approchée : on cherche l'effort moteur X qu'il serait nécessaire d'appliquer au point M de la roue O', pour entraîner la résistance Q ainsi que les résistances passives (fig. 68) [1].


Fig. 68

Soit ρ' le rayon du tourillon,

f_1 son coefficient de frottement sur les coussinets,

R' la réaction totale sur le tourillon.

L'équation d'équilibre autour de O' donne :

$$(a) \qquad Xr' = Qr' + f_1' \rho' R'$$

1. L'arbre comporte nécessairement deux tourillons, mais nous admettrons toujours, à moins de supposition contraire, qu'ils sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen de la roue ; les réactions des coussinets étant égales et parallèles, on peut les ajouter, et il en est de même de leurs moments, si donc les tourillons sont de même diamètre, on pourra considérer le système comme n'ayant qu'un seul tourillon dont le plan moyen coïncide avec celui des forces sollicitantes, et qui reçoit la réaction totale.

Les deux équations de projection permettraient d'exprimer la réaction R' (qui n'est autre chose que la résultante des forces Q, X) en fonction des composantes de ces forces suivant deux axes.

On considère ensuite l'effort moteur X comme amenant sur le système O une réaction Y, donnée par la formule (1)

$$(b) \qquad Y = X + \pi f X \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$$

Enfin, la condition d'équilibre du système O autour de son axe donne, en appelant ρ le rayon du tourillon, et R la réaction totale des coussinets

$$(c) \qquad Pr = Yr + f_1' \rho R$$

R s'exprime facilement en fonction des composantes de P et de Y.

L'élimination de X et Y entre les trois équations (*a*) (*b*) (*c*), donne la valeur cherchée.

Cette solution n'est qu'approchée, attendu qu'en appliquant au point M la force X, inconnue, qui doit entraîner la roue O', nous substituons, à la réaction totale des dents en contact, une force qui en diffère un peu ; la même observation s'applique au système O.

69. — D'une manière générale, il convient de remarquer que la position de toute force motrice agissant sur un système soumis à un frottement, influe sur la grandeur même de la force, attendu que cette position détermine la valeur de la réaction sur les supports, et par conséquent l'importance du frottement.

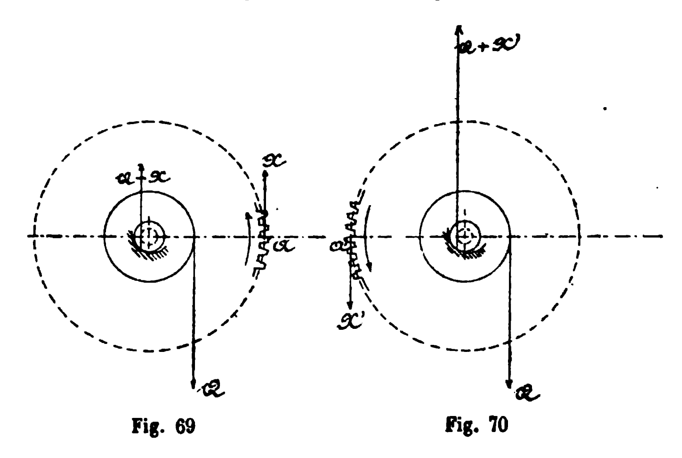


Fig. 69 Fig. 70

On peut mettre cette propriété à profit pour réduire les résistances passives, lorsque la disposition de certains organes est arbitraire; ainsi, le treuil à engrenage (fig. 69), peut être actionné par un pignon placé en A, c'est-à-dire du même côté que la résistance Q : dans ce cas, la réaction sur le tourillon est nécessairement égale à Q — X ; si, au contraire, on fait agir le pignon au point A' (fig. 70), c'est-à-dire du côté opposé à la résistance, la réaction totale sur le tourillon de l'arbre principal est égale à Q + X' ; la première disposition est donc préférable.

70. — On peut, en employant le procédé graphique indiqué au numéro 67 — 3°, tenir compte du frottement des tourillons, et l'on obtient alors une solution exacte du problème ; le point de contact des dents en prise étant en C (fig. 71), on trace, autour de M, la circonférence

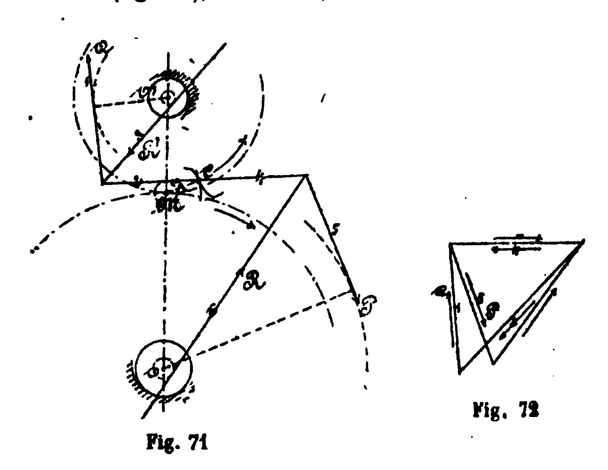


Fig. 71

Fig. 72

enveloppe de la réaction ; on trace de même autour de O' et de O les circonférences enveloppes des forces R et R' ; la construction s'achève par les moyens ordinaires, la force P est donnée par le côté 5 du polygone des forces.

Quel que soit le tracé adopté, le contact commence à une certaine distance au delà de la ligne des centres, il faut, pour que le mouvement soit possible, que la réaction des dents reste en dehors des circonférences enveloppes O, O' ; pour des roues à dents épicycloïdales tournant dans le sens des flèches (fig. 73), le contact commence à gauche de la ligne des centres au point C ; la réaction de la dent en ce point peut se rapprocher beaucoup de la circonférence enveloppe tracée autour de

O', et il en résulte une valeur très grande de P, (fig. 74). En diminuant le rayon de O' tout en conservant le même pas, on produirait l'arcboutement ; on a soin de se tenir aussi loin que possible de cette limite, en

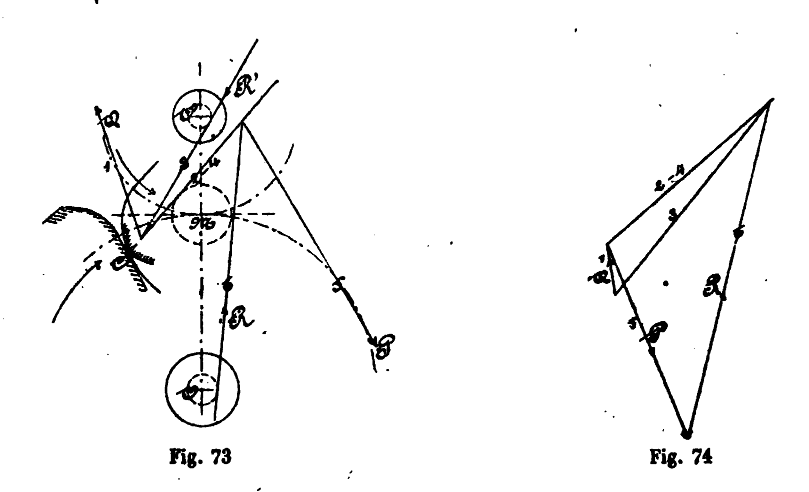


Fig. 73 Fig. 74

adoptant pour le pas une valeur assez faible ; pour un effort circonférentiel donné, la largeur des dents suivant la génératrice augmente lorsque l'épaisseur diminue, ce qui explique les difficultés que l'on peut avoir à transmettre au moyen de roues de petit diamètre un effort considérable.

L'emploi des dents à chevrons permet de réaliser une grande résistance sans augmenter le pas ; au point de vue du frottement, l'étude de l'engrenage à chevrons se ramène au cas ordinaire, car on peut le décomposer, par des plans perpendiculaires à l'axe, en une série de roues très minces.

71. — Lorsque la vitesse angulaire des arbres n'est pas imposée et qu'il s'agit simplement de transmettre une *puissance donnée*, on peut diminuer la valeur de l'effort circonférentiel par une augmentation des nombres de tours, ou bien, si l'on peut écarter les axes, il est encore possible, en adoptant des rayons plus grands, d'arriver au même résultat. Les deux moyens peuvent être employés simultanément, ils reviennent tous deux à augmenter la vitesse de roulement des circonférences primitives. Cependant le fonctionnement des engrenages donne toujours

lieu à des vibrations qui augmentent avec la vitesse, il est bon de se tenir à cet égard entre les limites que l'expérience a indiquées [1].

72. — *De la vis tangente.* — Lorsque le rapport des vitesses à réaliser est très grand, les inconvénients signalés au numéro 70 obligent à employer des arbres intermédiaires ; il peut du reste arriver que les axes, au lieu d'être parallèles, soient perpendiculaires en direction, on emploie alors la vis tangente ; admettons que le profil du filet se compose (fig. 75) d'une partie droite *b*M, et de l'arc M*c*, appartenant à la cycloïde décrite par la circonférence sous double de la roue ; on sait que le profil de la dent se compose du rayon *c'*M, et d'un arc M*b'* de la développante de la circonférence primitive de la roue. On voit que le contact dans le plan de la figure, qui est celui mené par l'axe de la vis perpendiculairement à l'arbre de la roue, commence au point *a*, sur la

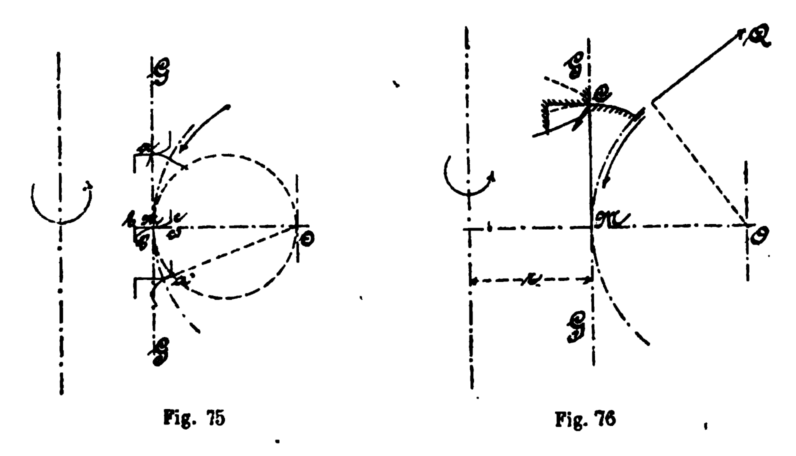


Fig. 75 Fig. 76

génératrice du cylindre moyen, se déplace sur *a*M, et suit alors la circonférence sous-double jusqu'au point *a'*. La zone de contact M*a'* peut être supprimée, il suffit, pour cela, de limiter le filet à la génératrice GG ; les flancs droits de la roue n'existent plus, et l'on évite le déforcement des dents à la racine ; admettons ce mode de tracé, et supposons qu'une seule dent soit attaquée par le filet (fig. 76). Il s'agit de déterminer, en

1. On cite comme exemple d'une très grande vitesse, celui d'un volant denté établi par la maison Corliss, tournant à 50 révolutions par minute, et dont le diamètre primitif est de 9^{m}, 144 (30 pieds), ces données portent la vitesse au chiffre de 24 mètres par seconde, valeur rarement atteinte, même dans les transmissions par courroies. Engineering 1888 1er sem. p. 285.

admettant d'abord que les tourillons ne donnent lieu à aucun frottement, la valeur de l'effort P à appliquer à la vis dans le plan tangent au cylindre GG, et perpendiculairement à son axe, pour vaincre la résistance Q; le glissement qui s'opère entre les deux organes au point C, donne lieu à une résistance qui augmente la valeur de P.

Désignons par :

α, l'angle de l'hélice de contact sur la section droite de la vis;

r, le rayon du cylindre contenant cette hélice;

ω, la vitesse de rotation de la vis;

λ, la normale MC, comprise entre le centre instantané M, et le point de contact C pour la position considérée;

r', le rayon primitif de la roue;

ω', la vitesse angulaire de la roue.

Pour la vitesse angulaire ω, imprimée à la vis, tout point situé à la distance r est animé perpendiculairement à l'axe, d'une vitesse

$$r\omega$$

et le point C, situé à l'intersection de l'hélice avec le plan de la figure est animé suivant la droite CM, d'une vitesse

$$r\omega \operatorname{tg} \alpha$$

cette vitesse est aussi celle de la circonférence primitive de la roue; on a donc :

$$(1) \qquad r'\omega' = r\omega \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\omega' = \frac{r}{r'} \omega \operatorname{tg} \alpha$$

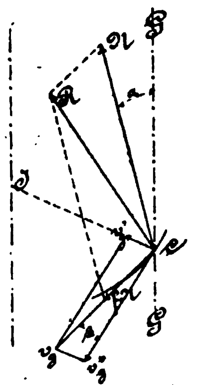


Fig. 77

Le glissement de la dent sur la génératrice CI du filet, (fig. 77), s'opère avec une vitesse

$$v'_g = \lambda\omega' = \frac{r}{r'} \lambda\omega \operatorname{tg} \alpha$$

tandis que l'hélice glisse en même temps suivant sa direction, et est animée d'une vitesse constante v''_g, par rapport au point M.

On a :

$$v''_g = \frac{\omega r}{\cos\ \alpha}$$

La vitesse de glissement totale est la résultante des vitesses v'_g et v''_g.

Il importe de ne pas se tromper sur le sens de ces vitesses, et pour cela, il faut n'avoir égard qu'au mouvement relatif des deux organes l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire l'un des deux étant considéré comme fixe : la vis, par exemple ; la vitesse v'_g doit alors être prise de C vers I et la vitesse v''_g doit être prise en sens contraire du mouvement de la vis. La résultante v_g coïncide avec la direction du glissement relatif total, et détermine la direction de la composante de frottement fN ; la composante normale de la réaction, perpendiculaire aux surfaces en contact, est dirigée suivant CN, et fait avec la génératrice GG l'angle α (comme dans la vis simple), CN est dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice GG.

On a pour l'ensemble du système, d'après le principe du travail virtuel :

$$P\omega\ r\ dt = Q\omega'\ r'\ dt + fN\ v_g\ dt$$

ou, puisque :

$$v_g = \frac{v''_g}{\cos\ \beta} = \frac{\omega r}{\cos\alpha\cos\beta}$$

et à cause de l'équation (1) :

$$(2) \qquad P = Q\ tg\,\alpha + \frac{fN}{\cos\alpha\ \ \cos\beta}$$

L'équation d'équilibre de la vis autour de son axe donne, d'autre part, après simplification :

$$P = N \sin\ \alpha + fN \cos\beta \cos\alpha$$

d'où

$$(3) \qquad N = \frac{P}{\sin\ \alpha + f\ \cos\ \beta \cos\ \alpha}$$

L'élimination de N entre les équations (2) et (3) donne :

$$P = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha - f \frac{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}} \tag{4}$$

La valeur de $\cos \beta$ qui figure dans l'équation dépend nécessairement de la grandeur relative des composantes v'_g, v''_g ; on a d'ailleurs

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}}$$

$$tg\, \beta = \frac{v'_g}{v''_g} = \frac{\lambda}{r'} \sin \alpha$$

d'où

$$\cos \beta = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + \lambda^2 \sin^2 \alpha}}. \tag{5}$$

On peut attribuer à λ la valeur moyenne correspondant à la moitié du pas, et trouver une formule approchée qui suffit pour tous les besoins de la pratique ; on se contente souvent d'une approximation plus grossière, en remarquant que $\lambda \sin \alpha$ étant faible en comparaison de r', on a sensiblement

$$\cos \beta = 1$$

ce qui donne

$$P = Q \frac{f + tg\, \alpha}{1 - f\, tg\, \alpha} = Q\, tg\, (\alpha + \varphi)$$

il existe donc entre Q et P la même relation que celle trouvée pour la vis entre K et Q au numéro 62.

L'hypothèse

$$\cos \beta = 1$$

revient à faire abstraction de la vitesse de glissement transversale v'_g

pour ne tenir compte que de la composante v''_g; dans ce cas, la roue joue, par rapport à la vis, le rôle d'un écrou ordinaire. Cette assimilation est surtout permise dans le cas où le pas est modéré, et où le rayon r' est assez grand, et l'on voit que la vis ne pourrait être commandée par la roue, qu'à la condition d'avoir, comme au numéro 64,



$$\alpha > \varphi$$

73. — *Rendement de la vis tangente.* — Lorsque l'on néglige le glissement transversal, ainsi que le frottement des tourillons, on a comme pour la vis, (numéro 63) :

$$U = \frac{tg\ \alpha}{tg\ (\alpha + \varphi)}$$

Lorsque l'appareil ne peut être réversible, on a forcément

$$\alpha < \varphi$$

c'est-à-dire une valeur assez faible, et le rendement s'abaisse en conséquence. Si, au contraire, le mécanisme est employé comme organe de transmission de mouvement, et si le rapport des vitesses de rotation permet d'adopter une valeur de α plus élevée, le rendement s'élève et atteint son maximum lorsque

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Cette inclinaison de filet étant à peu près égale à 45 degrés, le rapport des vitesses angulaires de la vis et de l'engrenage est sensiblement le même que celui de deux roues droites qui seraient montées sur des axes parallèles situés à la même distance que dans l'appareil considéré; pour atteindre cette inclinaison, il est du reste nécessaire d'employer des vis à filet multiple, ou *à plusieurs entrées.*

74. — Pour tenir compte du frottement sur les tourillons, on applique la méthode exposée au numéro 68 pour les engrenages ordinaires, c'est-à-dire qu'on pose, pour chacun des arbres, une équation d'équilibre

en appliquant à la roue au point M (fig. 78), un effort X, inconnu, provenant de l'action du filet de la vis ; on applique de même à la vis un effort horizontal Y, constituant pour ce système la résistance occasionnée par la roue, on obtient ainsi deux équations renfermant X Y et P ; on admet en outre que X et Y sont liés par la relation (4) qui existe entre les forces P et Q du numéro 72.

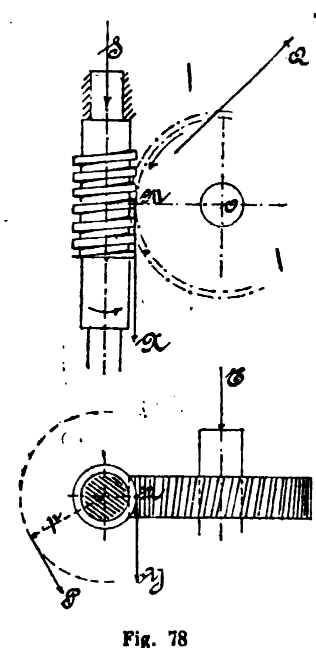


Fig. 78

L'évaluation des moments des frottements sur les tourillons ne saurait donner lieu à aucune difficulté ; on remarquera seulement que les forces N, fN n'étant, pour aucun des deux organes, situées dans un plan perpendiculaire à l'axe, il en résulte, pour les arbres, des poussées longitudinales qui produisent du frottement sur leurs épaulements ; la position des forces N, fN, a aussi une certaine influence sur la grandeur des réactions s'exerçant au pourtour des tourillons.

On aura, très approximativement, pour la poussée S, suivant l'axe de la vis :

$$S = N \cos \alpha - f N \cos \beta \sin \alpha$$

et l'on fera

$$N = \frac{Y}{\sin \alpha + f \cos \beta \cos \alpha}$$

en remarquant que Y remplace ici la force P dans la formule (3)

La poussée T, suivant l'axe de la roue est :

$$T = N \sin \alpha + f N \cos \beta \cos \alpha$$

75. — *Expériences de William Sellers* [1]. — On doit à ce constructeur une série d'expériences très importantes, établies dans le but de

1. *Engineering*, 1886 - 1er sem. p. 285-363-581.

déterminer le rendement comparé des engrenages droits et de l'engrenage avec vis tangente, le filet étant incliné sous un angle α qui a varié depuis 5° jusqu'à 45°.

Le travail transmis au premier arbre était mesuré très exactement au moyen d'un dynamomètre, le travail résistant était produit et évalué à l'aide d'un frein ; le rapport des deux travaux donne le rendement eu égard à toutes les résistances passives ; on a d'abord remarqué que pour chaque valeur de α, le rendement augmente avec la vitesse. Il ne faut voir dans ce résultat que l'une des nombreuses exceptions à la loi du frottement, analogue à celles du numéro 28, car, bien que les parties frottantes aient tourné dans un bain d'huile, les surfaces de contact étaient très réduites en comparaison des pressions transmises, de même que dans les roues de wagon qui patinent.

Les expérimentateurs ont constaté que, pour la même vitesse, le rendement s'élève au fur et à mesure que α augmente, ainsi qu'on le voit par le tableau suivant :

α	NOMBRE DE FILETS	NOMBRE DE TOURS par minute	U
5°	1	200	0.75
7	1	»	0.81
10	1	»	0.86
15	2	»	0.90
20	3	»	0.92
30	4	»	0.95
45	6	»	0.965

Pour des roues droites, le rendement a atteint 0,98 ; en tenant compte du frottement sur les arbres, on voit que la résistance des dents est à peu près négligeable, les roues étaient taillées, et avaient respectivement 12 et 39 dents.

§ II.

Systèmes dans lesquels se produit la résistance au roulement.

76. — *Rouleaux ou galets libres.* — Afin de diminuer l'effort nécessaire pour déplacer une pièce lourde, on fait parfois usage de rouleaux (fig. 79); on emploie les galets dans des circonstances analogues, pour diminuer la résistance au mouvement.

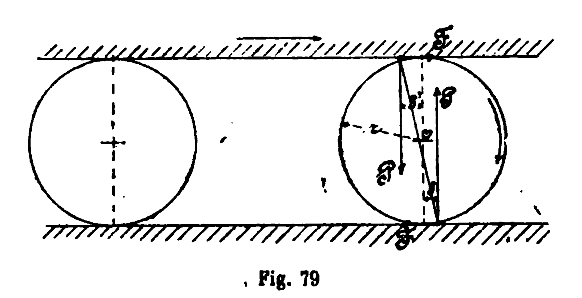


Fig. 79

Chacun des rouleaux peut être isolé, et, lorsque le mouvement est uniforme, les forces sollicitantes se font équilibre, on doit donc avoir

$$F = P\left(\frac{\delta + \delta'}{2r}\right)$$

F est l'effort de traction correspondant à la charge P portée par l'un des rouleaux. On aurait une équation semblable pour chacun des rouleaux considérés, on peut donc écrire :

$$\Sigma F = \frac{\delta + \delta'}{2r} \Sigma P.$$

Les valeurs δ, δ' dépendent de la nature des surfaces en contact, et sont données au numéro 36 ; le poids des rouleaux est négligé.

Exemple : Supposons que la pièce à déplacer présente une surface

de roulement en chêne brut, et repose, par l'intermédiaire de galets en fonte, sur des rails saillants en fer; prenons

$$\Sigma P = 1000 \text{ kil.}$$
$$r = 0.15$$
$$\delta = 0.0012$$
$$\delta' = 0.0102$$

on trouve

$$\Sigma F = 38 \text{ kil.}$$

Il est nécessaire que les axes des rouleaux soient parallèles, sinon la résistance peut être augmentée par les glissements.

77. — Lorsque les surfaces de roulement sont courbes (grues tournantes), les valeurs de δ sont probablement altérées, mais à défaut d'expériences, et surtout si la courbure est faible en comparaison de celle des galets, on peut prendre les mêmes valeurs que pour des surfaces planes. Dans ce cas, les galets sont nombreux et rapprochés, on peut admettre sans grande erreur que les deux galets entre lesquels est

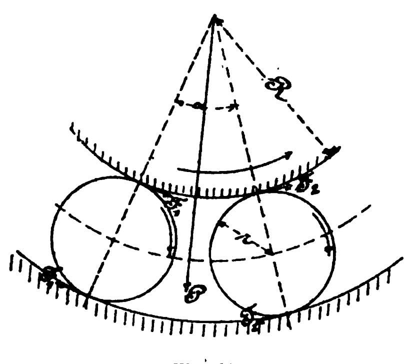


Fig. 80

située la force P, supportent seuls la réaction due à cette force; en désignant par P_1 et P_2 ces réactions, on aura, respectivement, pour chacun des galets (fig. 80):

$$F_1 = \frac{\delta + \delta'}{2r} P_1$$

$$F_2 = \frac{\delta + \delta'}{2r} P_2$$

Et pour l'ensemble des moments résistants par rapport à l'axe de rotation de l'arbre :

$$(F_1 + F_2) R = (\delta + \delta') \frac{R}{2r} (P_1 + P_2)$$

La somme $P_1 + P_2$ est égale à P lorsque cette force passe par le centre de l'un des galets, elle augmente et devient maxima lorsque la force est bissectrice de l'angle α. On a alors

$$P_1 + P_2 = \frac{P}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

valeur qui, toutefois, ne s'écarte pas beaucoup de P.

Ce calcul n'est qu'approximatif, car les valeurs de P_1 et P_2 sont obtenues comme si le système ne subissait aucune déformation, et en supposan que les forces F_1 et F_2 n'existent pas.

Les galets ou les rouleaux peuvent être employés pour des opérations temporaires, dans ce cas, on ne prend aucune précaution pour empêcher leur déplacement accidentel; lorsqu'ils font partie intégrante d'un mécanisme, on a soin, au contraire, de maintenir le parallélisme de leurs axes au moyen de bandes dans lesquelles leurs pivots sont engagés. On peut citer comme principaux exemples de l'emploi des galets: les chariots de dilatation des poutres de ponts, les chariots de roulement à galets coniques employés dans certains ponts tournants, ainsi que les tourelles des forts et des navires cuirassés, les pivots des poulies de gréement, la suspension des cloches lourdes.

78. — Les galets se déplacent par rapport à la plate-forme roulante, ils ne peuvent donc servir que pour des mouvements circulaires, ou pour des mouvements rectilignes de peu d'amplitude, aussi les véhicules ordinaires sont toujours munis de roues dont l'*axe de rotation* est fixe par rapport à la caisse; le mot *axe de rotation* est pris ici dans son sens géométrique, c'est-à-dire abstraction faite du dispositif qui sert à assurer la fixité, et qui varie suivant les circonstances ; ainsi, dans les véhicules circulant sur chaussées, et qui doivent passer dans des courbes de faible rayon, les mouvements des deux roues d'un même essieu sont indépendants, les moyeux frottent intérieurement sur les fusées fixes de l'essieu;

la force motrice est dirigée de manière à orienter le mouvement dans le sens voulu.

Pour les wagons roulant sur les voies ferrées, les roues sont calées deux à deux sur un même essieu, et la caisse repose sur les fusées de celui-ci par l'intermédiaire de coussinets fixes; il est clair que, dans les deux cas, l'axe de rotation est fixe par rapport au véhicule. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les deux roues appartenant à un même essieu, sont concentrées dans le plan de symétrie qui renferme le centre de gravité des poids à transporter, ainsi que l'effort de traction; nous négligeons, pour plus de simplicité, le poids mort des roues, et nous supposons que, dans chaque cas, la force verticale P est déterminée, en grandeur et en position, en tenant compte du poids de la caisse.

79. — *Véhicule en équilibre sur un seul essieu.* — Lorsque les fusées sont fixes dans le moyeu (fig. 81), la résultante de la charge P et de l'effort de traction F doit passer tangentiellement à la circonférence-

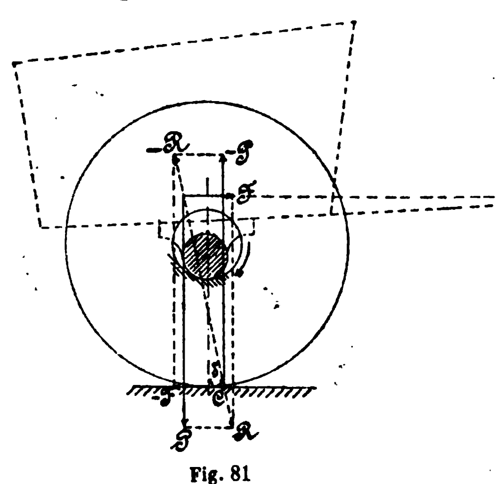


Fig. 81

enveloppe se rapportant au moyeu; le poids de la roue étant négligé, cette résultante R doit être équilibrée par la réaction qui s'exerce au point C sur la roue, et dont les composantes suivant la verticale et l'horizontale sont donc — P et — F respectivement; puisque, au surplus, la réaction — R doit coïncider avec R, celle-ci doit être tangente à la circonférence-enveloppe du moyeu, circonférence dont le rayon est $f'\rho$.

ρ est le rayon intérieur du moyeu.

On a pour les forces appliquées en C, à la roue:

$$R f' \rho = Fr - P\delta$$

ou

$$(1) \qquad f' \rho \sqrt{P^2 + F^2} = Fr - P\delta$$

qui permet de trouver F en fonction de P.

On peut simplifier la résolution de l'équation, et obtenir néanmoins une approximation suffisante pour tous les besoins de la pratique, en substituant au radical l'expression linéaire de Poncelet [1]:

$$\alpha P + \beta F$$

L'ordre des grandeurs relatives P et F ne laissant ici aucun doute, on fera

$$\alpha = 0.96$$
$$\beta = 0.4$$

et il en résulte:

$$F = \frac{\delta + 0.96 f' \rho}{r - 0.4 f' \rho} P$$

La même formule est applicable au cas où la caisse repose par des coussinets fixes sur les fusées d'un essieu mobile avec les roues (fig. 82), ρ désigne alors le rayon des fusées.

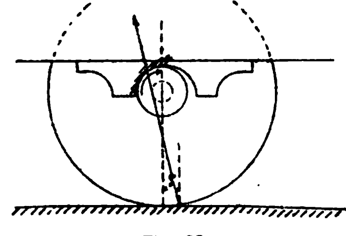


Fig. 82

On peut encore, en remarquant que F^2 est négligeable à côté de P^2, dans l'équation (1) se contenter de la valeur approchée:

$$(2) \qquad F = f' \frac{\rho}{r} P + P \frac{\delta}{r}$$

1. On emploie fréquemment ce mode de résolution dans les problèmes de mécanique appliquée chaque fois que, dans les équations, figure une réaction à exprimer en fonction de ses deux composantes rectangulaires, c'est-à-dire qu'on pose:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \alpha X + \beta Y$$

On prend $\alpha = \beta = 0,83$ lorsque l'ordre de grandeur de X et Y n'est pas connu, dans ce cas, l'approximation est d'environ $\frac{1}{6}$. Dans le cas particulier où l'on sait que $X > Y$, on pose $\alpha = 0,96$, $\beta = 0,4$

et le résultat est exact à moins de $\frac{1}{25}$ près.

le premier terme provient du frottement de la fusée, le second est la résistance au roulement proprement dite, et peut s'évaluer en prenant pour δ les valeurs données aux numéros 36, 40 et 41.

80. — L'équilibre indiqué est nécessaire lorsqu'on veut éviter toute action verticale sur l'attelage, mais il ne peut être obtenu que par tâtonnements, et il est du reste instable, car tout changement accidentel dans la valeur de δ obligerait à déplacer la charge P. Lorsque le point de rencontre des forces P et F ne se trouve pas situé sur la ligne menée du point C tangentiellement à la circonférence-enveloppe, l'équilibre ne peut être obtenu qu'en faisant porter par le cheval une composante p de la réaction due au poids P. On a alors par une équation de moments (fig. 83)

$$p = \frac{ab}{bd} P$$

ce qui permet d'achever le polygone des forces, et de trouver F (fig.84).

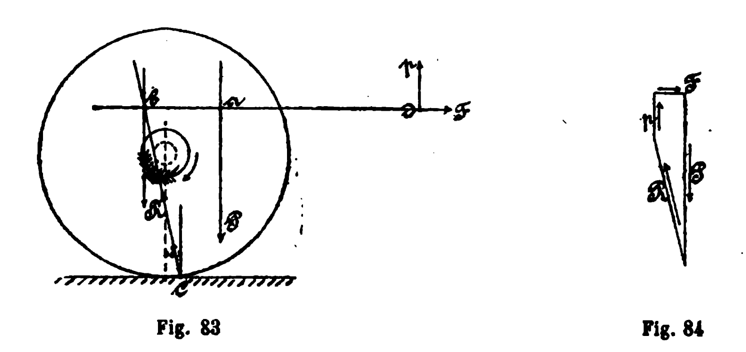


Fig. 83

Fig. 84

Dans l'attelage des bêtes de somme, il est bon de répartir la charge de manière à obtenir une certaine valeur de p; en aucun cas, la charge ne pourrait être appliquée à gauche du point b, car l'animal tendrait à être soulevé, et serait dans des conditions mauvaises pour prendre appui sur le sol.

81. — *Chariot à deux essieux.* — Les points d'application de R et R' (fig. 85) étant connus par les distances δ et δ', on peut obtenir, dans

le polygone des forces, les directions R et R' des réactions (fig. 86); les côtés p et p' se déterminent par les conditions

$$p + p' = P$$
$$\frac{p}{p'} = \frac{ad}{ab}$$

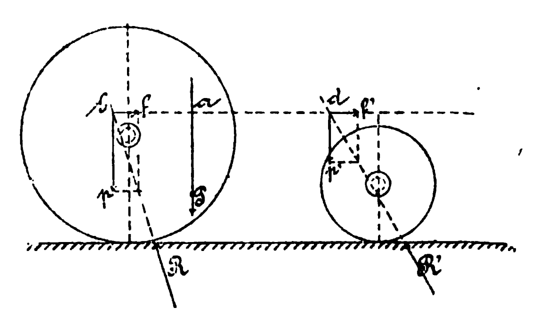


Fig. 85

Fig. 86

L'effort de traction est fourni par le côté horizontal du polygone des forces.

On remarquera qu'il y a avantage à faire porter la charge sur la grande roue, si l'on admet que δ est constant; en réalité les chariots sont construits de manière à ce qu'il en soit ainsi, l'avant train pivotant ne supporte que la charge nécessaire pour assurer le mouvement de direction; les roues de l'avant train devant du reste se loger sous la caisse lorsque le véhicule passe dans une courbe de petit rayon, le faible diamètre que l'on donne à ces roues est une nécessité de construction.

En employant pour chacune des roues la formule (2) du numéro 79, on trouverait, pour l'effort de traction total:

$$F = (f' \rho + \delta)\left(\frac{p'}{r'} + \frac{p}{r}\right)$$

Morin a admis que les charges p et p' sont réparties proportionnellement aux rayons des roues, c'est-à-dire qu'on a d'ordinaire:

$$p' = \alpha r'$$
$$p = \alpha r$$

d'où, par addition

$$\alpha = \frac{P}{r + r'}$$

la formule devient alors

$$F = \frac{2(f' \rho + \delta)}{r + r'} P \qquad (3)$$

Lorsque $r' = r$, on retombe sur la formule (2) du numéro 79; celle-ci est applicable, par conséquent, aux véhicules à deux essieux, lorsque les roues sont d'égal diamètre.

82. — Le rapport $\frac{F}{P}$ se nomme coefficient de traction; les expériences de Morin (1837 à 1841), faites à l'aide d'un dynamomètre de traction, ont établi que ce coefficient ne varie pas, pour un même véhicule, avec la charge, et qu'en passant d'un véhicule à l'autre, il est en raison inverse du diamètre des roues, ce qui tend à prouver la constance de δ, car $f'\rho$ ne varie que d'une quantité insignifiante lorsqu'on passe d'un moyeu à l'autre.

La vitesse n'affecte pas la valeur de $\frac{F}{P}$ lorsque les chaussées sont unies; sur les routes pavées, au contraire, le coefficient de traction augmente avec la vitesse, et d'autant plus que le pavage est moins uni; le raisonnement montre qu'il doit en être ainsi, car toute aspérité augmente d'autant la valeur de δ, le travail dépensé pour faire gravir à la roue une suite de plans inclinés n'est que partiellement régénéré à la descente, puisqu'il s'en perd par le choc une partie d'autant plus grande que la vitesse est plus considérable.

Les ressorts employés pour diminuer le cahotage des véhicules exercent une influence favorable sur l'effort de traction, car ils diminuent l'intensité des chocs; leur effet est surtout sensible sur les chaussées raboteuses, et pour l'allure à grande vitesse.

	δ	VALEURS DU COEFFICIENT DE TRACTION D'APRÈS MORIN						
		Chariots à deux essieux		Tombereaux		Voiture des messageries $r+r' = 1^m15$, $\rho = 0{,}032$		
		$r = 0.45$ $r' = 0.75$ $\rho = 0.032$	$r = 0.55$ $r' = 0.85$ $\rho = 0.032$	$r = 0.80$ $\rho = 0.032$	$r = 1.00$ $\rho = 0.032$	au pas	au trot	trot rapide
Chaussée en empierrement en bon état, sèche et unie. . .	0.01	$\frac{1}{49.9}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{60.2}$	$\frac{1}{82.8}$	$\frac{1}{47.6}$	$\frac{1}{40.9}$	$\frac{1}{40.9}$
Pavage en grès à l'état sec.	0.008	$\frac{1}{59.6}$	$\frac{1}{69.5}$	$\frac{1}{79.9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{57.1}$	$\frac{1}{34.1}$	$\frac{1}{32.7}$
Pavage en grès, humide et boueux. . . .	0.011	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{53.5}$	$\frac{1}{61.2}$	$\frac{1}{76.5}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{32.9}$	$\frac{1}{29.2}$
Tablier en bois de pont.	0.012	$\frac{1}{40.8}$	$\frac{1}{49.8}$	$\frac{1}{56.9}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{40.8}$	$\frac{1}{40.8}$	»

Tous les coefficients ci-dessus résultent d'expériences, les valeurs de δ portées dans la première colonne sont ensuite déduites de la formule (3) en prenant

$$f' = 0{,}065$$

Les jantes avaient en général dans ces expériences une largeur de $0^m,10$ à $0^m,12$.

83. — Les résultats obtenus par Morin sont à peu près confirmés par de nouvelles et récentes expériences faites par la Compagnie des Omnibus de Paris ; pour une voiture-omnibus pesant de 3,000 à 4,000 kilogrammes, l'effort de traction moyen, par tonne de charge, a été mesuré au moyen d'un dynamomètre; on a trouvé respectivement:

Sur le macadam. .	21 à 33 kil.
Sur le pavé . . .	14 à 22

ce qui porte le coefficient de traction aux valeurs suivantes:

Sur le macadam. .	$\frac{1}{47.5}$ à $\frac{1}{30}$
Sur le pavé . . .	$\frac{1}{71}$ à $\frac{1}{45}$

84. — *Wagons roulant sur les voies ferrées.* — Les causes qui produisent la résistance au roulement des véhicules sur les routes ordinaires agissent avec moins d'intensité dans les chemins de fer, les surfaces en contact étant plus dures et plus parfaites; d'autre part, les wagons sont soumis, par suite de leur construction, à des causes spéciales de résistance, parmi lesquelles il faut surtout compter le frottement latéral des boudins des roues, et le frottement en courbe.

Le frottement latéral étant accidentel, il est impossible de déterminer la pression qui le produit, et par conséquent de le calculer; la résistance en courbe, au contraire, à fait l'objet de recherches théoriques très complètes [1].

1. Léon Pochet. *Théorie du mouvement en courbe sur les chemins de fer*, **Paris Dunod-1882.**

Enfin, pour les trains rapides, la résistance de l'air occasionne un sérieux accroissement de résistance, dont il est possible aussi de tenir compte.

Si l'on se borne à considérer les causes de résistance ordinaires, la formule (3) du numéro 81 devient:

$$F = \frac{f'\rho + \delta}{r} P$$

qui donne pour l'effort de traction, en kilogrammes par tonne:

$$F = 1000 \frac{f'\rho + \delta}{r}$$

On a, d'ordinaire

$$r = 0.45$$
$$\rho = 0{,}045$$

f' dépend du mode de graissage; les expériences de M. Thurston, faites principalement dans des conditions analogues à celles où se trouvent les fusées, permettent de supposer qu'avec de bonnes huiles, f' ne s'élève pas à plus de 0,01; la part afférente à chacune des causes de résistance serait ainsi, après calcul:

Résistance due au frottement des fusées — 0,46 F
Résistance au roulement proprement dit — 0,54 F.

Ces chiffres permettent de voir, grossièrement, que le frottement des fusées occasionne une résistance comparable à celle due à la pénétration du bandage dans le rail.

Les formules de Villemain, Guebhardt et Dieudonné fournissent, pour le graissage à l'huile, à la vitesse de 10 kilomètres à l'heure:

$$F = 2^{k},15$$

Dans ces conditions, et avec la valeur $f' = 0{,}01$ on trouve

$$\delta = 0^{m},00052$$

Pour le graissage à la graisse, on a d'après les mêmes auteurs

$$F = 2^{k},80$$

en adoptant la valeur ci-dessus de δ évidemment indépendante du système de graissage, on trouve

$$f' = 0.016$$

résultat fort vraisemblable, et qui s'accorde avec certaines expériences sur les propriétés lubrifiantes de la graisse.

Il serait cependant bien difficile de séparer les divers éléments de la résistance; on admet donc que la résistance totale sur une voie droite établie en palier comprend :

1° Un terme indépendant de la vitesse, et proportionnel à P, que l'on peut attribuer aux deux causes déjà analysées;

2° Un terme dû aux mouvements irréguliers, aux chocs et aux vibrations, dont l'influence augmente avec la vitesse; ce terme est aussi proportionnel à P;

3° Enfin un terme dû à la résistance de l'air, et qui dépend, à la fois, de l'ensemble des sections transversales rencontrées par le vent, et du carré de la vitesse relative [1]; dans les conditions moyennes, l'air étant immobile, la vitesse relative du vent n'est autre que la vitesse du train; quant à la section transversale, on peut, sans grande erreur la supposer constante.

On a ainsi :

$$F = \alpha P + \beta PV + \gamma V^2$$

ou

$$\frac{F}{P} = \alpha + \beta V + \gamma \frac{V^2}{P}$$

1. La théorie du choc d'une veine fluide contre un plan, montre que l'action du vent est proportionnelle au carré de la vitesse relative; toutefois, les expériences de O. T. Crosby, faites aux Etats-Unis, dans des conditions de vitesse comparables à celles des trains les plus rapides, ont fourni une résistance proportionnelle à la vitesse. Réduites en mesures métriques, la résistance due à l'air pour une section S^{m2} serait :

$$0.436\ SV$$

V est la vitesse en kilomètres à l'heure; ce terme s'identifie avec celui qui figure dans la formule de de Pambour, lorsque

$$V = 87 \text{ kilomètres à l'heure.}$$

Pour des vitesses inférieures, il donne des valeurs plus fortes; au-dessus, il donne des valeurs plus faibles.

$\frac{F}{P}$ est le coefficient de traction, il est toujours évalué en kilogrammes par tonne de train, et si on l'appelle T, on a

$$T = \alpha + \beta V + \gamma \frac{V^2}{P}$$

Les valeurs α, β et γ peuvent se déterminer par un nombre assez grand d'expériences; pour les trains de petite vitesse, le dernier terme est supprimé; certaines formules n'ont pas le terme βV.

Voici quelques-unes des formules les plus employées, P exprime le poids du train en tonnes, T est l'effort de traction en kilogrammes par tonne, V est la vitesse en kilomètres à l'heure.

85. — ***Anciennes formules. — Formule de de Pambour*** [1]

$$T = 2.69 + \frac{0.005064 \, SV^2}{P}$$

S est la surface effective du train en mètres carrés, on l'obtient en ajoutant à la section la plus grande, une surface de $0^{m^2},93$ pour chacun des véhicules;

Expériences de Gouin et Le Chatelier [1].

V	T	P
38.38	4.06	41
49.17	6.56	41
56.37	8.13	22

Ces expériences ont été faites au moyen d'un dynamomètre.

1. Le Chatelier, *Guide du mécanicien.*

Expériences de Gooch sur la voie large du Great-Western.

V	T	P
21.1	3.43	100
32.2	3.87	»
72.4	7.26	»
91.7	9 94	»
92.2	10.77	»
98.1	10.07	»

Formule de Harding

$$T = 2.72 + 0.094\ V + 0.00484 \frac{NV^2}{P}$$

N est la surface de front du train; cette formule est applicable aux vitesses supérieures à 60 kilomètres seulement, elle ne convient qu'aux trains de voyageurs, P ne peut descendre en-dessous de 20 tonnes, sinon l'influence du dernier terme deviendrait excessive.

86. — *Formules de Villemain, Guebhardt et Dieudonné* (1):

1° Trains de marchandises, ayant une vitesse inférieure à 30 kilomètres,

Pour le graissage à l'huile : $T = 1.65 + 0.05\ V$
Pour le graissage à la graisse : $T = 2.30 + 0.05\ V$

2° Trains omnibus, ayant une vitesse de 30 à 50 kilomètres,

$$T = 1.80 + 0.08\ V + 0.009 \frac{NV^2}{P}$$

3° Trains directs, ayant une vitesse de 50 à 65 kilomètres,

$$T = 1.80 + 0.08\ V + 0.006 \frac{NV^2}{P}$$

1. *Mémoires* de la Société des Ingénieurs Civils - 1867.

4° Trains express, marchant à 70 kilomètres et plus,

$$T = 1.80 + 0.14\ V + 0.006 \frac{NV^2}{P}$$

Toutes les valeurs numériques données pour T, ainsi que les coefficients des formules ci-dessus, se rapportent aux wagons exclusivement; les machines locomotives sont soumises, à cause du frottement de leur mécanisme, à une résistance supplémentaire que nous ne pouvons étudier ici. Enfin, il s'agit toujours, dans ce qui précède, d'une voie de niveau, sinon la gravité donnerait lieu à une composante qui viendrait diminuer ou augmenter l'effort de traction.

87. — ***Résistance sur les tramways et les petites lignes industrielles.*** — Le coefficient de traction augmente lorsque le diamètre des roues diminue; les petites voies ne présentent pas non plus autant de stabilité que les chemins de fer ordinaires.

M. A. Evrard [1] a déduit d'un assez grand nombre d'expériences les valeurs de F qui se rapportent aux berlines employées dans l'intérieur des mines, sur des voies de $0^m,60$ d'écartement; pour des roues bien graissées et en bon état, F est en moyenne de 16 kilogrammes par tonne, mais peut descendre jusqu'à 10 kilogrammes avec un matériel soigné et s'élever à 25 kilogrammes lorsque l'entretien laisse à désirer; la vitesse était au maximum de $3^m,50$ par seconde.

Les méthodes employées par M. Evrard méritent de fixer l'attention, par le degré de précision qu'elles permettent d'atteindre. Dans une première série d'expériences, les wagonnets descendaient librement sur un plan incliné d'une hauteur H, et remontaient sur une rampe, en perdant peu à peu leur vitesse; ils s'arrêtaient à la hauteur $H - h$; la longueur du parcours était connue, et le travail résistant était évalué en multipliant le poids total par h.

Dans une autre série d'expériences, le travail résistant total, sur un parcours en palier, a été mesuré au moyen de la force vive acquise à un moment donné, à partir duquel les petits trains de berlines étaient abandonnés à eux-mêmes; le parcours était mesuré.

On voit que, pour tirer parti de ces expériences, il est nécessaire de supposer que l'effort de traction est indépendant de la vitesse, ce qui

1. *Revue Universelle des Mines,* 2e série, t. VI, pages 374 et 702.

est sensiblement vrai pour des mouvements peu rapides; il convient de remarquer aussi que la force vive des roues, doit, à raison de leur double mouvement, faire l'objet d'une évaluation spéciale.

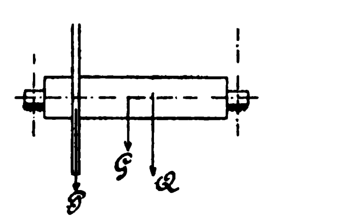
Quoiqu'il en soit, on peut tenir comme acquis que les wagonnets roulant sur voies étroites exigent, pour la même charge totale, un effort de traction au moins cinq fois plus considérable que les véhicules circulant sur la voie normale; la diminution de l'effort de traction lorsque la voie s'élargit avait déjà été démontrée par les expériences de Gooch, sur la voie large du Great-Western.

Quant aux voitures de tramways, la plupart des expériences (1) conduisent à leur assigner une résistance de 10 kilogrammes par tonne, à la vitesse de 10 kilomètres à l'heure, et sur une voie en bon état, mais l'effort nécessaire au démarrage peut atteindre facilement 50 kilogrammes.

§ III.

Systèmes comportant des liens flexibles.

88. — *Du treuil.* — Considérons d'abord le système (fig. 87) dans lequel la résistance Q est appliquée au tambour par l'intermédiaire



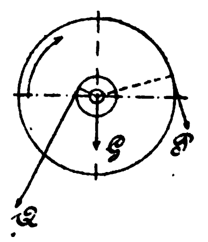


Fig. 87

d'une corde, la puissance P agissant suivant une direction constante et à la distance p de l'axe.

1. Sérafon, les *Tramways et les chemins de fer sur route.* Paris. E. Bernard et Cie 1882.

Soient q, le rayon du tambour,

G, le poids mort du treuil,

ρ_1, ρ_2, les rayons des tourillons,

f, le coefficient de frottement.

Les coussinets sont supposés réduits à une tranche mince supportant les tourillons au milieu de leur longueur; lorsque la rotation se produit, le frottement qui se développe sur chaque tourillon agit dans un plan normal à l'axe de rotation, les réactions totales R_1 et R_2 sont donc situées chacune dans un plan normal à l'axe, et appliquées au milieu de la longueur des tourillons.

Le système rendu libre ne peut que tourner autour de son axe, et les réactions R_1 et R_2 doivent être déterminées en conséquence, il faudra donc écrire en tenant compte de la raideur par la formule ordinaire [1]:

$$(1) \qquad Pp = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f' \rho_1 R_1 + f' \rho_2 R_2$$

Les forces R_1 et R_2 peuvent s'évaluer en fonction de leurs composantes suivant deux axes rectangulaires:

$$R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$
$$R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$$

Les quatre composantes inconnues seront déterminées par les deux équations d'équilibre de moments qui n'ont pas encore été écrites, et par deux équations d'équilibre de translation suivant des axes parallèles à $X_1 X_2$ et à $Y_1 Y_2$; la troisième équation de translation n'existe pas, puisque toutes les forces sont normales à l'axe du treuil.

On voit que les composantes des réactions, $R_1 R_2$, sont nécessairement

1. Si l'on emploie la formule monome de M. de Longraire (43) on remplacera le moment additionnel

$$\frac{1}{2}(A + BQ)$$

par

$$M\,Q$$

en faisant

$$M = 0{,}02p$$

(p étant ici le poids de la corde par mètre courant)

des fonctions de la force inconnue P, et qu'ainsi la résolution de l'équation (1) présente quelque difficulté, puisque P figure sous des radicaux.

On peut se contenter, comme dans tous les problèmes de l'espèce, d'une solution approchée, obtenue en calculant d'abord la valeur numérique de P abstraction faite des termes de frottement; on calcule ensuite les valeurs de R_1 et R_2 qui ne dépendent plus que des forces connues, parmi lesquelles se trouve la valeur approchée de P; on peut ainsi, par une substitution dans l'équation (1) obtenir une valeur de P plus approchée que la première, etc....

Il est plus avantageux de se servir de la méthode de Poncelet donnée au n° 79, et qui consiste à remplacer chaque radical par une expression linéaire approchée.

Lorsque les rayons ρ_1 ρ_2 sont égaux, cette méthode conduit à une simplification notable, car elle donne immédiatement

$$Pp = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f'\rho\alpha(X_1 + X_2) + f'\rho\beta(Y_1 + Y_2) \quad (2)$$

on fait $\alpha = \beta = 0,83$.

On obtient directement les valeurs de $X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ par les deux équations de translation.

Il est à remarquer cependant que, si l'ordre de grandeur de X_1 et Y_1 est connu, de même que celui de X_2 et Y_2, et si l'on veut, pour obtenir une approximation plus grande, faire usage de coefficients α et β différents, la simplification n'a lieu que si l'on a

$$X_1 > Y_1 \text{ avec } X_2 > Y_2$$

ou

$$X_1 < Y_1 \text{ avec } X_2 < Y_2$$

car, de cette manière, les composantes parallèles au même axe figurent toujours par leur somme.

Enfin, si une partie des forces se trouve en dehors des appuis, il peut être nécessaire, tout en adoptant le mode de résolution approché ci-dessus, d'obtenir séparément les valeurs de X_1, X_2, Y_1, Y_2, parce que les équations de translation ne fournissent, dans le cas où les composantes X_1 et X_2 ou Y_1 et Y_2 sont de signes contraires, que la somme algébrique des deux forces, tandis que c'est leur somme arithmétique qui doit figurer dans l'équation (2).

89. — Le treuil est presque toujours commandé par engrenages, au moyen d'un nombre plus ou moins grand d'arbres intermédiaires; on emploie alors, pour passer d'un système au système suivant, la méthode indiquée au n° 68; les réactions sur les tourillons sont calculées en employant la méthode approchée de Poncelet; lorsque le dernier arbre est mû à bras d'hommes au moyen d'une ou de deux manivelles, la direction de la force motrice appliquée à ces manivelles est variable à chaque instant, et, par conséquent, la grandeur de la force motrice l'est aussi, puisque ce changement de direction entraîne une modification dans la grandeur des réactions; la force motrice devrait alors être calculée pour chaque position. Dans les problèmes pratiques, il suffit de chercher la valeur de la force motrice pour un certain nombre de positions équidistantes des manivelles, et d'en déduire l'effort moyen.

90. — *Poulie simple.* — La poulie fixe, (fig. 88), peut être considérée comme un treuil simplifié; désignons par

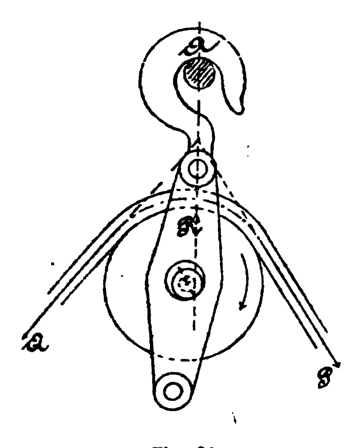


Fig. 88

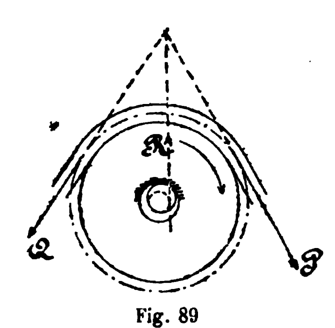


Fig. 89

r, le rayon mesuré sur l'axe de la corde,
ρ, le rayon du pivot, mobile avec la poulie,
dans le cas où le pivot est fixe (fig. 89), ρ désigne le rayon de l'œil de la poulie.

On a :

$$Pr = Qr + MQ + f' \rho R$$

R peut s'évaluer en fonction des composantes de P et de Q ; le poids propre de la poulie est négligé.

Lorsque les brins sont parallèles, on a en outre :

$$P + Q = R$$

ce qui donne :

$$P = \frac{M + r + f'\rho}{r - f'\rho} Q$$

ou

$$P = \alpha Q$$

91. — La poulie mobile (fig. 90), donne

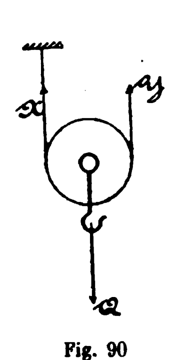


Fig. 90

$$Y = \alpha X$$
$$X + Y = Q$$

équations qui, résolues, permettent de calculer Y

$$Y = \frac{\alpha}{1 + \alpha} Q$$

ou, en tenant compte de la valeur de α :

$$Y = \frac{M + r + f'\rho}{M + 2r} Q$$

92. — Les combinaisons de poulies se rattachent, comme on sait, à l'un ou l'autre des systèmes représentés (fig. 91 et 92) ; ce dernier, connu sous le nom de mouffle, ou palan, est le plus employé.

Dans le cas de la figure 91, si n désigne le nombre des poulies, on a :

$$P = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)^n Q$$

nous supposons que les poulies et pivots ont le même diamètre, et que toutes les cordes employées sont de même grosseur.

Dans la mouffle, on a :

$$T_1 = \alpha T_0$$
$$T_2 = \alpha T_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{2n-1} = \alpha T_{2n-2}$$
$$P = \alpha T_{2n-1}$$

On a, en outre

$$T_0 + T_1 + \ldots\ldots T_{2n-1} = Q$$

Les équations ci-dessus, au nombre de $2n + 1$, permettent de déterminer P et les $2n$ tensions inconnues.

On trouve

$$P = \frac{(\alpha - 1)\,\alpha^{2n}}{\alpha^{2n} - 1}\,Q$$

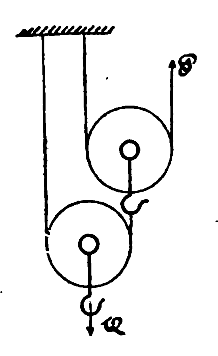


Fig. 91



Fig. 92

93. — ***Palan différentiel.*** — Cet appareil (fig. 93), connu aussi sous le nom de poulie de Weston, exige l'emploi d'une chaine et de poulies à empreintes; l'effet multiplicateur est exprimé par

$$\frac{2R}{R - r}$$

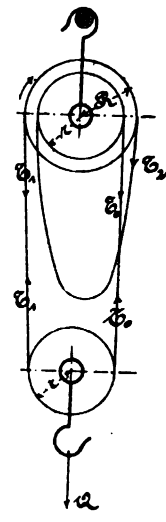


Fig. 93

On peut, par la réduction de $R - r$, l'augmenter autant qu'on le veut ; pour une charge Q, appliquée au crochet, la tension qui sert à déterminer la grosseur de la chaîne est $\frac{Q}{2}$, approximativement, tandis que, pour un palan, la chaîne ne doit résister, lorsqu'on fait abstraction des résistances passives, qu'à l'effort $\frac{Q}{2n}$.

Si l'on abandonne à elle-même la poulie de Weston, le mouvement tend à se produire en sens inverse sous l'effet de Q ; la tension T_0 devient donc plus grande que T_1, et, bien qu'elle agisse sur le rayon r de la

poulie différentielle, son moment peut équilibrer celui de T_1, à la condition que le rapport $\frac{R}{r}$ ne soit pas trop grand ; l'appareil possède alors la propriété de ne pas être réversible.

La poulie de Weston peut être actionnée au moyen d'un engrenage et d'une vis tangente ; dans ce cas, la non-réversibilité peut être obtenue par l'inclinaison du filet de la vis.

94. — On ne peut évidemment appliquer aux chaînes les théories de la raideur des cordes ; la résistance à laquelle donnent lieu les chaînes ordinaires où à maillons articulés lorsqu'elles passent sur une poulie, est due à la rotation relative des maillons successifs au moment de l'enroulement et du déroulement. Le travail nécessaire pour vaincre le frottement est emprunté à la force motrice P.

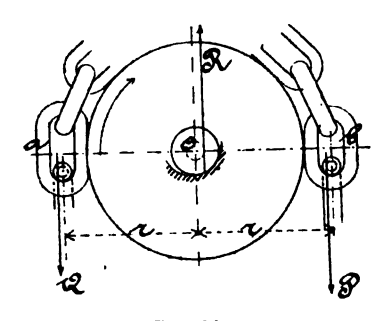


Fig. 94

Soit r, (fig. 94) le rayon de la poulie augmenté de la demi-largeur de la chaîne,

ρ le rayon des tourillons,

f leur coefficient de frottement sur les coussinets,

ρ_1 le rayon du fer de la chaîne (ou, s'il s'agit d'une chaîne de Galle, le rayon des pivots),

f_1 le coefficient de frottement fer sur fer.

Le bras de levier de Q par rapport au point d'application de la réaction R devient :

$$r + f'\rho + f_1'\rho_1$$

tandis que celui de la force motrice, P, est diminué, et prend la valeur

$$r - f'\rho - f_1'\rho_1$$

Comme les chaînes peuvent être rugueuses et non graissées, Hermann [1] admet pour f_1 la valeur 0,20

1. Hermann. *Statique graphique des mécanismes.*

On obtient pour l'équilibre :

$$P = \frac{r + f' \rho + f_1' \rho_1}{r - f' \rho - f_1' \rho_1} Q \qquad (1)$$

Il est à remarquer que les maillons, ayant une certaine longueur, forment des éléments polygonaux, et qu'ainsi, r varie un peu, tant à l'enroulement qu'au déroulement ; la relation établie n'est donc vraie que pour une position particulière. On a néanmoins, par l'équation du travail virtuel, en appelant :

l le pas de la chaîne, c'est-à-dire la longueur des éléments polygonaux qu'elle forme lorsqu'elle est enroulée,

α, l'angle au centre correspondant à cette longueur l, et qui représente aussi l'angle dont les deux maillons tournent l'un par rapport à l'autre, aussi bien à l'enroulement qu'au déroulement :

$$P = \frac{l + f' \rho\alpha + f_1' \rho_1 \alpha}{l - f' \rho\alpha - f_1' \rho_1 \alpha} Q \qquad (2)$$

avec la condition :

$$l = 2r \, tg \frac{\alpha}{2}$$

Si l'angle α est faible, c'est-à-dire si la poulie est grande en comparaison des maillons, on a approximativement :

$$l = r\alpha$$

et les équations (1) et (2) deviennent identiques.

La théorie ci-dessus s'applique aux chaînes qui s'enroulent librement sur les poulies, et qui n'ont aucune tendance à glisser, soit qu'il y ait peu de différence entre les tensions des deux brins, ou que la chaîne soit fixée au tambour comme dans les treuils des grues ; si la tendance à glisser existe, comme dans la poulie de Weston, elle ne peut être combattue que par les roues à noix ou les poulies à empreintes, et, dans ce cas, les maillons sont soumis au frottement à l'instant où ils se logent dans les creux ou mâchoires des couronnes, ou bien à l'instant où ils se dégagent de ces creux, suivant que c'est l'un ou l'autre des systèmes qui est moteur.

95. — ***Frottement d'un lien flexible sur un tambour fixe.*** — Dans les systèmes rencontrés jusqu'ici, et qui comportent l'emploi de liens flexibles, ceux-ci sont employés pour modifier la direction des forces ; les changements de tension qui résultent de la raideur sont accidentels ; lorsque l'on met en jeu la tendance au glissement, le frottement se manifeste et donne lieu à une modification notable dans la grandeur des tensions.

Considérons par exemple le cas d'un tambour fixe (fig. 95), et d'un lien (corde, courroie, lame en acier etc.,) se déplaçant à sa surface, dans

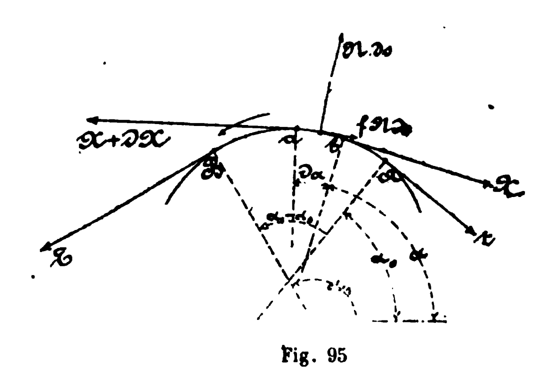


Fig. 95

le plan de sa section droite ; dans l'état de mouvement uniforme, il s'établit un équilibre entre les tensions T, t, et nous allons chercher la relation qui existe entre ces forces. Pour y arriver, isolons un élément ab de longueur ds, et introduisons les tensions X, $X + dX$, qui s'exercent aux deux extrémités de l'élément.

Soit N la réaction normale du cylindre, par unité de longueur de l'élément ; lorsque le mouvement uniforme se produit, on a :

$$dX = fN\,ds \quad (1)$$

$$X\,d\alpha = N\,ds \quad (2)$$

d'où

$$\frac{dX}{X} = f\,d\alpha$$

ou encore, après intégration :

$$\frac{T}{t} = e^{f(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

$\alpha_1 - \alpha_0$ est l'angle des deux rayons vecteurs menés aux points A et B de l'arc embrassé.

La formule reste la même, lorsque le contour du cylindre présente sur une partie de son périmètre une courbure rentrante, comme dans la figure 96, car la tension n'est pas modifiée de *a* en *b*, on peut donc

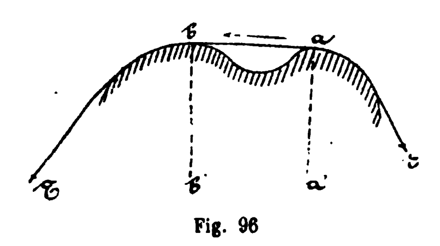


Fig. 96

supprimer la partie du tambour comprise entre les plans *aa'* et *bb'*. Dans le cas d'un cylindre à profil circulaire, si l'on désigne l'arc embrassé par *s*, et le rayon par *r*, on a :

(3) $$\frac{T}{t} = e^{\frac{fs}{r}}$$

Au lieu de se mouvoir sur un cylindre, le lien flexible peut être contenu dans une gorge à profil triangulaire (fig. 97), désignons alors par β l'angle de la gorge ; la réaction N*ds* est remplacée par ses deux composantes N'*ds*, appliquées aux points *m*, et dont chacune est égale à

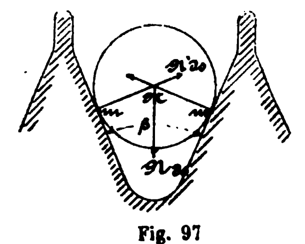


Fig. 97

$$\frac{\text{N } ds}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

pour l'élément *ds*, chacune de ces réactions entraîne un frottement

$$\frac{f\text{N } ds}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

L'équation (1) se modifie et devient :

$$(1') \qquad dX = \frac{fN\,ds}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

La combinaison des équations (1') et (2) donne, après intégration :

$$\frac{T}{t} = e^{\frac{f(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin\frac{\beta}{2}}}$$

ou, s'il s'agit d'une poulie circulaire :

$$(4) \qquad \frac{T}{t} = e^{\frac{fs}{r\sin\frac{\beta}{2}}}$$

Les relations (3) ou (4) donnent le rapport qui existe entre les tensions T et t lorsque le glissement se produit ; il peut arriver que T n'atteigne pas la valeur donnée par ces équations, dans ce cas, et malgré la différence qui peut exister entre T et t, le glissement ne saurait avoir lieu.

Le rapport $\frac{T}{t}$ est fortement influencé, d'abord par la valeur de f, ensuite, par l'angle embrassé, car ces quantités figurent à l'exposant du second membre des équations ; pour une courroie plate en cuir, glissant sur une poulie fixe en fonte, f est ordinairement pris égal à 0,28 [1].

Le tableau ci-dessous, des valeurs de $\frac{T}{t}$ pour différentes valeurs de l'arc embrassé, peut être utile à consulter.

1. Leloutre, après de nombreuses expériences, admet pour les courroies neuves en cuir f=0.155, et pour les courroies imprégnées de cambouis f=0,22 ; d'après lui, f descendrait, pour le chanvre, jusqu'à 0,075 ; toutes les poulies sont supposées en fonte polie.

Tableau des valeurs de $\frac{T}{t}$

ARC EMBRASSÉ α	COURROIE PLATE			CORDES			
				$f = 0.28$		$f = 0.14$	
	$f = 0.28$	$f = 0.22$	$f = 0155$	$\beta = 60°$	$\beta = 45°$	$\beta = 60°$	$\beta = 45°$
$0.2 \times 2\pi$	1.42	1.32	1.21	2.02	2.48	1.42	1.57
$0.3 \times 2\pi$	1.69	1.52	1.34	2.86	3.91	1.69	1.98
$0.4 \times 2\pi$	2.02	1.73	1.48	4.08	6.22	2.02	2.48
$0.5 \times 2\pi$	2.41	1.99	1.63	5.81	9.84	2.41	3.14
$0.6 \times 2\pi$	2.86	2.29	1.79	8.23	15.73	2.86	3.97
$0.7 \times 2\pi$	3.43	2.63	1.98	11.76	24.65	3.43	4.96
$0.8 \times 2\pi$	4.08	3.02	2.18	16.73	38.94	4.08	6.22
2π	5.81	3.97	2.65	33.76	97.02	5.81	9.84
$2 \times 2\pi$	33.76	»	»	1139.06	»	33.76	»
$4 \times 2\pi$	1139.06	»	»	»	»	»	»

La propriété que possède le rapport $\frac{T}{t}$, d'augmenter très rapidement avec l'angle embrassé, est souvent mise à profit dans les applications de la mécanique ; sur elle, sont basés les amarrages, les nœuds, les freins à lames employés dans les appareils de levage, certains freins dynamométriques, les transmissions par courroies, par cordes, etc., [1].

On remarquera que $\frac{T}{t}$ conserve toujours une valeur finie, et qu'ainsi il est nécessaire, pour empêcher le glissement, d'exercer sur le brin libre une tension, qui peut à la vérité devenir très faible.

96. — *Frein à bande flexible.* — Ce frein est souvent employé pour modérer le retour de la charge dans les appareils de levage; les deux dispositions les plus usitées sont celles des figures 98 et 99. Dans les deux cas, le point O est fixe, la force p agit avec un bras de levier L, α

1. Nous avons indiqué un système d'attache des câbles dans les épreuves de traction, basé sur ce principe. *Bulletin mensuel de l'Association des Ingénieurs* sortis des Ecoles spéciales de Gand, 1882-83, p. 18.

est l'angle embrassé, T et t sont les tensions aux deux extrémités de la

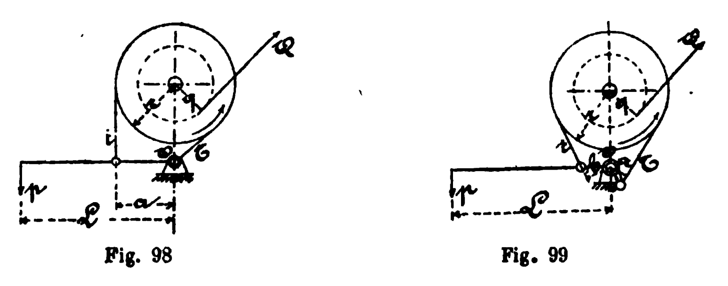


Fig. 98 Fig. 99

lame ; négligeons le frottement sur l'arbre ; pour que le mouvement ne puisse avoir lieu, il suffit qu'on ait :

$$T - t = \frac{Qq}{r}$$

Or, quand le glissement est sur le point de se produire,

$$\frac{T}{t} = e^{f\alpha}.$$

d'où :

$$t = \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

et

$$T = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

Avec la première disposition, on aura donc, pour le minimum de l'effort à exercer au bout du levier :

$$p = \frac{a}{L} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \frac{Qq}{r}$$

On produira ainsi la tension t dans le brin le moins tendu, et la traction T s'établira d'elle-même dans l'autre brin.

On reconnaît que cet agencement est rationnel, car il faudra exercer sur le levier un effort moindre que si l'on avait pris la disposition de la figure 100.

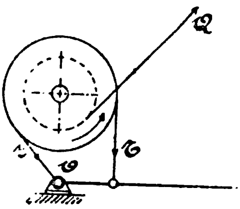


Fig. 100

Dans le frein différentiel, (fig. 99), on a :

$$pL = tb - Ta$$

Lorsque le glissement est sur le point de se produire, le rapport $\frac{T}{t}$ prend la même valeur $e^{f\alpha}$ que dans le frein précédent, on a donc :

$$pL = \frac{Qq}{r} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \left(b - ae^{f\alpha}\right)$$

On peut, en agissant sur a et b, diminuer la valeur de p; ainsi, on aura $p = o$, et le frein sera automatique, lorsque

$$\frac{b}{a} = e^{f\alpha}$$

Lorsque $\frac{b}{a}$ est inférieur à $e^{f\alpha}$, on trouve une valeur de p négative, ce qui veut dire que, même en déchargeant l'extrémité du levier, le frein est encore serré; mais, en aucun cas, b ne peut devenir inférieur à a, sinon, il faudrait absolument agir de bas en haut pour serrer le frein.

97. — *Transmissions par courroies et par cordes* [1]. — Ces transmissions s'emploient dans le cas de deux arbres parallèles, et relativement assez rapprochés. Soit O' (fig. 101), l'arbre à commander, qui doit effectuer par minute n' tours, l'arbre moteur O tournant à n révolutions.

Soit Qq le couple résistant sur l'arbre O',

Pp le couple moteur sur l'arbre O,

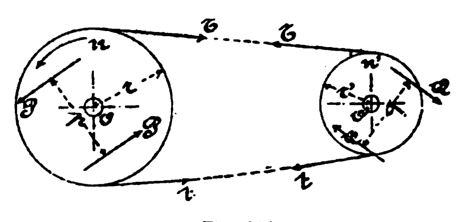


Fig. 101

r' et r les rayons des poulies,

ρ' et ρ les rayons des arbres.

1. Les transmissions par courroies et par câbles sont ici traitées uniquement au point de vue de la recherche des tensions nécessaires pour transmettre un effort ou une puissance donnés, et du calcul des résistances passives.

Le travail, en chevaux, à transmettre est :

$$N = \frac{2\pi\, n'\, Qq}{75 \times 60}$$

Lorsque N est connu, on trouve Qq au moyen de cette relation, qui donne :

$$Qq = \frac{75 \times 60}{2\pi\, n'} N$$

Lorsque la transmission s'opère, les deux brins sont inégalement tendus, mais la tension dans le brin conduit reste cependant assez grande pour qu'on puisse le considérer comme rectiligne, à moins que les arbres ne soient à une distance inusitée. On a, respectivement, pour les deux poulies O' et O en appelant t et T les tensions :

$$(1) \qquad Tr' = tr' + Qq + Mt + f'\rho' \text{ Rés. } (T, t)$$

$$(2) \qquad Pp + tr = Tr + MT + f'\rho \text{ Rés. } (T, t)$$

Ces équations renferment comme inconnues T, t et P, elles comportent donc une infinité de solutions, résultat qu'on pouvait prévoir *a priori*, car, lorsqu'une transmission fonctionne, il est toujours possible de donner aux deux brins de la courroie des tensions plus grandes que celles qui existent. Toutefois, il n'est pas avantageux d'en agir ainsi, car la section de la courroie devrait augmenter en conséquence ; toute augmentation des tensions au-delà des valeurs nécessaires entraînerait, du reste, des résistances passives supplémentaires.

D'autre part, la transmission ne peut s'effectuer que si la courroie ne glisse pas sur la jante de l'une ou de l'autre poulie, ce qui arriverait certainement si elle n'était pas assez tendue.

Pour que le glissement ne se produise sur aucune des deux poulies, il faut que l'on ait, en désignant par α' et α les angles embrassés sur chacune d'elles :

$$\frac{T}{t} \leqq e^{f\alpha'}$$

$$\frac{T}{t} \leqq e^{f\alpha}$$

Le rapport $\frac{T}{t}$ doit donc rester inférieur à la plus faible des deux

valeurs $e^{f\alpha'}$ ou $e^{f\alpha}$, et dans le cas d'une courroie non croisée, il suffira que $\frac{T}{t}$ soit plus petit que la valeur $e^{f\alpha}$ calculée pour la plus petite des deux poulies; nous ajouterons que lorsque les deux arbres sont à une distance convenable, l'angle se rapproche de 180°; cependant, pour tenir compte de la flèche du brin conduit, qui pour un certain sens de rotation, tend à diminuer l'arc embrassé, on prend souvent

$$\alpha = 0.4 \times 2\pi$$

ce qui donne (voir le tableau du n° 95)

$$\frac{T}{t} = 2 \text{ environ}$$

Quoiqu'il en soit, si l'on désigne par K la plus petite des deux valeurs $e^{f\alpha'}$ ou $e^{f\alpha}$, il faut que

$$\frac{T}{t} \leqq K \qquad (3)$$

Il existe une infinité de manières de satisfaire à la condition ci-dessus, mais on peut voir facilement qu'il y a intérêt à adopter pour $\frac{T}{t}$ un rapport aussi élevé que possible, car, soit μ le rapport des deux tensions, on a, en négligeant dans l'équation (1) tous les termes de résistances passives, qui sont peu importants:

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

et puisque

$$\frac{T}{t} = \mu$$

on trouve:

$$t = \frac{1}{\mu - 1} \frac{Qq}{r'}$$

$$T = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{Qq}{r'}$$

Il est visible que les tensions t et T diminuent lorsque μ augmente,

on devra donc, si l'on ne veut exagérer les tensions, élever μ autant que possible, c'est-à-dire le rendre égal à K, ce qui restreint la condition (3).

Les tensions sont alors approximativement :

$$t = \frac{1}{K-1}\frac{Qq}{r'}$$

$$T = \frac{K}{K-1}\frac{Qq}{r'}$$

mais il serait facile d'obtenir les valeurs exactes de t et T en utilisant complètement les équations (1) et (2).

Dans une transmission établie comme ci-dessus, le glissement serait sur le point de se produire, et il n'y aurait aucune réserve de tension pour prévenir le glissement en cas de variation accidentelle du couple résistant; comme, de plus, les courroies finissent par s'allonger, surtout lorsqu'elles n'ont pas encore servi pendant longtemps, on préfère augmenter T et t; les tensions ci-dessus conduiraient, pour l'ensemble des deux brins, à la tension totale

$$T + t = \frac{K+1}{K-1}\frac{Qq}{r'}$$

Lorsque la transmission ne fonctionne pas, par exemple lorsque la courroie vient d'être posée, les tensions sont les mêmes dans les deux brins, l'une d'elles augmente d'une certaine quantité pendant la marche, pendant que l'autre diminue d'une quantité *égale* [1]. La tension de pose

1. Ce fait est facile à démontrer, car soit T_1 la tension lors de la pose, E le coefficient d'élasticité du cuir; en passant de la tension nulle à la tension T_1 l'unité de longueur de la courroie subit un allongement $\frac{T_1}{E}$, l'allongement correspondant à la tension T est $\frac{T}{E}$; lorsque la transmission se met en mouvement, l'allongement augmente donc le brin conducteur proportionnellement à $\frac{1}{E}(T - T_1)$; dans le brin conduit au contraire, l'allongement diminue proportionnellement à $\frac{1}{E}(T_1 - t)$; mais la longueur totale reste sensiblement la même, il faut donc que

$$T - T_1 = T_1 - t$$

ou

$$2T_1 = T + t$$

nécessaire pour permettre aux tensions T et t de se développer est donc

$$T_1 = \frac{T+t}{2} = \frac{1}{2}\frac{K+1}{K-1}\frac{Qq}{r'}$$

Pour se prémunir contre la possibilité du glissement, on augmente à dessein la tension de pose, et l'on fait

$$2\,T_1 = T + t = 1{,}2\,\frac{K+1}{K-1}\frac{Qq}{r'}$$

Comme on a approximativement

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

On tire de ces deux dernières équations:

$$\frac{T}{t} = \frac{11\,K+1}{K+11}$$

K est nécessairement supérieur à l'unité, il èn résulte que

$$\frac{T}{t} < K$$

c'est-à-dire qu'une certaine marge est réservée contre le danger du glissement.

La valeur

$$T - t = \frac{Qq}{r'}$$

n'est qu'approchée, elle est obtenue en négligeant les résistances passives dont l'effet est de nécessiter une augmentation de $T - t$, ce qui entraine l'augmentation du rapport $\frac{T}{t}$, attendu que la somme $T + t$ est déterminée par la tension de pose; le procédé indiqué ci-dessus permet cette augmentation sans que le rapport K soit dépassé ou même atteint.

98. — Dans certains cas, l'une des tensions est connue avec certitude, c'est lorsqu'on fait usage d'un galet tendeur (fig. 102); si l'on néglige le frottement sur l'axe du galet on peut facilement trouver t en fonction de l'effort p rapporté au centre du galet, et de l'angle d'inflexion du brin, cet angle est déterminé par la longueur de la courroie.

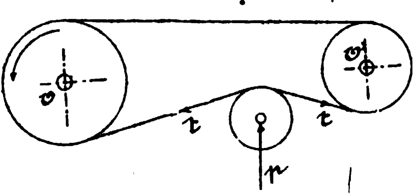


Fig. 102

Le galet tendeur doit toujours être disposé de manière à augmenter les arcs embrassés sur les poulies, et en raison de la tension plus faible à réaliser, il convient de le faire agir sur le brin conduit plutôt que sur le brin conducteur.

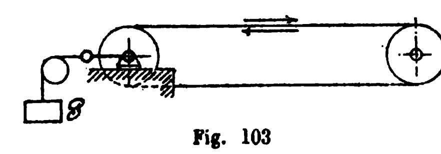


Fig. 103

On rencontre quelquefois, dans certaines transmissions par cordes, le système de tendeur représenté (fig. 103), on connait alors la somme des tensions.

99. — Lorsque les poulies sont assez rapprochées, et que le rapport des rayons est considérable, l'angle minimum embrassé diminue; aussi ce genre de transmissions exige une tension de pose exagérée, et il convient autant que possible de l'éviter; lorsque l'espace fait défaut pour installer un arbre intermédiaire, on emploie avec succès un galet auxiliaire (fig. 104), qui sert seulement à augmenter l'arc embrassé; pour diminuer la pression qui se reporte sur ses pivots, on l'installe de préférence sur le brin conduit. L'emploi de ce galet auxiliaire s'indique lorsque l'on veut établir une transmission à grande vitesse dans un espace réduit, par exemple dans les petites installations d'éclairage électrique.

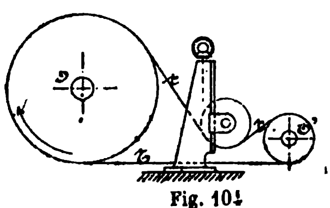


Fig. 104

On peut aussi, en croisant les brins (fig. 105), augmenter l'angle embrassé, qui devient alors le même pour les deux poulies, mais le frottement qui se développe à la rencontre des deux brins empêche d'employer ce système pour des transmis-

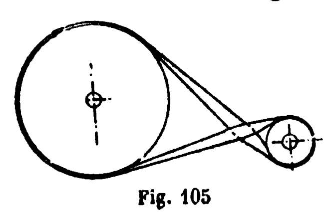


Fig. 105

sions importantes. En fait on n'emploie la courroie croisée que pour des courroies peu larges, et dans le but de changer le sens de la vitesse d'une transmission secondaire.

100. — *Vitesse des brins.* — L'effort circonférentiel que l'on doit transmettre à la poulie commandée est, en négligeant les résistances passives (n° 97)

$$\frac{Qq}{r'} = \frac{75 \times 60}{2\pi\ n'\ r'} N$$

En appelant v la vitesse de la courroie, on a

$$v = \frac{2\pi\ n'\ r'}{60}$$

cette valeur, substituée dans l'égalité précédente, conduit à une forme plus simple des tensions t et T

$$t = \frac{75\ N}{v} \frac{1}{K-1}$$

$$T = \frac{75\ N}{v} \frac{K}{K-1}$$

en supposant réalisées les conditions les plus favorables au point de vue des tensions, c'est-à-dire celles qui correspondent au commencement du glissement.

Pour transmettre une puissance N déterminée, on a donc intérêt à augmenter v autant que possible, car on peut ainsi réduire la section de la courroie proportionnellement à T, et diminuer en même temps les résistances passives.

L'augmentation de vitesse peut d'ailleurs être obtenue en agissant, soit sur les nombres de tours par minute, soit sur les rayons, soit sur ces deux éléments à la fois.

Lorsque la vitesse n'est pas grande, la force centrifuge qui s'exerce sur la courroie dans son passage sur les poulies est très faible et peut être négligée, mais on réalise parfois [1] de très grandes vitesses, et il

1. On peut citer comme exemple de l'une des vitesses les plus grandes que l'on ait atteinte jusqu'à ce jour, la transmission principale de la « Linière Gantoise », où deux courroies jumelles, de $1^m,500$ de largeur chacune, sont établies sur un même volant de $9^m,144$ de diamètre tournant à raison de 53 révolutions par minute ; la vitesse à la jante est de 25^m50 environ.

est nécessaire alors de rechercher l'influence que la force centrifuge peut avoir sur les tensions.

101. — L'effet de la force centrifuge est de diminuer la pression normale que la courroie exerce sur chaque élément de la jante, et, par conséquent, de réduire le frottement qui entraîne la courroie ; on ne peut empêcher le glissement que par un excès de tension dans les brins, la force centrifuge modifie donc les relations (3) et (4) établies au n° 95 pour les courroies plates, et les cordes fonctionnant sur les poulies à gorge, respectivement.

Soit p le poids de la courroie par unité de longueur, pds est le poids pour l'élément de longueur ds (fig. 95) ; cet élément est sollicité par les tensions X, $X + dX$, ainsi que par la réaction normale, $N ds$, de la poulie, la force centrifuge

$$\frac{p}{g}\,\omega^2 r\,ds$$

et, enfin, par le frottement $fN ds$.

Si nous supposons qu'il s'agit d'un tambour circulaire, ω est la vitesse angulaire de l'élément considéré, r est le rayon, et ces quantités sont constantes.

Les équations d'équilibre de l'élément sont :

$$dX = fN\,ds$$

$$X\,d\alpha = \left(N + \frac{p}{g}\,\omega^2 r\right) ds$$

en éliminant N entre les deux équations, et remarquant que ωr désigne la vitesse v à la circonférence, on a :

$$\frac{dX}{X - \frac{p}{g} v^2} = f\,d\alpha$$

qui donne, par l'intégration, en appelant α l'angle correspondant à l'arc embrassé

$$\text{(1)} \qquad \frac{T - \frac{p}{g} v^2}{t - \frac{p}{g} v^2} = e^{f\alpha}$$

Cette relation doit exister lorsque le glissement est sur le point de se produire, on voit immédiatement que l'on a :

$$\frac{T}{t} < \frac{T - \frac{p}{g} v^2}{t - \frac{p}{g} v^2}$$

ou

$$\frac{T}{t} < e^{f\alpha}$$

c'est-à-dire, que le rapport des tensions doit rester inférieur à ce qu'il est lorsque l'on néglige la force centrifuge ; comme leur différence doit être suffisante, d'autre part, pour entraîner l'effort circonférentiel, on voit, en définitive, que la force centrifuge oblige à augmenter les deux tensions, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

102. — Nous avons vu (100), qu'il y a intérêt à augmenter la vitesse de la courroie si l'on veut diminuer la tension, mais la force centrifuge qui augmente en conséquence, exerce un effet contraire, il y a donc lieu de rechercher la vitesse pour laquelle la puissance transmise est la plus grande, la section de la courroie étant donnée ; pour ne pas compliquer inutilement les formules et les résultats, nous ferons abstraction des résistances passives.

Soit σ la section de la courroie,

τ la charge admise par unité de section dans le brin conducteur,

v la vitesse,

δ le poids spécifique de la courroie,

$p = \delta\sigma$ le poids par unité de longueur.

La tension totale du brin conducteur étant T, celle du brin conduit est t, et la puissance transmise sera, en y comprenant les résistances passives :

$$(T - t)\, v$$

On tire de la relation (1), établie au n° 101, en supposant que le glissement est sur le point de se produire :

$$T - t = \left(1 - \frac{1}{e^{f\alpha}}\right)\left(T - \frac{p}{g} v^2\right)$$

ce qui donne:

$$(T - t)\, v = \left(1 - \frac{1}{e^{f\alpha}}\right)\left(Tv - \frac{p}{g}\, v^3\right)$$

ou, puisque

$$T = \tau\sigma$$

et

$$p = \delta\sigma$$

$$(T - t)\, v = \left(1 - \frac{1}{e^{f\alpha}}\right)\left(\tau v - \frac{\delta}{g}\, v^3\right)\sigma$$

La valeur de v qui rend nulle la dérivée du second membre est:

$$v_M = \sqrt{\frac{g\tau}{3\delta}}$$

Pour les courroies neuves, en cuir, le poids spécifique est:

$$\delta = 1000$$

τ est la charge admise par mètre carré de section, elle varie avec le coefficient de sécurité que l'on adopte, et avec la qualité du cuir; les grandes transmissions sont quelquefois chargées à 0 kil., 40 (Leloutre), par millimètre carré du brin tendu; on a donc:

$$\tau = 1000^2 \times 0.40 = 400.000$$

D'où

$$v_M = 36^m00 \text{ environ}$$

Pour une tension de 0 kil., 25 par millimètre carré, on trouve

$$v_M = 28^m60$$

vitesse dont on s'approche rarement dans l'application.

Lorsque l'on adopte la vitesse v_M la plus avantageuse, la condition du glissement

$$\frac{T - \frac{p}{g}\, v^2_M}{t - \frac{p}{g}\, v^2_M} \leqq e^{f\alpha}$$

devient, en remarquant que

$$p = \delta\sigma$$

et

$$v^2_M = \frac{g\tau}{8\delta}$$

$$\frac{T - \frac{\sigma\tau}{8}}{t - \frac{\sigma\tau}{8}} \leqq e^{f\alpha}$$

ou, en faisant $\sigma\tau = T$:

$$\frac{T}{t} \leqq 8 \frac{e^{f\alpha}}{2 + e^{f\alpha}}$$

On voit que cette condition diffère notablement de celle obtenue en négligeant la force centrifuge.

A la vitesse de 18 mètres par seconde qui correspond à $\frac{v_M}{2}$, et qui est souvent réalisée, on a

$$\frac{T}{t} \leqq 6 \frac{e^{f\alpha}}{5 + e^{f\alpha}}$$

Pour $e^{f\alpha} = 2$ la condition devient

$$\frac{T}{t} \leqq \frac{12}{7}$$

alors qu'on aurait, en négligeant la force centrifuge:

$$\frac{T}{t} \leqq 2$$

Il est à remarquer aussi, que si T_1 représente la tension de pose, T et t les tensions en marche, on a toujours, puisque la longueur totale reste invariable:

$$2\,T_1 = T + t$$

En négligeant les frottements, et lorsque la courroie est sur le point de glisser, on a:

$$T - t = \frac{75 \times 60}{2\pi\, n'\, r'}\, N$$

et

$$\frac{T - \frac{p}{g} v^2}{t - \frac{p}{g} v^2} = e^{f\alpha}$$

qui remplace l'équation (3) du numéro 97.

Ces trois équations permettent de trouver la tension de pose.

103. — L'expression trouvée au numéro précédent pour v_M est applicable aux courroies et aux cordes de toute nature; on aurait, pour une courroie en caoutchouc [1]

$$\delta = 1750$$
$$\tau = 300000$$
$$v_M = 23^m50$$

Pour les cordages en chanvre fort des Flandres (44), on admet, d'après M. Vertongen, une tension de travail de 0 kil., 25 par millimètre carré, afin de ne pas fatiguer les épissures, on a :

$$\delta = 1050$$
$$\tau = 250000$$
$$v_M = 28^m00$$

Pour les cordages en chanvre de Manille, la charge admise est la même, mais $\delta = 830$, ce qui porte la vitesse v_M à $31^m,50$ [2].

104. — Le rayon des poulies ne figure pas dans l'expression de v_M, il semble donc indifférent de réaliser la vitesse par l'augmentation des nombres de tours ou par celle des rayons; toutefois, lorsqu'on tient compte de la raideur, on s'aperçoit qu'il est préférable d'adopter de grands rayons de poulies plutôt que d'agir sur le nombre de tours, car la puissance absorbée par la raideur augmente, pour une tension donnée, proportionnellement à la vitesse angulaire, attendu que cette puissance a pour expression, sur la poulie motrice :

$$\omega \, MT$$

et sur la poulie commandée :

$$\omega' \, Mt$$

où $M = 0{,}02\, m$

1. Leloutre. — *Les transmissions par courroies*, etc., Paris 1884.
2. La vitesse la plus grande qui ait été réalisée dans une transmission par câbles, est celle d'une machine motrice établie par Douglas et Grant ; le volant comprend 38 gorges, il a 30 pieds de diamètre, et fait 60 tours par minute (*Engineering*, 1888, 1er sem. p. 332), ce qui porte la vitesse à $28^m,75$ par seconde.

m représentant le poids du câble par mètre de longueur, ce poids est proportionnel à la section, laquelle est déterminée en fonction de T et ne dépend par conséquent que de la vitesse linéaire.

Pour les courroies, et bien que les données numériques fassent défaut, nous devrions conclure dans le même sens.

Le choix des rayons exerce, sur la puissance perdue en frottement, une influence qui échappe à toute loi générale. Dans les grosses transmissions, le poids des volants et des poulies est la force prépondérante, tandis que l'inverse a lieu pour transmissions légères. La vitesse de rotation réagit également sur le diamètre des arbres soumis à la torsion.

D'ailleurs, la raison d'économie limite le diamètre à donner aux poulies, abstraction faite des considérations d'emplacement.

105. — *Glissement permanent des courroies.* — M. Kretz [1] a, le premier, appelé l'attention sur un glissement d'une nature spéciale, qui se produit dans les transmissions, même lorsque les tensions sont convenablement établies, et qui a pour cause l'élasticité des liens. Lorsqu'on fait abstraction des changements de longueur qui accompagnent les tensions t et T, on doit avoir :

$$nr = n'r'$$

car le déplacement des poulies, mesuré à la circonférence, est le même pour les deux arbres ; mais, lorsque la permanence du régime est établie, la quantité de matière qui s'enroule sur l'une quelconque des deux poulies est la même que celle qui s'en déroule pendant le même temps ; cette quantité de matière répond, pour les deux brins, à des longueurs l, l', différentes ; car, en appelant E le coefficient d'élasticité, et σ la section de la courroie, on doit avoir :

$$\frac{l}{l'} = \frac{\frac{t}{\sigma} + E}{\frac{T}{\sigma} + E}$$

Sur la poulie menée, la courroie subit donc un glissement dans le sens du mouvement, tandis que, sur la poulie motrice, un effet opposé se produit ; au total, les choses se passent comme si la poulie menée enroulant la longueur

$$\frac{t}{\sigma} + E$$

1. *Annales des Mines*, 1862, T. I.

la poulie motrice devait enrouler la longueur

$$\frac{T}{\sigma} + E$$

on doit donc avoir :

$$\frac{nr}{n'r'} = \frac{\frac{T}{\sigma} + E}{\frac{t}{\sigma} + E}$$

On peut faire $E = 7$ pour les courroies simples en cuir (1); on a d'ailleurs, pour les courroies fort chargées :

$$\frac{T}{\sigma} = 0.40$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0.20$$

D'où

$$n'r' = 0.973\, nr$$

Tandis que pour les courroies peu fatiguées :

$$\frac{T}{\sigma} = 0.25$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0.125$$

et

$$n'r' = 0.983\, nr$$

nous admettons ci-dessus que la tension dans le brin conducteur est double de celle du brin conduit, ce qui répond à des conditions ordinaires pour l'arc embrassé (95, tableau).

M. Kretz a trouvé par ses expériences sur des courroies en cuir, chargées de cette manière :

$$n'r' = 0.98\, nr$$

L'arbre commandé subit donc une réduction α, de vitesse, qui dépend

1. Le millimètre carré est pris comme unité de section (Leloutre XVe expérience). M. Kretz adopte $E = 5.60$. M. Achard dans son mémoire sur la transmission et la distribution des forces motrices à longue distance, p. 29, fait $E = 15$.

des tensions de marche, et du coefficient d'élasticité. Pour plusieurs transmissions successives, la vitesse du dernier arbre est affectée d'un coefficient de réduction qui, dans les conditions ordinaires, prend les valeurs ci-dessous:

pour 3 arbres $\alpha = 0,98^2$ ou 0,96,
» 4 » $\alpha = 0.98^3$ ou 0,94,
» 5 » $\alpha = 0,98^4$ ou 0,92,
» 6 » $\alpha = 0,98^5$ ou 0,90.

Le ralentissement du sixième arbre atteint donc 10 %; il y a lieu, dans l'établissement des transmissions successives, de déterminer les rayons des poulies en tenant compte de ce glissement.

Les expériences d'allongement faites sur les cordes en chanvre ne sont pas assez complètes pour qu'on puisse assigner une valeur précise à leur coefficient d'élasticité; celui-ci paraît-être le même pour le chanvre de Manille et le chanvre de Russie, et est sans doute compris entre deux et trois fois celui du cuir lorsque les cordages ont de 30 à 40 millimètres de diamètre (1); le glissement permanent serait donc beaucoup moindre pour les cordes que pour les courroies; même en tenant compte du rapport élevé $\frac{T}{t}$ que permettent d'atteindre les poulies à gorge, on trouve

$$\alpha = 0.99$$

Dans les transmissions par câbles métalliques, le coefficient d'élasticité est très élevé par rapport à la charge de travail, et le glissement particulier dont nous nous occupons devient tout à fait insensible.

106. — Le glissement permanent entraîne une perte dont il n'a pas été tenu compte au n° 97, perte qui n'affecte pas la valeur de Pp, mais qui se traduit par un déplacement plus grand de ce couple; en désignant par ω et ω' les vitesses de rotation des arbres, le rapport du travail utile au travail dépensé, ou le rendement de la transmission, est donné par:

$$U = \frac{Qq\omega'}{Pp\omega}$$

1. Johow. *Hilfsbuch für den Schiffbau.* Berlin, Springer, 1884. (Expériences sur les cordages de Felten et Guillaume, faites au laboratoire technologique de Berlin). pp. 126-127.

Or,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n'}{n}$$

et (105)

$$\frac{n'}{n} = \alpha \frac{r}{r'}$$

c'est-à-dire :

$$U = \alpha \frac{Qq}{Pp} \frac{r}{r'}$$

α doit être pris égal à 0,98 pour les courroies en cuir.

107. — ***Comparaison entre les transmissions par courroie, par cordes et par engrenages.*** — Il peut être intéressant de comparer les résistances passives calculées pour des transmissions existantes, établies dans les conditions suivantes [1]:

1° *Transmission par courroie* de 1 mètre de largeur et 12 millimètres d'épaisseur

$$n' = 100$$
$$r' = 1^m500$$
$$r = 2^m650$$
$$f' = 0.05$$
$$\rho = 0.125$$
$$\rho' = 0.090$$

Les arbres sont supposés assez éloignés, et au même niveau ; le poids de la poulie menée et de son arbre est de 6,000 kilogrammes ; le volant moteur pèse, avec son arbre 20,000 kilogrammes. La puissance à transmettre est N = 400 chevaux.

Au lieu de résoudre le problème rigoureusement, nous calculons les résistances passives comme si chacune d'elles était seule, nous supposons aussi que les forces motrices et résistantes sont appliquées sous forme de couples. On trouve pour l'effort circonférentiel :

$$\frac{Qq}{r'} = T - t = 1910 \text{ kil.}$$

1. Transmissions établies par une maison de construction de Gand.

d'où, prenant

$$T + t = 1.2 \frac{K+1}{K-1} \frac{Qq}{r'}$$

avec

$$K = 2$$

on obtient :

$$T = 4393$$

$$t = 2483$$

$$\frac{T}{\sigma} = 0^k366$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0^k207$$

$$\alpha = 0.978$$

$$n' = \alpha \frac{r}{r'} n$$

d'où $n = 57,87$

Travail du frottement, par seconde, sur les fusées de l'arbre moteur :

$$\frac{2\pi n}{60} \times f' \rho \, [0.96 \times 20000 + 0.4 \, (T + t)] = 829 \text{ kgm.}$$

sur les fusées de la poulie réceptrice :

$$\frac{2\pi n'}{60} \times f' \rho' \, [0.96 \times 6000 + 0.4 \, (T + t)] = 401 \text{ kgm.}$$

Travail perdu par glissement, par seconde :

$$\frac{1}{\alpha} (1 - \alpha) \, N \times 75 = 675 \text{ kgm.}$$

Le travail perdu par suite de la raideur n'a pu être calculé faute de données.

2° *Transmission au moyen de 13 cordes* en chanvre de Manille de 40 millimètres de diamètre ; les gorges de poulies ont un angle $\beta = 45°$.

Bien qu'on puisse réaliser un rapport de tensions un peu supérieur à celui des courroies, nous adopterons aussi :

$$K = 2$$

et nous trouverons pour T et t, les mêmes valeurs que pour la courroie.

On a ici :

$$\frac{T}{\sigma} = 0^k27$$

$$\frac{t}{\sigma} = 0^k15$$

Avec E = 20, il vient :

$$\alpha = 0.994 \text{ et } n = 56.9$$

Le travail perdu par glissement est donc :

$$\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)\,N \times 75 = 181 \text{ kgm.}$$

Le travail perdu par la raideur (¹) sur le volant est, par seconde :

$$\frac{2\pi n}{60} \times 13 \times 0.02 \times 1.056 \times \frac{T}{13} = 552{,}5 \text{ kgm.}$$

et sur la poulie :

$$\frac{2\pi n'}{60} \times 13 \times 0.02 \times 1.056\,\frac{t}{13} = 548{,}9 \text{kgm.}$$

quant au frottement sur les fusées, il est le même que dans le premier cas pour l'arbre commandé, il est réduit à 815 kilogrammètres pour l'arbre moteur à cause de la valeur de n légèrement inférieure.

On a donc finalement le tableau ci-dessous.

	COURROIE	CORDES
Travail transmis	30.000 kgm.	30.000 kgm.
— de frottements sur les tourillons.	1230 ou 4 %	1216 ou 4 %
— du glissement.	675 ou 2.2 %	181 ou 0.6 %
— de la raideur	Inconnu (faible)	1101 ou 3.6 %

1. Le poids de la corde en chanvre de Manille est par mètre courant (44).

$$p = 1^k056$$

3° ***Pour une transmission par engrenages***, on aurait (67) en adoptant, pour la simplicité des calculs.

$$m = 150$$
$$m' = 265$$

et en prenant un effort circonférentiel transmis égal à celui des applications précédentes, soit X = 1,910 kilogrammes

$$Y - X = \pi f X \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$$

Si l'on prend ici le coefficient f des dents en fonte égal à 0,15, on a

$$Y - X = 0.0049\ X = 9^k36$$

et comme la vitesse à la circonférence est

$$\frac{2\pi n'r'}{60} = 15^m708$$

le frottement des dents n'absorbe par seconde qu'un travail insignifiant:

$$9.36 \times 15.708 = 147 \text{ kgm.}$$

Le frottement sur les fusées prend d'autres valeurs que dans les cas précédents; toutefois, les réactions des dents sont peu importantes en comparaison du poids mort des roues, on voit que l'élément en question ne peut différer beaucoup pour les trois modes de transmission envisagés.

Au point de vue du rendement, la transmission par engrenages apparait donc comme très supérieure, puis vient la courroie, enfin les cordes. Le principal inconvénient des engrenages est dans les trépidations, qui empêchent d'atteindre de grandes vitesses circonférentielles.

§ IV.

Systèmes dans lesquels se produisent des chocs.

108. — *Pilon mû par un arbre à cames.* — Proposons-nous de déterminer la puissance à communiquer à l'arbre à cames d'un pilon (fig. 106), pour maintenir une vitesse moyenne de n tours par minute, ou une vitesse angulaire moyenne $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$.

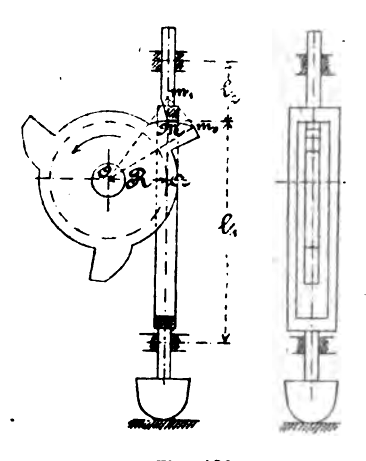


Fig. 106

Soit :

p le poids du pilon,

f la valeur unique du coefficient des divers frottements,

ρ le rayon des tourillons de l'arbre,

ω la vitesse angulaire, variable, du système tournant, composé de masses m situées à la distance r de l'axe.

Le profil Mm_0 de la came, est la développante de la circonférence OA, de rayon R ; au moment où le contact s'établit, le pilon au repos est rencontré par le point M de la came ; appelons ω_0 la vitesse angulaire de l'arbre à cet instant, et ω_1 la vitesse après le choc ; soit $AM = \lambda_0$.

Evaluons d'abord le travail à dépenser dans cette première période du mouvement :

1re période. — Le travail des forces extérieures, pouvant être négligé (47), appliquons au système tournant, isolé au préalable, le théorème des moments des quantités de mouvement, en tenant compte seulement des impulsions des forces instantanées et de leurs réactions, le choc ayant une durée θ.

$$(1) \qquad (\omega_0 - \omega_1) \Sigma mr^2 = \int_0^\theta (R + f\lambda_0 + f\rho) N dt$$

Pour le pilon isolé, nous aurons, par l'équation des quantités de mou-

vement projetées sur la verticale, en remarquant que la vitesse acquise à la fin du choc est ω_1 R, et que le frottement sur les guides est f^2N;

(2) $$\frac{p}{g}\,\omega_1\,R = \int_o^\theta (1 - f^2)\,N\,dt$$

En éliminant $\int_o^\theta N\,dt$ entre les deux équations, il vient :

(3) $$\frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{R + f\lambda_0 + fp}{1 - f^2}\,\frac{\frac{p}{g}R}{\Sigma\,mr^2}$$

Pendant le choc, le travail utile produit étant négligeable, la moitié de la force vive perdue par le système a dû être fournie par l'arbre à cames ; on peut l'établir, soit par l'expression de Carnot, soit d'une manière directe, car la vitesse ω_1 est connue en fonction de ω_0.

L'expression à laquelle on arrive ainsi est assez compliquée, on peut se contenter d'une solution approchée en négligeant les frottements ; on tire de l'équation (3) en faisant $f = o$:

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{\Sigma\,mr^2}{\Sigma\,mr^2 + \frac{p}{g}R^2}$$

On peut poser :

$$\Sigma\,mr^2 = \frac{P}{g}R^2$$

Le poids P étant calculé en conséquence, et l'on a alors :

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{P}{P + p}$$

La force vive de l'arbre à cames au moment du choc est :

$$\frac{P}{g}R^2\,\omega_0^2$$

La force vive de l'ensemble du système après le choc est :

$$\left(\frac{P + p}{g}\right) R^2\,\omega_1^2 \text{ ou } \frac{P}{g}R^2\omega_0^2\,\frac{P}{P + p}$$

La perte de force vive est donc :

$$\frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{P}{P+p}\right)$$

ou

$$\frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \frac{p}{P+p}$$

Le travail correspondant est :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \omega_0^2 \frac{p}{P+p}$$

ou encore :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \omega_0^2 R^2 \frac{1}{1+\frac{p}{P}}$$

Lorsque p est faible en comparaison de P, on voit que le travail dépensé pendant le choc est celui qui correspond à la moitié de la force vive du pilon, celui-ci étant supposé animé de la vitesse

$$\omega_0 R$$

qui est celle de l'arbre à cames au point A, immédiatement avant le choc.

D'ailleurs, lorsqu'on fait l'hypothèse ci-dessus, ω_1 tend vers ω_0 ; c'est-à-dire que l'arbre subit pendant le choc un ralentissement peu prononcé, on peut alors prendre :

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \Omega^2 R^2$$

2ᵉ *période*. — Pendant la 2ᵉ période, le pilon est soulevé par la came ; si l'on suppose que la vitesse angulaire de l'arbre est constante, et égale à Ω, on a pour le travail élémentaire des résistances pendant le temps *dt*, le poids de l'arbre étant négligé :

$$(NR + fN\lambda + fN\rho)\,\Omega\,dt$$

L'action N doit équilibrer le poids du pilon, et le frottement sur ses guides, on doit donc avoir :

$$N = p + f^2 N$$

d'où

$$N = \frac{p}{1 - f^2}$$

Le travail élémentaire devient :

$$\frac{p}{1-f^2}(R + f\lambda + f\rho)\,\Omega\,dt$$

λ est variable avec le temps ; si l'on désigne par λ_1 sa valeur limite à l'extrémité de la came, et par t_1 la durée de la période que nous considérons :

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \Omega R t_1$$
$$\lambda = \lambda_0 + \Omega R t$$

Le travail total pendant la deuxième période est donc :

$$\frac{p}{1-f^2}\,\Omega \int_0^{t_1} (R + f\lambda + f\rho)\,dt$$

ou, en intégrant, et remarquant que

$$t_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\Omega R}$$

$$T_2 = \frac{p(\lambda_1 - \lambda_0)}{1-f^2}\left[1 + \frac{f}{R}\left(\rho + \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}\right)\right]$$

N.-B. — On peut tenir compte séparément du travail de frottement dû au poids de l'arbre à cames, bien que ce poids se compose en réalité avec les autres forces, mais l'erreur commise ainsi est très faible, désignons le par P_1 ; l'angle décrit par l'arbre pendant la deuxième période est :

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}$$

Le travail du frottement cherché est donc :

$$t_2 = f'\rho\,\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}\,P_1$$

3e période. — Enfin, jusqu'au moment où la came suivante doit venir soulever le pilon, après sa chute, il n'y a d'autre travail à communiquer à l'arbre que celui destiné à vaincre le frottement sur les tourillons ; soit m_1 le nombre des cames, l'angle décrit pendant la deuxième et la troisième périodes réunies est :

$$\frac{2\pi}{m_1}$$

Il en résulte que l'angle décrit pendant la troisième période seule est :

$$\frac{2\pi}{m_1} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}$$

on trouve ainsi, pour le travail absorbé par le frottement des tourillons :

$$T_3 = f'\rho\left(\frac{2\pi}{m_1} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{R}\right) P_1$$

Le travail absorbé pendant un tour de l'arbre à cames est donc :

$$m_1 (T_1 + T_2 + t_2 + T_3)$$

et la puissance cherchée a pour expression :

$$N = \frac{n}{60 \times 75} m_1 (T_1 + T_2 + t_2 + T_3)$$

Le travail utile effectué pendant les trois périodes considérées se réduit à la levée du pilon à la hauteur $(\lambda_1 - \lambda_0)$, le rendement de la machine est ainsi :

$$U = \frac{p(\lambda_1 - \lambda_0)}{T_1 + T_2 + t_2 + T_3}$$

109. — Les réactions qui se produisent sur les appuis pendant le choc occasionnent une perte de force vive dont nous n'avons pas tenu compte, car les supports se déplacent légèrement sous l'action des pressions intenses dues aux forces instantanées. En réalité, la roue à cames, en changeant de vitesse dans un temps très court, exerce sur ses appuis un effet analogue à celui qu'elle produit sur le pilon ; celui-ci transmet même à ses guides par suite du frottement ou par pression

directe, d'après la constitution du système [1], des chocs plus ou moins intenses.

Les pertes de force vive dues aux ébranlements échappent au calcul, parce que les masses intéressées sont ordinairement mal définies.

On peut dans quelques cas, faire en sorte que les appuis ne supportent aucune réaction pendant le choc, soit en donnant à la pièce une forme convenable, soit en ajoutant des masses en certains endroits, soit en choisissant le point où se produit le choc. Pour que l'appui ne subisse aucune réaction, il faut qu'il y ait équilibre entre la force instantanée provenant du choc, et les réactions d'inertie de la masse choquée; ainsi, dans le cas d'une barre prismatique pesante, de longueur L, oscillant au point O (fig. 107), à une distance l du milieu, et recevant une percussion à la distance λ de l'axe, on sait que la condition nécessaire pour que le point O ne soit pas sollicité est :

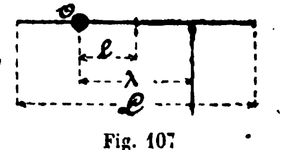


Fig. 107

$$\lambda = \frac{\Sigma mr^2}{Ml}$$

Σmr^2 est le moment d'inertie par rapport au point O,

M est la masse de la barre,

Lorsque l'articulation est à l'extrémité, on a :

$$l = \frac{1}{2} L$$

$$\lambda = \frac{2}{3} L$$

Lorsque l'on ajoute une masse à l'extrémité d'un manche prismatique oscillant autour d'une articulation qui se trouve à l'extrémité opposée, la percussion doit se rapprocher de cette masse. Cette condition était plus ou moins remplie dans les marteaux dits à *l'allemande*; le marteau frontal était dans des conditions moins bonnes; enfin, le martinet, ou marteau à bascule, était très défectueux au point de vue des percussions exercées sur son axe.

1. Dans la fig. 106, nous avons à dessein disposé la tige du pilon de manière à éviter le choc direct sur les guides ; si cette tige, au lieu d'être attaquée sur l'axe au point M, était déviée d'une certaine quantité à droite de ce point, il est visible qu'il se produirait sur les guides des forces instantanées qui se développeraient en raisons des distances l_1 et l_2; les frottements dus aux guides seraient aussi beaucoup augmentés.

CHAPITRE III

Régulateurs du mouvement.

110.—Le mouvement des machines est rarement uniforme, elles devraient d'abord, pour satisfaire à cette condition, ne comporter que des pièces animées de mouvements de rotation ou de translation continus (11); lorsque les pièces à mouvement alternatif sont de peu d'importance, on peut cependant admettre que le mouvement du système est uniforme lorsque sa force vive est constante, mais il faut, pour qu'il en soit ainsi, que les forces motrices et les résistances utiles et passives se fassent équilibre sur le système, sans l'intervention des réactions d'inertie, qui sont nulles. Si cette égalité n'a pas lieu, il n'existe d'autres moyens pour réaliser l'uniformité, que d'appliquer au système, des travaux de grandeur et de signe convenables. On peut citer, comme rentrant dans cette catégorie, les freins employés sur les pentes pour absorber le travail moteur dû au poids des trains, les cataractes à huile employées dans certains mécanismes (7e fascicule, n° 67), les contrepoids employés pour équilibrer les masses tournantes excentriques, les arbres à ailettes des mouvements d'horlogerie, etc.

Il arrive plus souvent que le mouvement est périodique (13), dans ce cas, on peut se proposer de réduire, pour une pièce déterminée, les écarts de vitesse qui se produisent pendant la période, en assignant à ces écarts une limite qu'ils ne peuvent dépasser. Ainsi, dans les moteurs à vapeur, on cherche à régulariser le mouvement de rotation de l'arbre de couche. On conçoit que, sans rien changer aux variations de la force vive, lesquelles ne dépendent que de l'intégrale des travaux pendant le temps correspondant, on peut réduire l'écart des vitesses en augmentant les masses mouvantes, tel est le mode d'action du volant.

Pour que le mouvement soit périodique, il faut que l'intégrale des travaux de la période soit nulle; lorsque les forces motrices ou les résistances varient d'une période à l'autre, il est nécessaire d'agir, soit

sur le travail moteur, soit sur le travail résistant passif; ce dernier mode d'action entraîne, comme conséquence, un mauvais emploi des forces motrices, c'est donc le travail moteur qu'il convient d'augmenter ou de diminuer; on y arrive au moyen d'appareils automatiques, basés le plus souvent sur l'action de la force centrifuge.

La régularisation comprend donc deux groupes d'organes bien distincts, les volants, destinés à uniformiser la vitesse dans l'intervalle de la période, et les régulateurs proprement dits, destinés à rendre le mouvement périodique, en agissant sur le travail.

§ I.

DU VOLANT

111. — La force vive est donnée à chaque instant par l'équation

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \int_{t_0}^{t} [\Sigma\tau_m - (\Sigma\tau_u + \Sigma\tau_r)\, dt$$

Le mode de représentation graphique employé au n° 12 donne, pour la période, les courbes de travaux (fig. 108); le trait plein représente

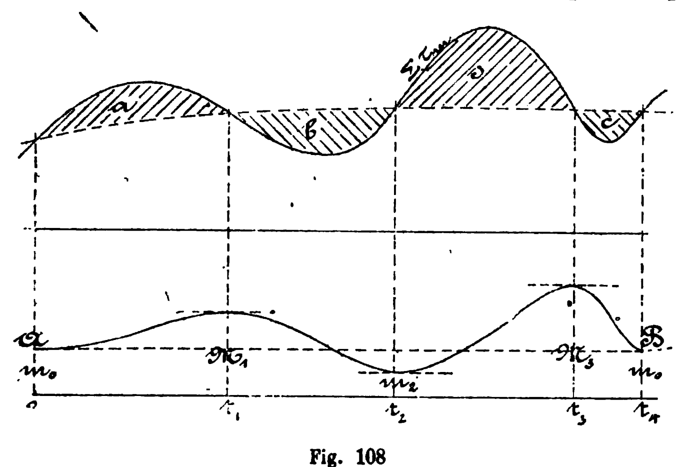


Fig. 108

$\Sigma\tau_m$, le trait pointillé se rapporte aux travaux résistants; admettons que la période soit comptée à partir du temps o, pour lequel la force vive est

$\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$; la loi des forces vives est fournie par les ordonnées de la courbe AB, celle-ci comporte, pour la période, des maxima et des minima, lorsqu'il s'agit d'une machine composée exclusivement de pièces tournantes et de pièces à translation continue (train roulant), les pièces sont liées de telle manière que les valeurs les plus grandes et les plus petites de la force vive, correspondent en même temps aux valeurs des vitesses maxima et minima de toutes les pièces, tandis qu'il n'en est pas nécessairement ainsi lorsque le système est constitué autrement, il y a donc deux cas principaux à considérer.

Premier cas.

SYSTÈME DE PIÈCES TOURNANTES.

112. — Lorsque le système est composé exclusivement de masses tournantes, ou que les pièces à mouvement alternatif sont peu importantes, les masses sont réparties sur un ou plusieurs arbres dont les vitesses angulaires sont :

$$\omega, \quad \alpha\omega, \quad \beta\omega, \quad \text{etc.}$$

La force vive à l'instant t est alors :

$$\Sigma m r^2 \omega^2 + \Sigma m' r'^2 \alpha^2 \omega^2 +$$

ou

$$\omega^2 \left(\Sigma m r^2 + \alpha^2 \Sigma m' r'^2 + \beta^2 \Sigma m'' r''^2 \ldots\ldots\right)$$

Si l'on désigne par A l'expression comprise entre parenthèses, en remarquant qu'elle est une fonction simple des moments d'inertie de chacune des pièces et des rapports entre leurs vitesses angulaires, il vient pour l'équation des forces vives :

$$\frac{1}{2} A \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = \int_{t_0}^{t} \left[\Sigma \tau_m - (\Sigma \tau_u + \Sigma \tau_r)\right] dt$$

On peut démontrer que, lorsque la différence entre le travail moteur et les travaux résistants ne comporte pas plus de quatre boucles par période, les unes positives, les autres négatives, les valeurs la plus grande et la plus petite de la force vive correspondent aux extrémités de

la boucle la plus grande [1]. Ainsi, soit s la boucle représentant le plus grand excès de travail qui se produit dans la période, on a :

$$\begin{aligned} M_1 - m_0 &= a \\ M_1 - m_2 &= b \\ M_3 - m_2 &= s \\ M_3 - m_0 &= c \end{aligned}$$

on tire facilement de ces équations :

$$\begin{aligned} M_3 - M_1 &= s - b \\ m_0 - m_2 &= s - c \end{aligned}$$

à cause de l'hypothèse faite sur la valeur de s, on a :

$$\begin{aligned} M_3 &> M_1 \\ m_2 &< m_0 \end{aligned}$$

M_3 est donc le plus grand des deux maxima, m_2 est en même temps le plus petit des deux minima de force vive

On est certain, par suite de la constitution du système, que la valeur la plus faible de ω se produit à l'instant t_2, la valeur la plus grande correspond à l'instant t_3, on aura, en désignant par ω_2 et ω_3 ces valeurs :

$$\frac{1}{2} A (\omega_3^2 - \omega_2^2) = s$$

ou

$$\frac{1}{2} A (\omega_3 - \omega_2) = \frac{s}{\omega_3 + \omega_2}$$

ω_2 et ω_3 étant les vitesses extrêmes, on peut sans grande erreur poser, si Ω désigne la vitesse de régime :

$$\Omega = \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}$$

il vient alors :

$$\omega_3 - \omega_2 = \frac{s}{A\Omega}$$

On s'impose la condition :

$$\omega_3 - \omega_2 = \frac{\Omega}{n}$$

n étant un coefficient choisi à volonté pour limiter comme on veut le plus grand écart des vitesses $\omega_3 - \omega_2$.

1. La propriété cesse d'être générale lorsque le diagramme en question comprend plus de quatre boucles.

Par la combinaison des deux dernières équations, on obtient :

$$A = \frac{ns}{\Omega^2}$$

On réalise, au besoin, la valeur de A, au moyen de masses additionnelles; dans la plupart des cas, il n'y a qu'un arbre tournant, A sert à calculer les dimensions du volant dont on peut *a priori* se donner le diamètre, la largeur de jante, etc. ***La valeur de* A *varie en raison inverse de* Ω^2, *il y a donc intérêt, pour diminuer le poids du volant, à lui donner une vitesse angulaire aussi grande que possible.*** L'influence de la vitesse de rotation peut même être plus considérable : ainsi, dans une machine à vapeur de puissance donnée, s varie en raison inverse de la vitesse angulaire, ou du nombre de tours adopté.

Pour déterminer s, on ne peut se servir du diagramme τ en fonction du temps, car on ne connaît pas *a priori* la loi du mouvement (14); les forces sollicitantes sont données, non en fonction du temps, mais d'après la position de leur point d'application, il est donc plus facile d'exprimer le travail des forces en fonction de l'angle décrit par l'une des pièces, et d'obtenir par l'intégration les excès tels que a, b, s, c, entre lesquels on choisit le plus grand.

Il est souvent commode d'opérer graphiquement.

113. — *Exemple.* — On connaît, pour chaque position de la crossette d'une machine à vapeur, la pression exercée par le piston, représentée par l'ordonnée P (fig. 109) ; on suppose que la résistance, appliquée tangentiellement au volant, est constante, on néglige le frottement.

Considérons le bouton M de la manivelle, il reçoit la composante motrice X de la bielle ; d'autre part, on peut supposer que la résistance est appliquée directement au même point, sous forme d'une force constante Q. On développe le chemin décrit par le bouton M, en partageant la circonférence en m parties égales, et en portant m divisions égales et arbitraires, sur la ligne M'_0 M'_0. Supposons que M soit l'un des points de division, et M' le point correspondant du développement; cherchons la valeur de X.

Soit ds le déplacement du point C, le travail élémentaire de P est Pds ; soit ds' le déplacement correspondant du point M sur la circonférence, on doit avoir :

$$X\,ds' = P ds$$

Élevons en C la perpendiculaire au chemin $C_0\, C_1$ décrit par la crossette,

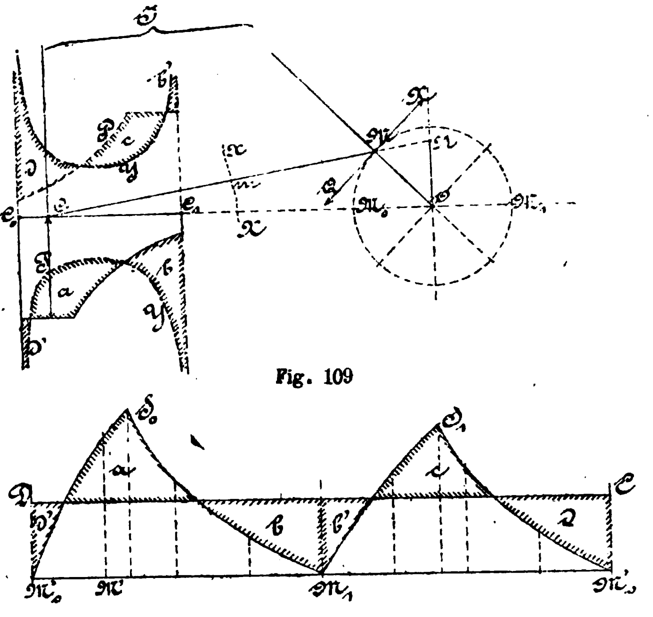


Fig. 109

le point I où cette perpendiculaire rencontre le rayon OM prolongé, est le centre instantané de la bielle, ce qui donne :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{IM}{IC}$$

Menons par O la perpendiculaire ON à OC, et prolongeons CM jusqu'au point N ; on a, par les deux triangles semblables ICM, MNO :

$$\frac{IM}{IC} = \frac{OM}{ON}$$

d'où

$$X = \frac{P}{OM}\, ON$$

on voit que l'effort tangentiel X est proportionnel au produit $P \times ON$; le diviseur OM est constant, et ne peut avoir d'influence que sur l'échelle de la figure cherchée, échelle qui est arbitraire, et dont nous ne devons pas nous préoccuper.

Il suffit donc de mener l'ordonnée M' égale au produit $P \times ON$, et d'opérer de la même manière pour les autres points, on obtient ainsi une surface $M'_0S_0M_1\, S_1M'_0$, proportionnelle au travail moteur.

La résistance tangentielle Q, étant constante, peut s'obtenir, à l'échelle de la figure, en construisant le rectangle équivalent $M'_0DEM'_0$; celui-ci représente le travail de la machine pour un tour, ou le travail de l'effort P pendant les deux courses d'aller et retour, il a pour valeur un nombre connu de kilogrammètres, qui permet de fixer l'échelle de la figure et par conséquent, d'évaluer les travaux a, $b + b'$, c, $d + d'$; le plus grand, parmi ces travaux, est la valeur cherchée de s.

114. — Le choix du point M, où se manifestent la force motrice et la résistance, est arbitraire; on aurait pu tout aussi bien prendre le point C, et, d'une manière générale, si l'on coupe une pièce de la machine par une section XX, on peut, en isolant la partie du mécanisme laissée à gauche de cette section, chercher l'effort qui, appliqué en m, équilibrerait la force motrice P; en isolant le système de droite, on peut de même chercher la force qui, appliquée au même point m, équilibrerait la résistance Q, et, en projetant ces forces sur la trajectoire du point m, on arriverait à un diagramme du travail qui pourrait servir au calcul du volant.

Mais on voit qu'il sera plus simple, en général, de choisir un point tel que M ou C, dont la trajectoire est connue, et où l'on détermine facilement les forces.

Pour opérer au moyen du point C, il faudrait chercher la force Y, qui, appliquée en ce point, tiendrait lieu sur la machine, de la force constante Q, appliquée en M; or on doit avoir, en vertu de la relation déjà établie :

$$Q = \frac{Y}{OM}\ ON$$

D'où

$$Y = \frac{Q}{ON}\ OM$$

Les ordonnées correspondant à C_0 et C_1 sont infinies, attendu que, pour ces positions,

$$ON = 0$$

la courbe des valeurs de Y présente l'allure indiquée, figure 109, les surfaces bordées de hachures, et désignées par les lettres a, b, b', c, d, d', sont équivalentes à celles désignées au numéro précédent par les mêmes lettres, et peuvent donc servir au calcul du volant, toutefois, dans ce cas particulier, il serait impossible de trouver, par l'intégration

mécanique, la valeur des surfaces qui présentent une ordonnée infinie. Le procédé employé en premier lieu reste donc le seul pratique.

115. — Le volant ne se présente pas toujours sous forme d'une pièce détachée servant uniquement à un but de régularisation; dans les machines à vapeur, la poulie ou l'engrenage de transmission servent de volant; dans les roues hydrauliques et les turbines, la masse même de la machine est presque toujours suffisante pour assurer le degré de régularité voulu, à moins que les résistances ne varient à chaque tour dans de larges limites (7e fascicule, n° 61).

Le *coefficient de régularité n*, est donné par la nature des opérateurs à commander ; voici quelques-unes des valeurs qui peuvent être admises (1) :

Pompes................................	20 à 30
Tissages et papeteries..................	40
Moulins à farine......................	50
Filatures (numéros gros................	50 à 60
» (» fins	100

Machines ordinaires actionnant des transmissions par courroie 35.
» » » » engrenages 50.

Deuxième cas

SYSTÈME COMPRENANT DES MASSES ANIMÉES D'UN MOUVEMENT ALTERNATIF.

116. — Lorsqu'on ne peut négliger la force vive des pièces à mouvement alternatif, soit à raison de leur masse, soit à cause de leur vitesse, la théorie générale n'est plus applicable, car l'équation des forces vives dépend de la composition du système, qui peut être diversifiée à l'infini. Il faut exprimer les forces vives de toutes les pièces en fonction de la vitesse de celle dont on veut régulariser le mouvement, et calculer de proche en proche, au moyen de l'équation des forces vives, et en se servant du diagramme du travail, la vitesse que prend cette pièce pour des positions équidistantes. En prenant la valeur ω_m de la vitesse la plus petite et ω de la vitesse la plus grande, on doit obtenir la vitesse de régime, connue *a priori* :

$$\Omega = \frac{\omega_m + \omega_M}{2}$$

1. Des Ingénieurs *Taschenbuch von dem Verein Hutte.*

S'il n'en était pas ainsi, on devrait recommencer le calcul des vitesses, en partant d'une valeur initiale plus grande ou plus faible que celle choisie d'abord. Lorsque la vérification a lieu, on en conclut que ω_M et ω_m étant les valeurs extrêmes de la vitesse pendant la période, le coefficient de régularité a pour valeur :

$$n = \frac{\omega_M - \omega_m}{\Omega} = 2\,\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_M + \omega_m}$$

Si le coefficient de régularité ainsi obtenu n'est pas suffisant, on modifie les masses dans un sens convenable, et l'on applique à nouveau la méthode précédente.

La complication du problème provient de ce que les valeurs ω_M et ω_m qui se rapportent à la pièce à régulariser ne correspondent pas nécessairement aux valeurs extrêmes des forces vives de l'ensemble des masses ; de même, il est impossible de prévoir *a priori* quelles sont les masses à augmenter ou à diminuer pour obtenir l'effet voulu, il peut arriver qu'en augmentant ou en diminuant la masse de pièces à mouvement alternatif on agisse dans le même sens sur la régularité du mouvement de rotation d'une machine à vapeur, mais l'effet peut se produire en sens contraire, et dépend entièrement de l'agencement du système et des rapports numériques existant entre ses diverses parties.

117. — *Exemple 1. Mécanisme à cadre.* — Dans le système à cadre (fig. 110), on connait le diagramme de l'effort P, la force Q est supposée constante ; soit m_1 la masse des pièces à mouvement alternatif, ω la vitesse angulaire de l'arbre à un instant quelconque, R le rayon de la manivelle, Σmr^2 le moment d'inertie du système tournant ; la force vive a pour expression :

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,\Sigma mr^2 + \frac{1}{2}\,m_1\,\omega^2 R^2 \sin^2 \alpha$$

ou

$$\omega^2 \left(\frac{1}{2}\,\Sigma\, mr^2 + \frac{1}{2}\,m_1 R^2 \sin^2\alpha\right)$$

On peut tracer le diagramme de l'effort moteur P sin α, et de la résistance Q, en portant en développement les arcs décrits par M; si on dé-

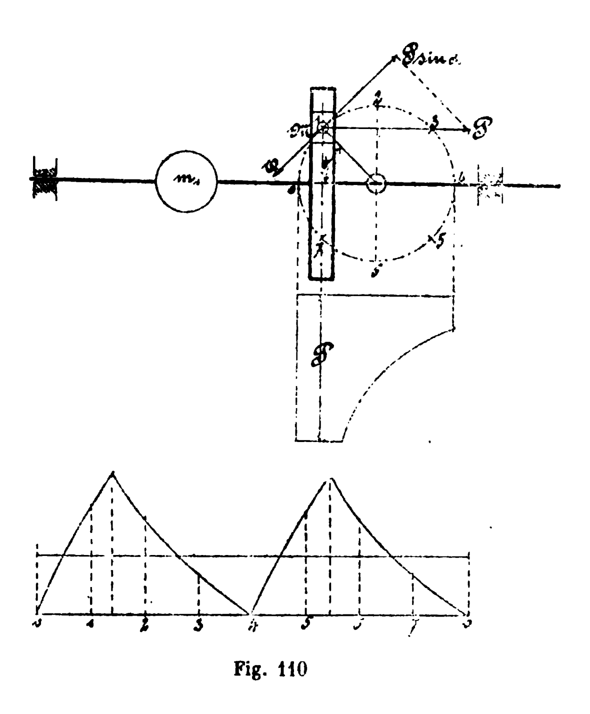


Fig. 110

signe par ω_0, ω_1, ω_2..., les vitesses angulaires correspondant aux positions 0, 1, 2, 3 etc., du bouton de manivelle, on aura :

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}\Sigma mr^2 + (\omega_1^2 \sin^2 \alpha_1 - \omega_0^2)\frac{1}{2}m_1 R^2 = \int_0^{\alpha_1} (P \sin \alpha - Q)\, R d\alpha$$

Équation qui permettra de trouver ω_1 en fonction de ω_0
on a de même :

$$(\omega_2^2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}\Sigma mr^2 + (\omega_2^2 \sin^2 \alpha_2 - \omega_0^2)\frac{1}{2}m_1 R^2 = \int_0^{\alpha_2} (P \sin \alpha - Q)\, R d\alpha$$

qui permettra de trouver ω_2, et ainsi de suite.

118. — *Exemple 2. Mécanisme à bielle.* — Proposons-nous de trou-

ver, à un instant quelconque, l'expression de la force vive de toutes les masses de ce système, en fonction de la vitesse angulaire ω de l'arbre ; soit m_1 la masse qui participe au mouvement de la crossette ; on démontre rapidement, par la considération du centre instantané de la bielle, que la vitesse de C (fig. 111), est $\omega \times ON$, et que la vitesse d'un point intermédiaire G est $\omega \times OL$, le point L étant obtenu en menant OL parallèle à IG, ou par la condition

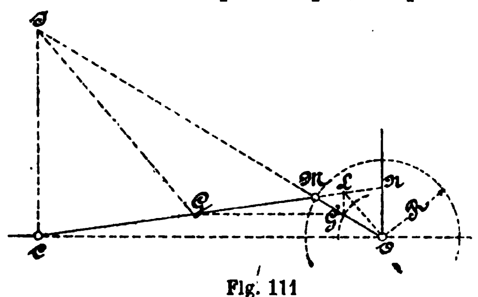


Fig. 111

$$\frac{CG}{CM} = \frac{LN}{MN}$$

On peut encore trouver le point L en menant GG' parallèle à CO, et G'L parallèle à ON [1] ; pour un point particulier de la bielle, OG' est constant, il suffit donc de décrire la circonférence de rayon OG', qui peut servir pour toutes les positions.

La force vive du système comprend, à l'instant considéré

1° la force vive des pièces liées invariablement à l'arbre

$$\omega^2 \Sigma mr^2 \tag{1}$$

ou, en appelant **A** le moment d'inertie de ces pièces autour de l'axe de rotation :

$$A\omega^2$$

2° la force vive de la masse m_1 :

$$m_1 \omega^2 \overline{ON}^2 \tag{2}$$

3° la force vive de la bielle, qui se compose de la force vive due au mouvement de translation de son centre de gravité, augmentée de celle due au mouvement de rotation autour de ce point ; la force vive de translation est, d'après ce qui a été trouvé, et en désignant par m_2 la masse de la bielle :

$$m_2 \omega^2 \overline{OL}^2$$

1. Cette construction a été employée par M. Massau.

La vitesse angulaire de rotation de la bielle autour de son centre de gravité est

$$\omega \frac{MN}{b}$$

b étant la longueur de la bielle.

Si donc on désigne par ρ le rayon de giration de cette pièce pour un axe passant par le centre de gravité, la force vive due au mouvement de rotation devient :

$$\frac{m_1 \rho^2}{b^2} \omega^2 \overline{MN}^2$$

MN atteint toujours sa valeur maxima au point mort, pourvu que l'on ait $b > OM$, ce qui est nécessairement réalisé.

En résumé, la force vive totale de la bielle est

$$(3) \qquad m_1 \omega^2 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2} \overline{MN}^2\right)$$

(on peut construire graphiquement [1] l'expression ci-dessus).

La force vive du système se compose des quantités (1), (2) et (3), elle est ainsi :

$$\omega^2 \left[A + m_1 \overline{ON}^2 + m_1 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2} \overline{MN}^2\right)\right]$$

On peut, sans difficulté, employer la méthode générale (116) et trouver les valeurs de ω pour autant de positions que l'on voudra du point M.

Même cas. Méthode approchée. — Lorsque les pièces à mouvement alternatif ont peu de masse par rapport au volant, on peut évaluer leur force vive en supposant que ω est constant et égal à la vitesse de régime; on a alors, au point mort, choisi pour position initiale: $OL = OG'$;

1. Dans le cas d'une bielle prismatique, $\rho^2 = \frac{b^2}{12}$

On a donc $\frac{\rho^2}{b^2}\overline{MN}^2 = \frac{\overline{MN}^2}{12}$ et la force vive (3) devient :

$$m_1 \omega^2 \left(\overline{OL}^2 + \frac{\overline{MN}^2}{12}\right)$$

qu'on peut construire au moyen d'un angle droit.

$MN = OM = R$; $ON = O$. Choisissons le point M, quelconque, comme position finale :

$$\frac{1}{2} A\omega_1^2 = \frac{1}{2} A\omega_0^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \left[m_1 \left(\overline{OG}^2 - \overline{OL}^2 + \frac{\rho^2}{b^2}(R^2 - \overline{MN}^2)\right) - m_1 \overline{ON}^2\right] + t$$

t est l'excès positif ou négatif du travail moteur sur le travail résistant pendant la fraction de tour considérée, et résulte du diagramme de ces travaux.

119. — *Volants des machines à mouvement non périodique.* — Le volant est employé dans certaines machines à mouvement non périodique telles que les laminoirs, les machines à forger, à poinçonner, à cisailler etc., qui absorbent, d'une manière intermittente, de grandes quantités de travail; le rôle du volant est alors tout spécial, il sert à tenir en réserve le travail moteur développé pendant un temps plus ou moins long, pour le restituer dans la période très courte où les résistances sont appliquées à la machine. Ces volants doivent donc être calculés de manière à ce que leur demi-force vive, acquise après un certain nombre de tours, ajoutée au travail que les actions motrices continuent à développer, puisse vaincre le travail résistant que l'on a en vue ; ils doivent être d'autant plus lourds, que le travail moteur développé par tour est plus faible en comparaison du travail résistant ; on ne pourrait les ramener aux dimensions des volants ordinaires qu'à la condition d'employer une machine motrice beaucoup plus puissante et dont la marche aurait l'inconvénient d'être intermittente.

L'énergie d'un volant en marche a pour mesure

$$\frac{1}{2} A\omega^2$$

elle augmente donc rapidement avec la vitesse, malheureusement, la force centrifuge qui tend à rompre la jante et les bras, augmente dans le même rapport, et rend très difficile la construction des volants à grande vitesse. L'inertie de la jante soumet les bras à la flexion et tend à les briser lors de l'application brusque de la résistance. Les volants des laminoirs, à raison de l'importance des efforts qui sont en jeu, doivent satisfaire à des conditions spéciales de construction [1].

1. On fait même usage des volants dont la jante est constituée par un enroulement en fil d'acier agissant comme un frettage (Fabrication des tubes par le procédé Mannesman).

120. — *Position à donner aux volants.* — Tous les organes de transmission situés entre l'action motrice et le volant supportent des fatigues qui ne dépendent que de cette action motrice; au contraire, les éléments compris entre le volant et la résistance à vaincre sont fatigués en raison de la résistance. Il convient donc de placer le volant aussi près que possible de l'action la plus variable: ainsi, dans les machines à vapeur, le volant fait partie du moteur; par contre, lorsque l'on doit commander des opérateurs à résistance très variable, il convient de leur attribuer, à chacun, une certaine partie du volant.

§ II

DES RÉGULATEURS

121. — Le régulateur proprement dit doit agir automatiquement pour diminuer le travail moteur lorsque celui-ci dépasse le travail résistant de la période, ou vice-versa; il ne saurait donc maintenir la vitesse rigoureusement constante, attendu qu'il ne peut intervenir que par suite d'une modification de la vitesse; d'ailleurs, dans tous les moteurs à mouvement périodique, la vitesse varie, dans chaque période, entre les limites définies par le coefficient de régularité du volant, le régulateur ne doit agir qu'en dehors de ces limites.

Le régulateur est surtout applicable aux machines dans lesquelles on emploie un fluide comme véhicule de l'action motrice, et son action s'exerce alors de trois manières différentes :

1° par étranglement de la section d'arrivée du fluide (moteurs hydrauliques, moteurs à vapeur).

2° par diminution du volume d'introduction (machines à vapeur).

3° par suppression momentanée d'introduction (moteurs à gaz).

Nous n'avons pas à étudier ici le mode d'action du régulateur, c'est-à-dire sa liaison avec le mécanisme à régulariser, il nous suffit de supposer que cette liaison est opérée d'une manière efficace, ce qui aura lieu, en effet, si, pour la vitesse la plus grande que l'on accepte à l'arbre du régulateur, la machine ne développe que la quantité de travail moteur nécessaire pour vaincre ses résistances passives, tandis que, pour la vitesse la plus faible permise, la machine développe tout le travail dont elle est

susceptible [1]. Nous supposons encore que la distribution de l'action motrice reste sous la dépendance du régulateur pendant toute la course de celui-ci.

Le travail moteur développé par les régulateurs se mouvant même dans toute l'étendue de leur course, est très faible, ils ne peuvent actionner que des mécanismes peu résistants, et l'on se trouve parfois obligé de les faire agir par l'intermédiaire d'une force motrice étrangère, ou d'un *servo-moteur*. Il en est ainsi pour les vannes des moteurs hydrauliques, où le régulateur détermine la mise en action d'un embrayage. Dans le turbo-moteur de Parson, le régulateur agit sur un servo-moteur à air raréfié ; le régulateur à énergie de vapeur de M. Von Luhde comprend un petit cylindre à vapeur auxiliaire ayant quelque analogie avec les appareils de changement de marche des grandes machines réversibles.

L'étude des organes régleurs ne peut être séparée de celle des récepteurs auxquels ils sont appliqués.

Le fonctionnement du régulateur est déterminé par l'équilibre qui s'établit entre les forces d'inertie de certaines masses qui entrent dans sa composition, et des forces antagonistes empruntées soit à des contrepoids, soit à des ressorts. Les appareils à contrepoids comprennent, comme cas particulier, celui où le poids des masses dont on emprunte l'inertie est lui-même la force antagoniste.

A. — RÉGULATEURS A CONTREPOIDS

122. — Dans le pendule conique, attribué à Watt, et qui a servi de point de départ à tous les autres, deux bras sont articulés à une traverse calée sur un arbre vertical, et sont reliés, au moyen de bielles, à un manchon qui peut se déplacer en glissant dans le sens de la hauteur.

Chaque valeur de la vitesse angulaire détermine une position particulière des bras, le mouvement de l'appareil régleur est pris sur le manchon. Dans le but de donner à ce régulateur des propriétés spéciales qui ne pourront être définies que par la suite, on a imaginé un grand nombre de dispositions, qui peuvent toutefois se rattacher à quelques types ; la confusion que l'on a faite entre plusieurs propriétés très différentes, a engagé beaucoup d'inventeurs dans une fausse voie ;

1. Cela veut dire que le régulateur étant au sommet de sa course, le canal d'arrivée doit être fermé, ou l'introduction nulle, et vice versa.

MM. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery [1] ont sérieusement contribué, par l'examen qu'ils ont fait du rôle des résistances passives, à préciser le problème, et à redresser certaines erreurs qui avaient cours il y a quelques années au sujet de l'isochronisme ; nous tiendrons compte, avec eux, de la résistance appliquée au manchon, et qui change de sens avec le mouvement, en remplaçant toutefois les calculs laborieux [2] auxquels on est conduit dans l'application, par la méthode semi-graphique employée par M. Léauté [3].

(M. Herrmann [4] a appliqué aux régulateurs à force centrifuge une méthode entièrement graphique).

La valeur d'un régulateur est caractérisée par un certain nombre de qualités, parmi lesquelles les plus importantes sont :

la sensibilité ;

la régularité ;

l'isochronisme ;

l'énergie.

Pour bien fixer le sens de ces termes, nous prendrons d'abord le cas d'un régulateur de Watt, dans la construction duquel nous introduirons des rapports simples, de manière à éviter toute complication de calcul. Nous supposerons, ainsi qu'on le fait d'ordinaire, que le régulateur prend instantanément la position qui correspond à l'équilibre statique des forces en jeu, condition qui n'est réalisée dans la pratique qu'après un certain nombre d'oscillations.

Soit, dans l'appareil (fig. 112),

P le poids de chaque boule ;

Q la moitié du poids du manchon, portée par l'articulation O', comprenant aussi, le cas échéant, la composante verticale due au mécanisme de liaison du manchon avec l'appareil régleur ;

F la résistance appliquée à chaque articulation O', dirigée toujours en sens contraire du mouvement ;

$$OO = O'O' = 2a$$
$$OM = O'M = \frac{1}{2} OB = l$$

1. *Théorie nouvelle des régulateurs.* — Liège, Desoer. 1887. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*, 1889, p. 33.
2. Uhland. — *Handbuch fur den Praktischen Maschinen-Construkteur*, vol. I, p. 236. — dito supplément, p. 112.
3. *Note sur les régulateurs*, etc., par M. Léauté — Appendice à l'ouvrage : *Eléments de construction des machines*, par W. C. Unwin. — Paris, Gauthier-Villars.
4. G. Herrmann. — *Die Graphische Untersuchung der Centrifugal Regulatoren.* Berlin, Springer, 1886.

α l'angle des bras avec la verticale.

Le poids des bras et des bielles est négligé, ainsi que le frottement sur les articulations O, M, O', qu'on doit s'attacher à rendre insignifiant en pratique.

L'équilibre doit être examiné séparément pour l'ouverture et la fermeture des bras, attendu que, par suite du changement de sens de la force F, l'état de sollicitation est différent pour ces deux mouvements.

En appelant ω' et ω'' les vitesses angulaires correspondant à la valeur de α, pour l'ouverture et la fermeture, respectivement, on a :

$$\omega'^2 = g \frac{P + Q + F}{P(a + 2l \sin\alpha)} tg\,\alpha \tag{1}$$

$$\omega''^2 = g \frac{P + Q - F}{P(a + 2l \sin\alpha)} tg\,\alpha \tag{2}$$

On peut construire un diagramme donnant, pour chaque position du

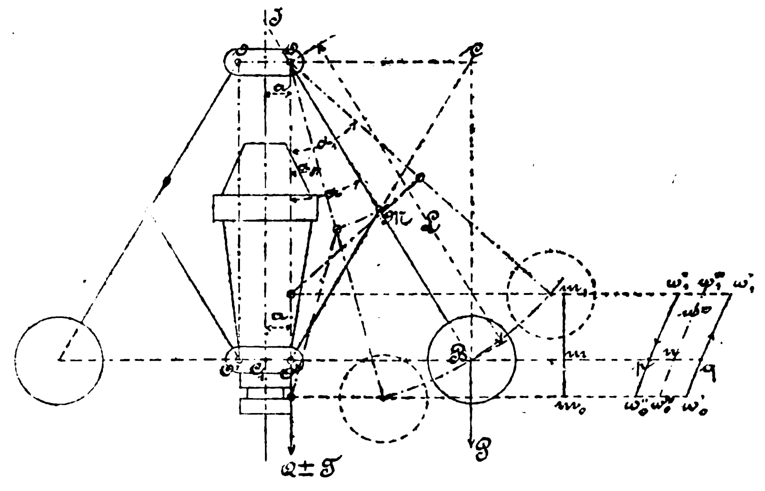


Fig. 112

manchon, donc pour chaque valeur de α, les vitesses angulaires ω' et ω'' (fig. 112). On voit que, pour toute vitesse comprise entre ces valeurs, le manchon reste en équilibre ; en d'autres termes, si $m_0 m_1$ est la course du manchon correspondant à l'angle $\alpha_1 - \alpha_0$ décrit par les bras, et si on suppose que le manchon occupe une position m, intermédiaire, le régulateur n'entre en action que pour une vitesse supérieure à mq. ou pour une vitesse inférieure à mp.

123. — *Sensibilité.* — Il faut évidemment que les valeurs ω' et ω'' ne soient pas trop écartées, sinon l'appareil serait paresseux, ou peu sensible, mais par contre, l'écart entre ω' et ω'', rapporté à la vitesse moyenne

$$\frac{\omega' + \omega''}{2}$$

doit être au moins égal à l'écart de vitesse du volant, rapporté à cette même vitesse (112).

Posons

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\frac{\omega' + \omega''}{2}}$$

μ caractérise la sensibilité pour la position considérée du manchon, c'est-à dire, la propriété que possède le régulateur d'intervenir pour un léger écart de vitesse en dehors des maxima et minima du volant.

On tire des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\frac{\omega' + \omega''}{2}} = 2\,\frac{\sqrt{P + Q + F} - \sqrt{P + Q - F}}{\sqrt{P + Q + F} + \sqrt{P + Q - F}}$$

La sensibilité, pour ce régulateur en particulier, est donc indépendante de α.

Lorsqu'on fait abstraction de F, on obtient, pour l'ouverture et la fermeture, une courbe unique, donnée par :

$$(4) \qquad \omega'''^2 = g\,\frac{P + Q}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,tg\,\alpha$$

Par combinaison avec les équations (1) et (2), on obtient:

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \frac{g\,tg\,\alpha}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,F$$

$$\omega'''^2 - \omega''^2 = \frac{g\,tg\,\alpha}{P\,(a + 2\,l \sin \alpha)}\,F$$

ou encore :

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \frac{F}{P + Q}\,\omega'''^2$$

$$\omega'''^2 - \omega''^2 = \frac{F}{P + Q}\,\omega'''^2$$

Dans tous les cas où F est faible relativement à P + Q, on peut écrire:

$$\omega' = \omega''' + \frac{F}{2(P+Q)}\,\omega''' \tag{5}$$

$$\omega'' = \omega''' - \frac{F}{2(P+Q)}\,\omega''' \tag{6}$$

c'est-à-dire que la vitesse ω''' est la moyenne arithmétique entre ω' et ω'' ou que $nq = pn$ (fig. 112).

La sensibilité μ est alors donnée approximativement par l'équation:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\omega' - \omega''}{\omega'''} = \frac{F}{P+Q} \tag{7}$$

μ est d'autant plus grand que F est plus faible en comparaison de P + Q, propriété que l'équation (3) permettait aussi de découvrir.

Lorsque les courbes ω', ω'', sont très rapprochées, ce qui arrive lorsque les résistances à vaincre sont très faibles, l'écart peut ne pas être suffisant pour permettre à la vitesse d'osciller entre les limites permises par le volant, et le manchon monte et descend à chaque période; ce déplacement périodique, lorsqu'il n'est pas fort prononcé, ne nuit pas à l'action de certains appareils régleurs, il contribue à donner au coefficient de frottement sa valeur du mouvement [1]; il peut arriver en effet, lorsque la charge des moteurs ne varie qu'à de longs intervalles, que la résistance du régulateur soit accrue par la cohésion des huiles.

Pour augmenter la sensibilité, il faut augmenter P + Q, l'équation (4) montre qu'en augmentant P seulement, ω''' diminue (régulateur à grosses boules tournant lentement); l'augmentation de Q a au contraire pour effet d'augmenter ω''', bien qu'elle agisse dans le même sens sur la sensibilité; on obtient ainsi des régulateurs à fort contrepoids tournant vite.

On se réserve toujours, en construisant les régulateurs, le moyen d'écarter à volonté les courbes ω' et ω''; à cet effet, on introduit, parmi les résistances passives dont l'ensemble forme la valeur de F, une cataracte à huile, ou *dash-pot*; on limite aussi, par ce moyen, les oscillations du régulateur qui résultent d'une action trop brusque (140).

1. On a réalisé un régulateur dit *à mouvement louvoyant*, dans lequel on donne au frottement sa valeur du mouvement, en maintenant l'organe régleur dans un état de rotation continue. — *Industrie moderne*, 1890, p. 272.

124. — *Régularité.* — Il résulte encore de l'examen du diagramme (fig. 112), que l'écart entre les valeurs extrêmes de la vitesse ne peut dépasser

$$\omega_1' - \omega_0''$$

cet écart, rapporté à la vitesse moyenne, mesure l'irrégularité du régulateur, si donc on appelle ν le coefficient de régularité, on posera:

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{\omega_1' - \omega_0''}{\omega_1' + \omega_0''} \qquad (8)$$

Le coefficient ν ne doit pas être confondu avec la quantité que nous avons désignée par n dans la théorie du volant; en se reportant à ce qui a été dit de la sensibilité au numéro précédent, on voit au contraire que l'on aura nécessairement

$$\nu < n$$

sinon, le régulateur devrait, à chaque période, osciller entre ses deux positions extrêmes.

La *sensibilité* et la *régularité* sont plus ou moins liées, un régulateur peu sensible est nécessairement peu régulier; d'autre part un régulateur pourrait être sensible (courbes ω' et ω'' rapprochées) et être peu régulier (courbes ω' et ω'' inclinées). D'après M. Marié [1] pour qu'un régulateur soit dans de bonnes conditions, il faut qu'on ait, dans notre système de notations,

$$\frac{1}{\mu} \leqq \frac{1}{5} \times \frac{1}{\nu}$$

sinon, les oscillations seraient à craindre.

125. — *Energie.* — Tous les mécaniciens n'attribuent pas à ce mot la même signification; il nous semble rationnel d'appeler ainsi l'effort que peut vaincre le manchon, lorsqu'il se trouve dans une position donnée d'équilibre, et que la vitesse vient à varier d'une *certaine fraction* de sa valeur. L'énergie est une fonction qui permet de comparer les régulateurs, et donne la mesure de leur aptitude à vaincre, à course de manchon égale, des résistances F plus ou moins grandes. Plus un

1. Les régulateurs de vitesse. — *Annales des Mines*, 1887, p. 202, étude très intéressante au point de vue surtout des appareils régleurs.

régulateur est énergique, et mieux il convient pour actionner par exemple, une valve présentant beaucoup de résistance, ou un système dans lequel F présente de grandes variations, à la condition que la comparaison soit faite avec un régulateur de même course.

Pour mesurer l'énergie, on doit supposer le régulateur libre, c'est-à-dire non soumis à la force F, puisque celle-ci constitue l'une des actions à vaincre.

On a pour le régulateur sans résistance l'équation (4) du n° 123 :

$$\omega'''^2 = g \frac{P + Q}{P(a + 2l \sin \alpha)} tg \alpha$$

Si l'on fait $\omega''' = \omega''' (1 + \delta)$, il y aura au manchon, pour la même valeur de α, une force disponible $2Y$, telle que :

$$\omega'''^2 (1 + \delta)^2 = g \frac{P + Q + Y}{P(a + 2l \sin \alpha)} tg \alpha$$

d'où, si δ est faible, et inférieur par exemple à $\frac{1}{10}$:

$$2Y = 4\delta \frac{\omega'''^2}{g} P \frac{a + 2l \sin \alpha}{tg \alpha}$$

En tenant compte de l'équation (4) et remarquant que l'énergie θ, n'est autre chose que la force disponible $2Y$, on a

$$\theta = 4\delta (P + Q) \tag{9}$$

Pour le régulateur considéré, θ est proportionnel à $P + Q$. Toute modification qui augmente la sensibilité augmente donc aussi l'énergie, ce qui devait être.

126. — *Travail d'un régulateur.* — L'énergie n'est que l'un des facteurs du travail, on pourrait toujours, si la course de l'organe à commander n'était pas imposée, disposer des bras de levier de la liaison entre le régulateur et l'appareil régleur, de manière à multiplier l'effort dans une mesure quelconque. L'énergie du régulateur n'a de valeur que par le travail qu'elle peut effectuer ; si l'on veut faire la comparaison entre différents régulateurs au point de vue du travail disponible sur le

manchon, il suffira de multiplier leur énergie par la course totale du manchon.

127. — *Isochronisme.* — L'isochronisme, qu'on appelle aussi *astaticité* [1], est la propriété que possèdent certains régulateurs dans lesquels toute valeur de l'angle α convient à la vitesse angulaire de régime, et à cette vitesse seulement. C'est-à-dire que le régulateur isochrone intervient pour peu que la vitesse se modifie, et conserve cette position, qu'elle qu'elle soit, lorsque la machine a repris sa vitesse de régime.

En cherchant à réaliser des régulateurs isochrones, on a eu en vue de remédier à un défaut évident de l'appareil (fig. 112), que nous avons jusqu'ici étudié comme type; en effet, il est visible, d'après son diagramme, que si sa sensibilité n'est pas *inférieure* au coefficient de régularité du volant, il amènera nécessairement, après avoir modifié la distribution du travail moteur, une vitesse autre que celle de régime, car, s'il pouvait ramener celle-ci, l'appareil régleur serait remis dans la position qui avait amené la perturbation.

Le diagramme du régulateur isochrone serait composé de deux droites parallèles à l'axe sur lequel nous comptons les déplacements du manchon (fig. 113); on voit immédiatement que, pour ce régulateur, on aurait

$$\mu = \nu$$

Fig. 113

et qu'il ne satisferait pas à la condition indiquée au n° 124; son défaut serait d'agir sans mesure et dans toute l'étendue de sa course, pour la variation la plus légère de vitesse en dehors des limites ω' et ω'' [2]; mais il aurait, par contre une régularité aussi élevée que possible.

On appelle régulateurs *pseudo-isochrones* ceux qui se rapprochent, par leurs propriétés, de celui que nous venons d'analyser; les systèmes de Farcot, Rankine, Tchebitcheff, Buss, Andrade, etc., appartiennent à cette catégorie; l'isochronisme est mesuré par ε dans l'équation:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{\omega_1''' - \omega_0'''}{\omega_1''' + \omega_0'''} \qquad (10)$$

1. MM. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery attribuent au mot astaticité un sens spécial, différent d'isochronisme.

2. On peut dire que ce régulateur manquerait de *stabilité*; ainsi apparaît une nouvelle propriété du régulateur caractérisée par l'*inclinaison* des courbes ω' et ω''; la stabilité est l'inverse de l'isochronisme.

Le régulateur de Watt, pour présenter un degré de régularité élevé, doit presque toujours avoir des dimensions qui le rendent peu pratique; le système de Porter où $a = o$, celui de Farcot, dans lequel a est négatif, ne sont que des régulateurs de Watt, améliorés au point de vue de l'isochronisme ; M. Léauté décrit (ouvrage cité) un système de contrepoids imaginé par lui dans le même but ; on a aussi, depuis longtemps, employé un contrepoids agissant sur le manchon par l'intermédiaire d'un levier coudé, et destiné à le soulager au fur et à mesure que l'angle α des bras augmente.

Pour l'étude des régulateurs pseudo-astatiques, il ne suffit pas, en général, de s'assurer au moyen du calcul des vitesses au bas et au sommet de la course du manchon, que l'on a atteint les degrés d'isochronisme et de sensibilité voulus, il faut encore que le diagramme ne

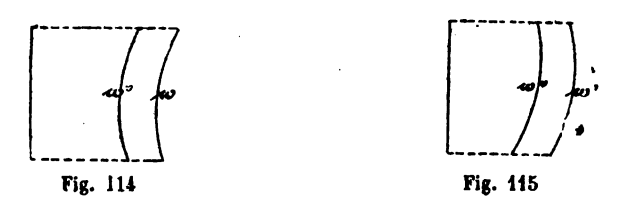


Fig. 114 Fig. 115

puisse présenter l'une des formes défectueuses des figures 114 et 115, auquel cas l'appareil régleur agirait à contre-sens pendant une partie de la course du manchon.

I. — Régulateurs du premier genre [1].

128. — Le type de ces régulateurs est représenté (fig. 116) ; le bras oscille autour du point O, qui est fixe par rapport à l'arbre.

Soient :

L, la longueur OA des bras,

α, l'angle des bras sur la verticale,

1. Nous divisons les régulateurs, à l'exemple de M. Léauté, en appareils du 1er genre, dans lesquels les bras qui portent les boules oscillent autour de points fixes en hauteur, et appareils du second genre, où ces articulations se meuvent avec le manchon.

l, la distance OB obtenue en prolongeant O'M jusqu'à sa rencontre en C avec l'horizontale de O, et en menant la verticale CB.

h, la distance ID,

P, le poids d'une boule,

Q, le poids appliqué à chaque articulation du manchon,

F, la résistance à vaincre par chaque articulation.

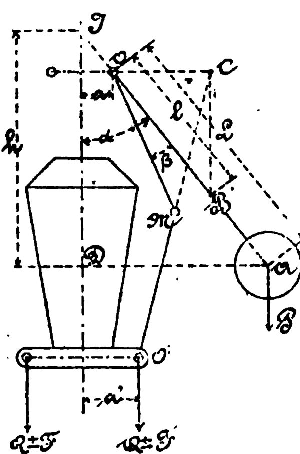
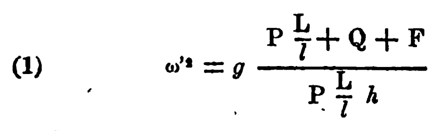


Fig. 116

Les équations d'équilibre sont, pour la position considérée, à l'ouverture:



$$\text{(1)} \qquad \omega'^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q + F}{P\frac{L}{l}\,h}$$

et à la fermeture:

$$\text{(2)} \qquad \omega''^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q - F}{P\frac{L}{l}\,h}$$

La sensibilité est donnée par μ dans l'équation ci-dessous:

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{\mu} = 2\,\frac{\omega' - \omega''}{\omega' + \omega''} = 2\,\frac{\sqrt{P\frac{L}{l} + Q + F} - \sqrt{P\frac{L}{l} + Q - F}}{\sqrt{P\frac{L}{l} + Q + F} + \sqrt{P\frac{L}{l} + Q - F}}$$

La sensibilité n'est pas constante pour toutes les positions du manchon, attendu que *l* est variable.

On aurait, pour le régulateur sans résistances·

$$\text{(4)} \qquad \omega'''^2 = g\,\frac{P\frac{L}{l} + Q}{P\frac{L}{l}\,h}$$

$$\omega'^2 - \omega'''^2 = \omega'''^2 - \omega''^2 = \omega'^2\,\frac{F}{P\frac{L}{l} + Q}$$

Dans tous les cas où F est faible à côté de $P\frac{L}{l} + Q$, on peut écrire

(5) $$\omega' = \omega''' \left(1 + \frac{F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right)}\right)$$

(6) $$\omega'' = \omega''' \left(1 - \frac{F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right)}\right)$$

(7) $$\frac{\omega' - \omega''}{\omega'''} = \frac{F}{P\frac{L}{l} + Q}$$

$\frac{\omega' - \omega''}{\omega'''}$ constitue une valeur approchée de $\frac{1}{\mu}$.

On peut, pour augmenter la sensibilité :

1° augmenter $\frac{L}{l}$, auquel cas l'équation (4) indique que la vitesse ω''' est diminuée ; par cette modification, le régulateur devient plus grand, ou bien la course du manchon diminue.

2° Augmenter P, ce qui diminue ω'''.

3° Augmenter Q, la vitesse ω''' est augmentée (Porter).

L'énergie a pour expression :

$$\theta = 4\frac{P}{g}\omega'''^2 h \frac{L}{l}\ \delta$$

ou bien, en tenant compte de l'équation (4)

$$\theta = 4\left(P\frac{L}{l} + Q\right)\delta$$

L'énergie augmente donc en même temps que la sensibilité ; elle ne reste pas constante pour toute la course du manchon, l étant variable d'une position à l'autre.

La régularité ν, est donnée approximativement par l'expression ci-dessous, chaque fois que F est faible à côté de $P\frac{L}{l} + Q$; on évalue

alors ω_1' et ω_0'' en fonction de ω_1''' et ω_0''', au moyen des équations (5) et (6); la vitesse moyenne est prise égale à $\frac{1}{2}$ $(\omega_1' + \omega_0'')$.

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{\omega_1' - \omega_0''}{\omega_1' + \omega_0''} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

où

$$r = \frac{2\,(PL + Ql_0) - Fl_0}{2\,(PL + Ql_1) + Fl_1}\sqrt{\frac{h_1\,(PL + Ql_1)}{h_0\,(PL + Ql_0)}}$$

Les quantités l_0, h_0, l_1, h_1, peuvent être mesurées sur un tracé en vraie grandeur; les erreurs faites dans le relevé des dimensions étant du même ordre que celles commises dans l'exécution de l'appareil lui-même, cette marche peut être suivie sans inconvénient.

L'isochronisme, ε, est fourni par l'équation:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{\omega_1''' - \omega_0'''}{\omega_1''' + \omega_0'''} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{PL + Ql_0}{PL + Ql_1} \times \frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{PL + Ql_0}{PL + Ql_1} \times \frac{h_1}{h_0}}}.$$

129. — *Proportionnalité des régulateurs* [1]. — Lorsqu'on ne change rien au poids des boules et du manchon, la sensibilité, l'énergie, la régularité et l'isochronisme conservent la *même valeur* pour tous les régulateurs semblables, c'est-à-dire ayant leurs dimensions linéaires dans le même rapport, et fonctionnant entre les mêmes angles. La vitesse angulaire (ω''' ou ω' et ω'') varie en raison inverse de la racine carrée d'une dimension (Equation 4). La propriété ci-dessus n'est toutefois vraie, en ce qui concerne la sensibilité et la régularité, que si F reste constante avec les autres forces P et Q.

Lorsque la similitude s'étend aux dimensions linéaires des boules et du contrepoids comme à toutes les autres parties, la vitesse varie encore comme ci-dessus, l'énergie augmente comme le cube du rapport de similitude, et l'isochronisme reste constant.

Si F varie comme les autres forces, la sensibilité et la régularité conservent aussi une valeur constante; si, au contraire, F n'augmente pas aussi vite que le poids des boules ou le contrepoids du manchon, la sensibilité et la régularité s'améliorent.

1. Ch. Beer et Dwelshauvers-Dery. – Ouvrage cité.

Lorsque F ne varie pas, la sensibilité augmente comme le cube du rapport de similitude.

Le travail disponible au manchon varie à la fois comme l'énergie, et comme la course du manchon, il est donc proportionnel à la quatrième puissance du rapport de similitude.

130. — *Régulateur de Watt et ses dérivés.* — On a pour ce régulateur (fig. 112) qui a déjà été examiné précédemment (122 à 126)

$$a' = a$$
$$\beta = o$$
$$OB = l = \text{constante}$$
$$IC_1 = h$$

En examinant l'influence de ces données sur les propriétés du régulateur, on établit facilement ce qui suit:

La sensibilité et l'énergie sont constantes quelle que soit la position du manchon.

La régularité ν est donnée approximativement par l'équation:

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

avec

$$r = \frac{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right) - F}{2\left(P\frac{L}{l} + Q\right) + F}\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

qui se simplifie encore dans le cas où $l = L$, comme dans la figure 112.

L'isochronisme ε sera tiré de la relation:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}$$

L'isochronisme est donc d'autant plus parfait que $\frac{h_1}{h_0}$ s'approche davantage de 1; or,

$$h = L\cos\alpha + a\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

On peut choisir pour a une valeur telle que h varie infiniment peu relativement à α, on aura alors:

$$\frac{dh}{d\alpha} = o = -\left(L \sin \alpha + \frac{a}{\sin^2 \alpha}\right)$$

ce qui donne:

$$a = -L \sin^3 \alpha$$

α étant variable, on voit que le régulateur ne saurait être isochrone, mais on peut obtenir un isochronisme plus que suffisant en prenant

$$a = -L \sin^3 \alpha_0$$

Les bras du régulateur, de même que les bielles, seraient croisés (Régulateur Farcot, fig. 117). Si les articulations étaient plus éloignées de l'axe, le régulateur agirait à contre sens au bas de sa course.

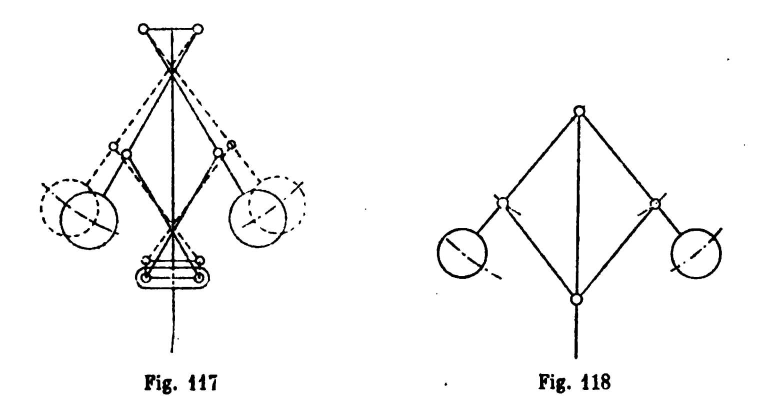


Fig. 117 Fig. 118

Pratiquement, il est assez rare que l'on adopte des valeurs de a négatives ; on réalise un isochronisme assez satisfaisant en faisant $a = o$; si l'on prend en même temps $a' = o$, ce qui, à la vérité, donne lieu à des difficultés de construction (fig. 118), on a :

$$h_0 = L \cos \alpha_0$$

$$h_1 = L \cos \alpha_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2 \frac{1 - \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}}}{1 + \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}}}$$

Soit :

$$\alpha_0 = 25^\circ$$

$$\alpha_1 = 32^\circ$$

On trouve :

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{3.35}{100} \text{ environ}$$

ou

$$\varepsilon = 29,9.$$

Cet isochronisme est très suffisant pour la plupart des applications, mais on voit qu'il ne peut être obtenu qu'en limitant l'ouverture des bras, ce qui oblige, pour une course de manchon donnée, à faire usage de régulateurs assez grands.

Il existe beaucoup de régulateurs dans lesquels on fait $a = o$ et où l'on adopte une valeur a' telle que les pivots des fourches inférieures puissent passer à côté de l'arbre ; a' est donc légèrement supérieur à la somme obtenue en ajoutant le rayon du pivot et celui de l'arbre (fig. 119).

Dans le régulateur de *Kley* (fig. 120), a est négatif, a' est positif.

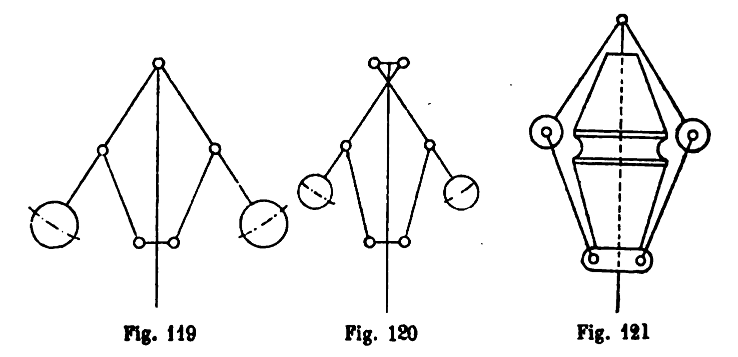


Fig. 119 Fig. 120 Fig. 121

Toutes les modifications indiquées ci-dessus peuvent être appliquées au régulateur de Porter, dont l'une des formes est représentée fig. 121. Il n'y a, entre cet appareil et celui de Watt, aucune différence de principe ; l'énergie y est obtenue au moyen d'un très lourd contrepoids, on atteint facilement ainsi une grande sensibilité ; toutefois, pour équilibrer Q, la vitesse de rotation (ω''') doit augmenter, d'autant plus que le poids des boules est faible, et que la longueur des bras n'est pas supérieure à celle des bielles.

Les régulateurs à rotation rapide présentent des difficultés de construction assez grandes, car l'axe de rotation doit coïncider avec l'axe principal d'inertie du système, sous peine d'amener des vibrations latérales.

131. — *Régulateur de M. Ch. Beer.* — La maison Beer a créé une série de régulateurs complètement étudiés, appartenant au premier genre (fig. 122); les bras sont coudés et supportent le manchon au moyen d'un galet (fig. 117).

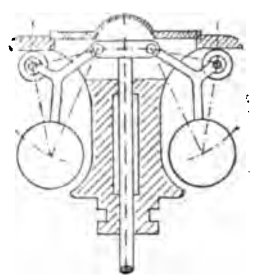


Fig. 122

Les équations générales sont entièrement applicables à ce dispositif, qui reste excellent pour une amplitude de α variant entre 25° et 35°. La série comprend 12 numéros, voici quelques unes des données relatives au n° 6 :

$$2\,(P + Q) = 127^k50$$

2 F, EN KILOG.	COURSE EN M/M	μ	ν
4	51	30	15
3	44	40	20
2	36	60	30

Dans ces régulateurs, la sensibilité est double de la régularité.

Nous pouvons encore citer, comme appartenant à cette classe, le régulateur parabolique de Galloway [1].

II. — RÉGULATEURS DU SECOND GENRE

132. — Les bras qui portent les boules sont articulés au manchon (fig. 123).

1. *Engineering*, 1883, 2e semestre, page 537.

L'équilibre donne pour l'ouverture :

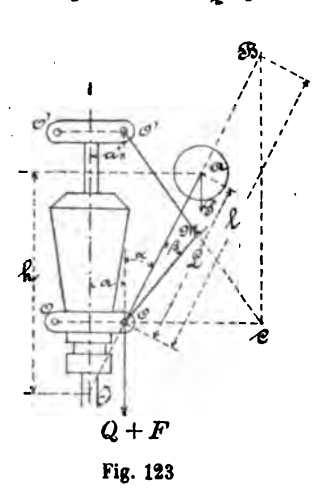


Fig. 123

$$\omega'^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q + F}{P \frac{L}{l} h}$$

et pour la fermeture :

$$\omega''^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q - F}{P \frac{L}{l} h}$$

L'équation du régulateur sans résistance serait :

$$\omega'''^2 = g \frac{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q}{P \frac{L}{l} h}$$

Dans tous les cas où F est faible en comparaison de

$$P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q$$

on peut écrire, en suivant la même marche qu'au numéro 128 :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{F}{P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q}$$

Toute modification qui augmente le dénominateur de cette fraction agit sur la sensibilité qui, du reste, dépend de l, et par conséquent de la hauteur du manchon.

L'énergie pour l'ensemble des deux boules est :

$$0 = 4\left[P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q\right] \delta$$

et varie comme la sensibilité.

On a approximativement (1) :

$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - r}{1 + r}$$

1. Le calcul a été fait en supposant que F est faible en comparaison de $P\left(1 - \frac{L}{l}\right) + Q$, auquel cas on peut opérer comme au n° 128.

avec

$$\nu = \frac{2\,[(Q+P)\,l_0 - PL] - Fl_0}{2\,[(Q+P)\,l_1 - PL] + Fl_1}\sqrt{\frac{h_1\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}}$$

Le degré d'isochronisme ε est tiré de l'équation :

$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\dfrac{h_1\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}}}{1 + \sqrt{\dfrac{h_1\,[(Q+P)\,l_0 - PL]}{h_0\,[(Q+P)\,l_1 - PL]}}},$$

133. — *Régulateur de Prœll.* — On a généralement, dans ce régulateur, qui est identique à celui de la figure 123 :

$$a = a' = \frac{1}{6}\,OA$$
$$OM = 0.7\ L$$
$$\beta = 10^\circ$$
$$Q = 3P$$
$$\alpha_0 = 20^\circ$$
$$\alpha_1 = 30^\circ$$

134. — *Régulateur de Foucault.* — En faisant $\beta = o$ et $a' = a$, on obtient le régulateur de Foucault (fig. 124), dans lequel on a, de plus, $OM = \frac{L}{2}$.

On a toujours quel que soit l'angle des bras :

$$l = L$$

Il vient donc :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{F}{Q}$$
$$\theta = 4\,Q\delta$$
$$\frac{1}{\nu} = 2\,\frac{1 - \dfrac{2Q - F}{2Q + F}\sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}}{1 + \dfrac{2Q - F}{2Q + F}\sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}}$$
$$\frac{1}{\varepsilon} = 2\,\frac{1 - \sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}}.$$

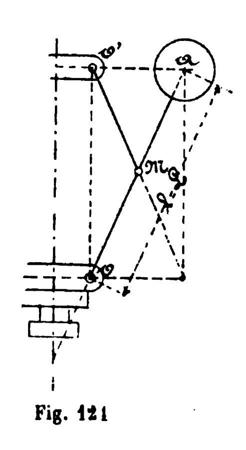


Fig. 121

Le poids des boules ne figure dans aucune des expressions qui caractérisent ce régulateur, l'équivalent de celui de Watt au point de vue de l'isochronisme, mais inférieur à celui-ci sous le rapport de la régularité et de la sensibilité, ce qui provient de ce que les boules équilibrent directement une partie du poids du manchon.

135. — *Régulateur Cosinus.* — Il comporte deux variétés à peu près équivalentes, nous n'étudierons que la plus répandue. Le pendule est à bras coudé (fig. 125), articulé en O au manchon, et comporte deux masses M, M' ; l'un des bras porte en outre un galet G, qui s'appuie sur un talon de l'arbre et reste ainsi à hauteur constante. Le pendule constitue la particularité la plus intéressante de ce régulateur ; pour analyser son mode d'action, nous suivrons une méthode élémentaire et directe, de préférence à celle plus générale, qui est exposée par M. Buss.

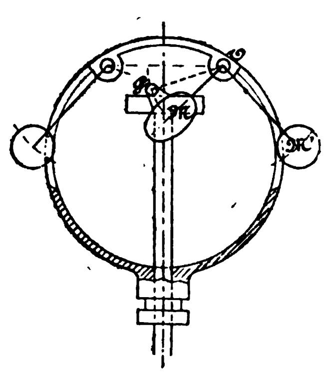


Fig. 125

Le pendule est composé approximativement de deux masses m, K^2m, montées en M et M' (fig. 126), aux distances $K\lambda$ et λ, respectivement, du point d'articulation O, sur des bras OM et O'M qui restent à angle droit. Ce système tourne autour d'un axe situé à la distance a de l'articulation O.

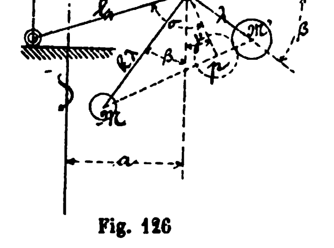


Fig. 126

Nous allons démontrer d'abord, qu'au point de vue du poids des boules, le double pendule peut être remplacé par une masse unique

$$(K^2 + 1)\, m$$

qui serait placée au pied de la perpendiculaire Op abaissée du point O sur MM'.

En effet, le poids de cette masse est égal à la somme des poids placés en M et M', et l'on a la proportion :

$$\frac{Mp}{pM'} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{K^2}{1}$$

Le point p divise donc M M' en deux segments qui sont dans le rapport inverse des poids appliqués en M et M'.

Nous allons chercher, en outre, le moment autour du point O des forces centrifuges des masses M et M'.

Cette somme est :

$$m\omega^2 (a - K\lambda \sin \beta) K\lambda \cos \beta + K^2 m\omega^2 (a + \lambda \cos \beta) \lambda \sin \beta$$

ou

$$m\omega^2 a K (\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta)$$

ou encore :

$$m (1 + K^2) \omega^2 a \frac{K}{1 + K^2} (\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta)$$

Le contour du triangle MOM', projeté sur l'horizontale donne :

$$\lambda \cos \beta + K\lambda \sin \beta = \lambda \sqrt{1 + K^2} \cos \gamma$$

On a aussi par les triangles semblables OpM' et MOM' :

$$Op = \frac{K\lambda}{\sqrt{1 + K^2}}$$

La somme des moments équivaut donc à :

$$(1) \qquad m (1 + K^2) \omega^2 a \times Op \cos \gamma$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à ω^2, et au cosinus de l'angle γ que fait le bras fictif Op avec la verticale ; toutes les autres quantités figurant dans l'expression sont constantes.

Etablissons la condition nécessaire pour que le pendule soit en équilibre sous l'action du contrepoids Q, de la réaction s'exerçant sur le galet, du poids de ses boules et de leur force centrifuge.

Soit : $$Op = L,$$

et faisons

$$(1 + K^2) m = M = \frac{P}{g}$$

P étant donc la somme des poids des boules ; la réaction sur le galet sera P+Q, et il vient pour l'équilibre, en tenant compte de la valeur (1) déjà trouvée pour le moment.

$$(2) \qquad \frac{P}{g} \omega^2 a L \cos \gamma = PL \sin \gamma + (P + Q) l_1 \sin (\sigma - \gamma)$$

Pour que ω^2 soit constant, il faut que γ disparaisse de l'équation, ce qui exige que l'on ait :

$$PL = (P + Q)\, l_1 \cos \sigma$$

ou

$$\cos \sigma = \frac{P}{P+Q} \frac{L}{l_1}$$

On peut toujours choisir les éléments du système pour qu'il en soit ainsi, l'équation (2) devient alors :

$$\frac{P}{g} \omega^2 a L = (P + Q)\, l_1 \sin \sigma$$

Ce régulateur serait doué d'un isochronisme parfait, il serait donc instable ; aussi, on altère l'angle σ de manière à obtenir dans la course utile du manchon une certaine variation de vitesse assignée à l'avance, on prend $\cos \sigma < \frac{P}{P+Q} \frac{L}{l_1}$.

Pour des dimensions restreintes, le régulateur de Buss donne une course de manchon très grande, puisqu'on n'est pas tenu, comme avec tous les autres, de resserrer l'angle d'ouverture des bras (γ) entre des limites étroites, en vue d'arriver à un isochronisme satisfaisant ; à égalité d'énergie, il fournit un travail disponible supérieur à celui des autres régulateurs.

136. — *Observations générales.* — Dans les calculs qui précèdent, nous n'avons pas tenu compte du poids des bras, qui peut cependant jouer un rôle important dans les régulateurs à grande vitesse à boules fort petites ; on peut, dans ce cas exceptionnel, considérer le poids des fourches comme concentré aux articulations ; la partie prismatique ne donne pas lieu à de sérieuses difficultés ; on remarquera cependant, qu'au point de vue de la force centrifuge, on ne peut la supposer concentrée à son centre de gravité.

Pour établir un régulateur, le moyen le plus pratique est de fixer d'abord les dimensions de manière à ce qu'il forme, avec la machine, un ensemble satisfaisant ; on ne devra cependant pas perdre de vue que les petits moteurs demandent des régulateurs relativement plus grands (129). Lorsqu'on a fixé pour un régulateur de Watt, par exemple,

les dimensions linéraires, telles que la longueur des bras et des bielles, la distance a, et les angles limites, on en déduit la course du manchon; on connaît la résistance et la course de l'appareil régleur, on en déduit la résistance F, ramenée au manchon du régulateur.

La régularité étant imposée, on choisit la vitesse moyenne du régulateur et on détermine ainsi les vitesses extrêmes ω'_1 et ω''_0; les deux équations d'équilibre à l'ouverture et à la fermeture appliquées à ces positions particulières, permettent de trouver P et Q.

Si l'on trouve pour P une valeur négative, c'est que les éléments choisis *a priori* ne conviennent pas pour réaliser la régularité voulue, il faut alors réduire a, α_0, α_1 ou avoir recours aux systèmes pseudo-astatiques.

On vérifie après coup si l'isochronisme et la sensibilité sont suffisants, et si l'énergie ne subit pas éventuellement de trop grandes variations, ce qui présenterait des inconvénients dans les cas d'une résistance constante à vaincre, il pourrait y avoir lieu alors de modifier la liaison entre le manchon et l'appareil régleur.

Il est prudent de construire au moins trois points du diagramme, à l'ouverture et à la fermeture, afin de s'assurer que la vitesse ne présente ni maximum ni minimum dans la zone active du régulateur.

Il serait impossible, du reste, de déterminer exactement *a priori* la valeur de F, qui peut varier dans des proportions inattendues par suite du moindre défaut de montage, aussi doit-on compter à l'avance sur un maximum de résistance, car si le fonctionnement accuse que le régulateur est trop sensible, on peut toujours parfaire la valeur de F en réglant le dash-pot en conséquence.

On ne peut compter non plus que les poids calculés seront rigoureusement réalisés après l'achèvement du régulateur, on se réserve le moyen, soit d'augmenter ou de diminuer Q, soit, ce qui est préférable au point de vue de l'élégance, de modifier la vitesse prévue; dans ce dernier cas, on essaie le régulateur à l'atelier en le munissant de ses tringles de renvoi, et on détermine en conséquence le diamètre de sa poulie de commande ou le rapport des roues dentées qui doivent lui donner le mouvement [1].

1. On exige quelquefois que le moteur puisse tourner à deux vitesses différentes de régime; le régulateur doit alors être à contrepoids mobile ou être actionné par des organes à rapport variable de vitesse. Dans le premier cas, il convient de baser le calcul sur la valeur la plus faible de la vitesse.

Les propriétés indiquées au n° 129, et qui s'appliquent aussi aux régulateurs du second genre, permettent de tirer d'un régulateur donné et dont on connait les qualités, une série d'appareils convenant pour vaincre des résistances et effectuer des travaux différents.

B. — RÉGULATEURS A RESSORTS

137. — Les ressorts peuvent remplacer le contrepoids avec avantage : la disposition la plus simple consiste à placer sur le manchon un ressort à boudin qui entoure l'arbre et qui bute à son sommet contre une bague d'arrêt à laquelle on réserve un certain serrage. Ce système est employé depuis longtemps pour les régulateurs de petites dimensions, dans lesquels le contrepoids atteint un volume relatif très grand. Il est évident *a priori* que si la longueur du ressort est très grande relativement à la déformation qu'il subit entre les limites de la course du manchon, son action ne diffère en rien de celle du contrepoids ; comme l'emploi de ressorts de grande longueur présenterait beaucoup d'inconvénients, il n'y a pas analogie complète entre les deux systèmes, et pour l'étude des appareils de la classe B, nous devons emprunter à la théorie de l'élasticité la formule qui lie la déformation à l'effort nécessaire pour la produire.

Pour le ressort en hélice en fil rond, on a :

$$(a) \qquad e = Q \frac{64\, nr^3}{Gd^4}$$

e est la flèche produite, en millimètres.
Q l'effort longitudinal, en kilogrammes.
n le nombre de spires.
r le rayon du cylindre moyen, en millimètres.
d le diamètre du fil, en millimètres.
G le coefficient d'élasticité par glissement, dont la valeur varie de 8000 pour l'acier ordinaire, à 12000 pour l'acier fondu, trempé et recuit.

Cette formule peut s'écrire :

$$(b) \qquad \frac{Q}{e} = \frac{Gd^4}{64\, nr^3}$$

$\frac{Q}{e}$ est alors l'effort nécessaire pour produire une flèche de 1 millimètre [1].

L'effort qui correspond à une fatigue θ par millimètre carré de section est :

$$(c) \qquad Q_\theta = \frac{\pi}{16} \theta \frac{d^3}{r}$$

On peut faire $\theta = 40$ pour l'acier fondu.

On voit immédiatement que la substitution d'un ressort au contrepoids dans tous les régulateurs déjà examinés, ne peut qu'aggraver le défaut d'isochronisme, puisque Q augmente avec l'ouverture ; par contre, la force variable du ressort permet de réaliser d'autres combinaisons de leviers, possédant un isochronisme aussi grand qu'on le voudra, avec une énergie très grande sous un faible volume ; de plus, les régulateurs de cette espèce peuvent être placés dans une position horizontale.

Les régulateurs à ressort demanderaient une classification complète, ils comprennent des appareils se rattachant au premier genre, aussi bien que des régulateurs du genre Prœll [2] ; en outre ils peuvent être à arbre horizontal ou à arbre vertical, les masses se mouvant dans un plan passant par l'axe, mais toutes les pièces peuvent encore être placées dans un plan normal à l'axe de rotation, suivant un dispositif très répandu aujourd'hui.

Nous nous bornerons à examiner parmi les appareils de la première espèce, un régulateur employé dans beaucoup de machines locomobiles anglaises [3].

138. — *Régulateur de M. Wilson Hartnell.* — Les boules sont montées sur un bras renversé (fig. 127), qui renvoie le mouvement au manchon par l'intermédiaire d'un coude formant un angle de $90° + \beta$ un peu plus grand que l'angle droit ; la branche qui agit sur le manchon oscille symétriquement par rapport à l'horizontale.

Les actions de poids sont très faibles comparées à celles du ressort, les boules étant toujours situées dans le voisinage de la verticale du

1. On fait souvent usage de ressorts en fil carré ou rectangulaire, les formules de déformation sont différentes, mais la marche à suivre est la même que celle que nous allons exposer, nous supposons donc que les ressorts sont en fil rond.

2. — Brevet Prœll pour un régulateur pseudo-astatique. *Engineering*, 1887, 1er semestre, page 386.

3. *Engineering*. 1882, 2e semestre, p. 206

pivot, on peut négliger toutes les actions autres que celles de la force centrifuge et du ressort.

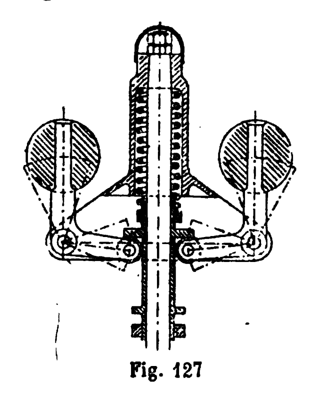


Fig. 127

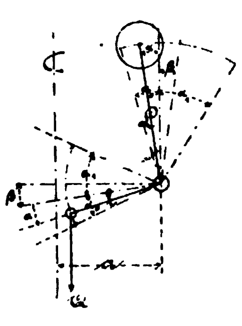


Fig. 128

Soit 2Q la compression du ressort pour une position quelconque des bras faisant avec la verticale l'angle α (fig. 128) ; nous aurons en appelant P le poids d'une boule, L la longueur du bras, et l la longueur de la branche de renvoi, en mètres :

$$\frac{P}{g}\,\omega^2\,(a - L\sin\alpha)\,\frac{L}{l}\cos\alpha = Q\cos(\beta + \alpha) \qquad (1)$$

Pour $\alpha = \alpha_0$:

$$\frac{P}{g}\,\omega_0^2\,(a - L\sin\alpha_0)\,\frac{L}{l}\cos\alpha_0 = Q_0\cos(\beta + \alpha_0) \qquad (2)$$

et pour $\alpha = \alpha_1$:

$$\frac{P}{g}\,\omega_1^2\,(a + L\sin\alpha_1)\,\frac{L}{l}\cos\alpha_1 = Q_1\cos(\alpha_1 - \beta) \qquad (3)$$

L'isochronisme parfait exige comme condition nécessaire, mais non suffisante :

$$\omega_0^2 = \omega_1^2$$

or,

$$\beta + \alpha_0 = \alpha_1 - \beta$$

on tire alors des équations (2) et (3) :

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{(a - L\sin\alpha_0)\cos\alpha_0}{(a + L\sin\alpha_1)\cos\alpha_1} \qquad (4)$$

Q_0 étant donné par l'équation (2), par exemple, on voit que Q_1 devra satisfaire à l'équation (4).

Il reste à calculer les éléments du ressort qui, pour des déformations compatibles avec les positions extrêmes du manchon, produira sur celui-ci les réactions $2Q_0$ et $2Q_1$.

Soit $2p$ l'effort nécessaire pour comprimer le ressort de 1 millimètre; la compression initiale, $2Q_0$, exigera une flèche :

$$\frac{2Q_0}{2p} \text{ ou } \frac{Q_0}{p}$$

De même, la compression finale correspond à un raccourcissement

$$\frac{Q_1}{p}$$

on a entre les flèches la relation :

$$\frac{Q_1}{p} - \frac{Q_0}{p} = 1000\, l\, [\sin(\alpha_1 - \beta) + \sin(\alpha_0 + \beta)]$$

et comme $\alpha_1 - \beta = \alpha_0 + \beta = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$,

on peut écrire :

$$2p = \frac{Q_1 - Q_0}{1000\, l \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}$$

On obtient ainsi la quantité $2p$, qui, substituée au premier membre dans la formule (*b*) des ressorts (137), donne :

$$\frac{G\, d^4}{64\, nr^3} = \frac{Q_1 - Q_0}{1000\, l \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}$$

Q_1 et Q_0 sont connus, de même que l et $\alpha_0 + \alpha_1$; on pourrait, d'après cela se donner arbitrairement n et r on déduirait de la formule le diamètre du fil; mais il faut tenir compte de la résistance; celle-ci exige que le ressort puisse, sans que la limite d'élasticité soit depassée, supporter la pression maxima $2Q_1$: la formule (*c*) prend ici la forme :

$$2Q_1 = \frac{\pi}{16}\, \theta\, \frac{d^3}{r}$$

A l'aide des deux dernières équations, on pourra donc déterminer d et n en fonction du rayon r, qui peut être pris arbitrairement.

On peut chercher la vitesse qui correspond à une position intermédiaire du manchon, le milieu de la course, par exemple ; il suffit de résoudre l'équation (1) par rapport à ω^2, en substituant à Q la valeur de la compression exercée pour cette position sur l'une des articulations, soit :

$$\frac{Q_0 + Q_1}{2}$$

En général on trouvera une vitesse différente de ω_0 et ω_1, et qui rendrait l'action du régulateur impossible (voir fig. 114 et 115). Il faudrait agir sur a et sur β de manière à corriger le diagramme, mais à cause des inconvénients de l'isochronisme, on adopte à dessein dans le calcul une valeur ω_1 différente de ω_0 que l'on obtient en fixant d'avance le degré d'isochronisme ε, il faut donc poser :

$$2\,\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1 + \omega_0} = \frac{1}{\varepsilon}$$

On tire de cette équation la valeur de ω_1 à substituer dans l'équation (3), les calculs s'achèvent comme précédemment.

On peut réaliser un régulateur dans lequel $\beta = o$, M. Wilson Hartnell fait remarquer que la position moyenne du manchon s'écarte beaucoup en ce cas de celle qui correspond à la moyenne des vitesses ω_0 et ω_1.

Il est essentiel d'observer que, dans le montage, la compression initiale $2Q_0$ doit être réalisée par un réglage convenable, s'il n'en était pas ainsi, le régulateur oscillerait entre des vitesses différentes de ω_0 et ω_1 et l'isochronisme pourrait être complètement troublé.

139. — *Régulateurs montés sur l'arbre.* — Les masses tournantes sont disposées directement sur l'arbre de la machine, lequel est horizontal, les boules doivent donc être montées de manière à ne donner aucune action de poids, ce qui est facile à obtenir en les reliant de manière à ce qu'elles s'équilibrent dans toutes les positions. Ce régulateur est surtout employé pour produire le réglage en déplaçant directement une poulie excentrique ; cependant, on peut le combiner de manière à

ce qu'il actionne un manchon à gorge glissant sur l'arbre, et utiliser le mouvement de ce manchon à la manière habituelle [1].

Par suite de leur liaison directe avec l'arbre, ces régulateurs ne conviennent qu'aux machines à grande vitesse de rotation; dans leur application à la commande d'un distributeur, la résistance occasionnée par celui-ci est au nombre des forces qui produisent l'équilibre, aussi, on s'est toujours attaché à la réduire autant que possible en employant des tiroirs équilibrés, il en est ainsi dans la *plupart des machines américaines* [2].

Lorsqu'on ne fait pas usage d'un distributeur à faible résistance, il faut soustraire le régulateur à sa réaction variable en faisant usage d'une commande non réversible [3] qui permet au régulateur d'actionner l'excentrique, et qui est arcbouté contre la commande en sens inverse. La disposition des masses et de leurs bras relativement aux ressorts qui remplacent les bielles des régulateurs à poids, admet un très grand nombre de variétés, on fait usage de ressorts de traction en hélice ou à lames [4], et même de ressorts de torsion concentriques à l'arbre [5]. La théorie de ces régulateurs ne présente aucune difficulté de calcul, toutefois, comme ils sont intimement liés à l'appareil de distribution, leur étude pourrait difficilement trouver place ici.

140. — *Oscillations des régulateurs* [6]. — Nous n'avons envisagé, dans tout ce qui précède, que l'équilibre statique du régulateur; il est certain qu'il finit toujours par se produire, de même qu'un pendule, sollicité brusquement par une force horizontale, arrive, après un certain nombre d'oscillations, à un équilibre stable. Dans les régulateurs, la question est plus compliquée, attendu que la position du manchon est liée à celle de l'appareil régleur, laquelle réagit à son tour sur la vitesse. Nous essayerons par un exemple, de faire comprendre ce qui se passe en réalité.

Admettons qu'un régulateur du genre Watt présente, lorsqu'on né-

1. Il en est ainsi notamment dans les machines verticales de MM. Weyher et Richemond.
2. Nous citerons la Straight line Engine C°, à Syracuse, Armington et Sims, à Providence, Buckeye, à Salem (Ohio), Westinghouse, à Pittsburgh.
3. Mémoire cité de M. Wilson Hartnell.
4. Machines de Lecouteux et Garnier.
5. Régulateur de Mohn. — *Industrie Moderne*, 1890, p. 263.
6. Résal. — *Traité de Mécanique*.

glige la résistance F au manchon, un diagramme tel que celui de la figure 129.

La machine fonctionnant à pleine charge, le régulateur se tient dans sa position inférieure, la vitesse de régime est ω'''_0, supposons qu'on enlève brusquement la moitié de la charge, il existe une position intermédiaire B, du manchon pour laquelle le travail moteur développé est égal à ce travail résistant; admettons que ce soit précisément la position moyenne, ce qui ne dépend en dernière analyse, que des dispositions adoptées pour relier le manchon à la distribution de la force motrice.

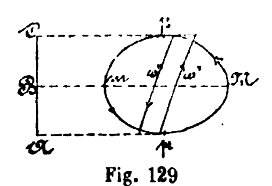


Fig. 129

Au moment où nous supprimons la moitié de la charge, le régulateur commence à s'ouvrir, mais le travail moteur est en excès sur le travail résistant, et la machine s'accélère aussi longtemps qu'il en est ainsi, c'est-à-dire jusqu'au moment où le manchon se trouve en B ; d'autre part, le régulateur a reçu de A en B des actions motrices, car son équilibre était rompu depuis le point A, il a donc acquis en B un *maximum* de vitesse ascensionnelle en vertu duquel il dépasse cette position, mais le travail moteur devient alors inférieur au travail résistant et la machine se ralentit, le régulateur s'arrête et redescend ensuite, mais le ralentissement, qui a commencé pour le parcours BC du manchon, continue pendant le parcours CB, puisque le travail moteur est inférieur au travail résistant; le régulateur arrive en B avec un maximum de vitesse acquise, et dépasse cette position; la vitesse de la machine croît à partir du moment où le manchon descend en dessous de B jusqu'à celui où il revient dans cette position.

En résumé, lorsque la charge varie brusquement comme nous l'avons indiqué, le manchon oscille autour de la position B d'équilibre stable, la vitesse possède sa valeur maxima BM, lorsque le manchon est vers le milieu de sa course ascendante, et sa valeur minima B_m, lorsqu'il est au milieu de la course descendante, les valeurs moyennes sont donc realisées lorsque le manchon est au bas ou au sommet de sa course.

On peut définir ce qui se passe en disant que la vitesse de la machine devance celle indiquée par le régulateur, d'un intervalle de temps égal à celui qui correspond au quart de l'oscillation complète du manchon.

Cet état de choses persisterait indéfiniment jusqu'au moment d'une nouvelle variation de charge, si le mouvement d'oscillation n'était amorti par les résistances passives.

On conçoit qu'il serait bien difficile de traiter le problème d'une manière complète [1], car les forces qui agissent sur le régulateur dépendent, non seulement de sa position, mais de la vitesse variable de la machine, et même, la résistance due au dash-pot varie avec la vitesse de déplacement du régulateur.

1. M. Léauté a résolu cette question.

CHAPITRE IV.

Mesure expérimentale du travail des forces et de la puissance des machines [1].

141. — Il est souvent nécessaire, dans un but d'investigation, de pouvoir mesurer le travail des forces motrices ou résistantes, travail qui ne peut pas toujours être calculé ; nous citerons, par exemple, comme se trouvant dans ce cas, celui que développent les moteurs animés, ou ceux qui sont absorbés par certaines transformations technologiques, telles que le travail des métaux, des matières textiles, le broyage et la mouture, etc.

Parfois, on tient à mesurer directement les travaux moteurs et ceux des résistances utiles, afin de déterminer ou de vérifier le rendement des machines en s'appuyant sur une base certaine.

Les instruments que l'on emploie comportent la mesure séparée de l'effort, et du chemin parcouru par son point d'application ; dans certains cas, on arrive à totaliser mécaniquement le produit de ces quantités, mais plus souvent on enregistre automatiquement la loi qui relie la force au chemin parcouru.

142. — *Mesure de la force considérée isolément.* — Tous les moyens connus de mesurer la force sont basés sur l'un des trois principes suivants :

1° Équilibre statique de la force à mesurer avec une force extérieure connue, telle qu'un poids. Sur ce principe reposent : la balance à fléaux égaux, le peson ou balance romaine, les bascules à poids variables ou à poids constant. Ces appareils conviennent surtout pour mesurer des poids, mais on s'en sert cependant pour évaluer des efforts horizontaux, comme dans les machines servant à l'essai des matériaux.

1. Les instruments qui font l'objet de ce chapitre constituent en réalité des opérateurs que l'on pourrait appeler *machines à mesurer* le travail, et font partie d'un groupe nombreux dans lequel Rühlmann classe les machines à mesurer, à compter, à calculer, à diviser, etc., nous jugeons utile de les rattacher à l'étude des mécanismes.

2° Équilibre de la force à mesurer avec des forces moléculaires ou élastiques, connues par les déformations qui les accompagnent ; ce principe est réalisé dans les balances à ressort ou dynamomètres, qui s'appliquent spécialement à la mesure des forces dont la direction est quelconque ; les manomètres constituent une forme particulière de ces appareils convenant pour mesurer la pression des fluides.

3° Mesure de l'accélération d'un mobile sur lequel agit la force à mesurer, les autres forces étant supposées nulles ou connues, ce procédé pourrait être appelé celui de l'équilibre dynamique. Nous en avons rencontré un exemple dans les procédés employés par Coulomb et Morin dans leurs recherches sur le frottement (21).

Ce principe a fait récemment l'objet d'une application nouvelle et des plus ingénieuses (145).

Pour mesurer le travail d'une force isolée, il suffit d'enregistrer, en même temps que la force, le chemin parcouru à chaque instant suivant sa direction, on obtient ainsi une classe d'appareils qu'on appelle aussi *dynamomètres* comme ceux qui servent simplement à mesurer l'effort.

143. — *Mesure de la vitesse considérée isolément.* — Lorsque la vitesse est uniforme, on peut l'obtenir en relevant l'espace parcouru dans un temps donné, mais ce moyen suppose que l'on est certain *a priori* de l'uniformité du mouvement, il ne peut convenir en général que pour donner la vitesse moyenne d'un mouvement peu varié ; lorsqu'il s'applique à une pièce tournante, il se simplifie notablement, car il suffit alors de relever le nombre de tours dans un temps donné, soit par l'observation directe, soit au moyen d'un compteur.

Lorsque le mouvement est varié, le procédé le plus général consiste à faire tracer automatiquement par le point la loi des espaces ; l'appareil enregistreur doit comporter un tambour dont les déplacements angulaires sont proportionnels au temps, ce qui ne peut être obtenu que par un mouvement d'horlogerie (appareil de Morin pour déterminer la loi de la chute des corps). On obtient la vitesse en menant la tangente à la courbe des espaces, et en mesurant son coefficient angulaire.

La vitesse du mouvement de rotation (uniforme ou varié) peut être obtenue au moyen de tachymètres, basés sur la mesure de la force d'inertie normale, ou force centrifuge, d'un organe dont la vitesse se trouve dans un rapport constant avec celle à mesurer.

Le régulateur à force centrifuge peut évidemment servir de tachy-

mètre, à la condition qu'il n'ait aucune résistance à vaincre ($F = o$), et qu'il ne soit pas isochrone ; à chaque hauteur du manchon, correspond une vitesse que l'on peut déterminer à l'avance.

Le tachymètre de Moscrop est basé sur l'emploi d'un pendule conique ordinaire. Pour que ses indications restent toujours comparables, il faut que l'axe de rotation soit rigoureusement vertical.

Le tachymètre de Buss, construit par Buss, Sombart et Ce, à Magdebourg, qui est très répandu, comporte une disposition dans laquelle les bras du pendule sont ramenés contre l'axe au moyen d'un ressort spiral, l'axe peut par conséquent être orienté comme on le veut dans tous les sens, et on peut même se servir de ce tachymètre à bord des navires sans qu'il soit influencé par les mouvements de roulis ou de tangage.

La vitesse du mouvement rectiligne varié peut aussi être évaluée au moyen de l'accélération, lorsque celle-ci est connue en fonction du temps ; l'intégration permet de trouver la vitesse (145).

Lorsqu'il s'agit d'évaluer des vitesses peu variables d'un instant à l'autre, comme celles des fluides en mouvement, on possède des tachymètres spéciaux tels que les anémomètres, les moulinets ; le loch employé dans la navigation se rattache à cette catégorie d'instruments.

§ I

TRAVAIL PRODUIT PAR UNE FORCE ISOLÉE.

144. — *Dynamomètre de traction de Morin.* L'appareil dont Morin s'est servi dans ses recherches sur le tirage des voitures (fig. 130), comprend un ressort composé de deux lames L, L', l'une est reliée à la résistance, l'autre porte le crochet d'attelage ; lorsqu'on exerce sur celui-ci un effort de traction P, les ressorts prennent une flèche proportionnelle à P ; la somme des flèches est enregistrée à chaque instant sur une bande de papier qui se meut sur les tambours A, B, ceux-ci recevant un déplacement proportionnel à celui de l'effort P. Pour se servir de l'appareil, il faut

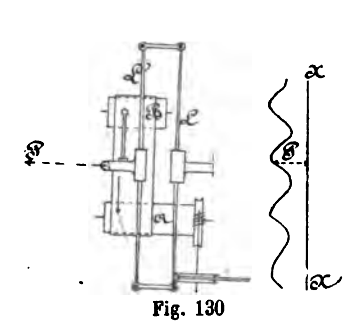


Fig. 130

tracer la ligne de repère XX, qui correspond à un effort nul, on l'obtient en actionnant à la main la bande de papier, sans exercer d'effort sur le crochet.

On déduit du diagramme, soit la valeur moyenne de l'effort, soit celle du travail total, soit celle du travail moyen par seconde, ou puissance du moteur ; il suffit de connaître, d'après les données de l'instrument, l'échelle des efforts P et celle des espaces parcourus.

On peut appliquer à cet appareil le totalisateur, qui donne à simple lecture, la valeur

$$\int P\, de$$

pour une traction d'une certaine durée ; ce totalisateur est basé sur l'emploi d'une roulette r, dont le plan, parallèle à la lame L' du ressort (fig. 131), est à une distance invariable de celle-ci ; lorsque l'effort est nul, cette roulette pose au centre du plateau p et ne reçoit aucun mouvement ; le plateau est commandé par la rotation des roues du véhicule ; lorsque l'effort P déplace la résistance, il est clair que la roulette effectue un nombre de tours proportionnel à

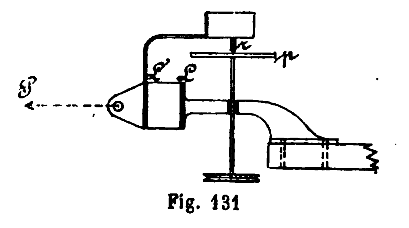


Fig. 131

$$\int P\, de$$

145. — *Appareil dynamométrique de M. Desdouits* (1). — Lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un système de masses données, maintenues par des liaisons définies (train de chemin de fer par exemple), on peut, par l'étude du mouvement de l'une des masses, arriver à la connaissance des forces qui agissent sur le système.

M. Desdouits a résolu ce problème de la manière la plus élégante ; il a réussi à créer un appareil dont l'emploi pourra probablement être généralisé, et qui est basé sur les considérations suivantes.

1. Note sur un nouvel appareil dynamométrique, applicable à la mesure des efforts moteurs et résistants développés dans la traction des trains, par M. Desdouits, ingénieur des constructions navales. *Revue générale des Chemins de fer*, 1883. *Annales des Ponts et Chaussées*, 6e série, t. XI, pp. 371 à 487.

Dans sa forme la plus simple, un pareil dynamomètre est composé d'un tambour T (fig. 132), recouvert de papier, dont l'axe est dirigé parallèlement au mouvement de translation de la masse, supposée pour le moment unique, sur laquelle agit la force à déterminer; ce tambour reçoit, d'un mouvement d'horlogerie, une rotation uniforme; tout l'appareil est installé de niveau dans un fourgon. Au point O est suspendu le pendule O*m*, qui dans l'état de repos ou dans celui de mouvement uniforme, prend la direction verticale. Lorsque le mouvement du point de suspension O est varié et possède une accélération w, le pendule s'incline d'un angle α qui reste invariable tant que l'accélération est constante. La masse m' étant alors soumise à cette accélération en même temps qu'à son poids, il faut qu'on ait :

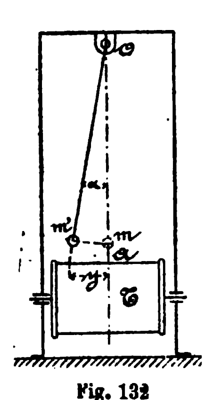


Fig. 132

$$tg\,\alpha = \frac{w}{g}$$

$$w = g\,tg\,\alpha = \frac{g}{OA}\,y$$

Si on représente par P le poids de la masse, la résultante qui agit sur elle au moment considéré est :

$$F = \frac{P}{g}w = \frac{P}{OA}\,y$$

La courbe relevée sur le tambour fournit donc à chaque instant, à une échelle facile à trouver, la résultante cherchée. Par deux intégrations successives de cette courbe, dont l'équation est

$$w = \frac{dv}{dt} = f(t)$$

On obtient $$v = \frac{de}{dt} = \varphi\,(t)$$

et $$e = \psi\,(t)$$

On peut donc utiliser les indications de l'instrument pour mesurer la

vitesse, et pour déterminer l'espace parcouru. On peut en déduire aussi le travail de F en fonction du temps ou en fonction de l'espace, et tracer la loi des variations de la force vive du système. En un mot on peut déterminer les différentes courbes dont il a été question au n° 16, figures 7 et 8.

Dans l'application, l'usage de l'instrument serait limité par sa sensibilité, car on a

$$tg\ \alpha = \frac{w}{g} = \frac{F}{P}$$

Il ne conviendrait donc pas pour mesurer des forces peu importantes; mais dans beaucoup de problèmes, la valeur de F est grande en comparaison de P, il en est souvent ainsi dans les freins continus (28).

La deuxième forme de l'appareil est représentéee dans la figure 133;

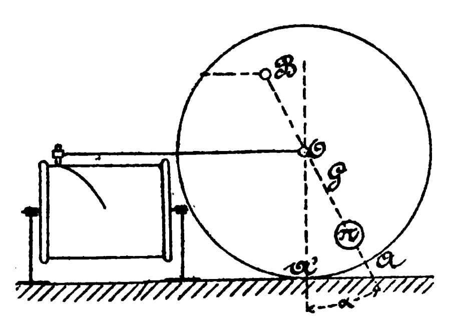


Fig. 133

le pendule est remplacé par un disque circulaire pesant, portant suivant l'un de ses rayons OA une masse additionnelle π, et qui roule sur un plan horizontal appartenant à la masse dont on doit étudier le mouvement. Le disque peut être assimilé à un pendule composé, et si nous supposons que le plan se mouvant de gauche à droite, possède une accélération positive, l'inertie de l'instrument fait que son centre O reste en arrière, jusqu'au moment où le pendule acquiert sa position d'équilibre; il possède alors l'accélération w, et la résultante des forces d'inertie appliquée en G est:

$$\frac{p}{g} w$$

p étant le poids du disque et de la masse additionnelle π.

Soit

$$OA = r$$
$$OG = a$$
$$AOA' = \alpha$$
$$AA' = y = r\alpha$$

on a

$$w = \frac{ga \sin \alpha}{r - a \cos \alpha}.$$

Si l'angle α est faible, on peut écrire:

$$\frac{w}{y} = \frac{ga}{r(r-a)}$$

qui fait voir qu'on peut mesurer une accélération donnée w, au moyen de y, ces deux quantités étant dans un rapport constant facile à déterminer. De plus, une accélération très faible peut se traduire par un déplacement aussi grand qu'on le veut, il suffit de diminuer a, ce qu'on obtient en rapprochant π du centre de figure du disque.

On voit que par ce système, on peut obtenir une très grande sensibilité, ce que l'inventeur caractérise en disant que le couple moteur augmente en raison du poids du disque, tandis que le couple de rappel diminue autant qu'on le veut. On peut du reste agir encore sur le moment d'inertie du disque, soit en accumulant la masse à son centre, ou au contraire vers la périphérie, et profiter de cette latitude pour le soustraire plus ou moins à son inertie propre, lors de sa mise en position, inertie dont l'effet est de lui faire dépasser l'angle d'équilibre, et de produire des oscillations dans les diagrammes [1]. Il suffit d'inscrire les déplacements y, du point de contact A, (ou ce qui revient au même ceux du centre O), sur un tambour à l'état de rotation uniforme, pour obtenir la loi

$$w = f(t)$$

et par deux intégrations successives, trouver la vitesse et l'espace parcouru à chaque instant.

On peut aussi inscrire les déplacements d'un point quelconque tel que B, choisi sur le prolongement du rayon AO, attendu qu'ils restent dans un rapport constant, et qui n'altère que l'échelle, avec la quantité y.

1. M. Bertin, ingénieur de la marine française avait déjà utilisé ces propriétés dans ses ingénieux oscillographes destinés à l'étude de la houle et du roulis.

Pour empêcher que le disque ne glisse lors des mouvements brusques du mobile, le dynamomètre, tel qu'il est réalisé, comporte deux secteurs dentés ayant leur centre en O, mis en prise avec deux crémaillères situées dans le plan de roulement.

Lorsqu'on applique ce dynamomètre à l'étude du navire, il donne immédiatement la résultante des forces extérieures qui produisent le mouvement de translation, c'est-à-dire l'effort de propulsion diminué de la résistance au mouvement de la carène, il suffit, pour l'obtenir, de multiplier l'accélération w par la masse entière du navire.

Lorsqu'on le place dans le fourgon d'un train de chemin de fer, il n'en est pas tout à fait ainsi, car les essieux et les roues constituent des systèmes qui subissent non seulement l'accélération du mouvement général de translation, mais encore une accélération due au mouvement de rotation. En d'autres termes, lors de la mise en train, l'accélération du mouvement est diminuée par l'inertie du mouvement de rotation des roues; lors de la suppression de la force motrice, au contraire, les roues font volant, et retardent l'arrêt.

Soit:

M la masse du train,

m la masse des roues concentrées en une seule, r leur rayon,

dm l'élément situé à la distance ρ.

Au moment où l'effort moteur F est exercé sur le train (toutes résistances défalquées), il naît, au contact de la roue unique avec le rail, une réaction f de celui-ci dirigée vers l'arrière, employée à accélérer le mouvement de rotation. Cette force transportée au centre donne lieu à un couple positif fr et à une force f appliquée au centre de la roue, et dirigée vers l'arrière.

On a, du reste, en appelant ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation, et I le moment d'inertie de la roue autour de son axe:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$$

$$fr = \int_0^r \rho^2 \, dm \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt}$$

d'où

$$f = \frac{\mathrm{I}}{r^2}\frac{dv}{dt}$$

Il reste, pour la force produisant le mouvement de translation :

$$F - f = (M + m\frac{dv}{dt}$$

ou :

$$F = \left(M + m + \frac{I}{r^2}\right)\frac{dv}{dt}$$

Pour déduire, de l'accélération $\frac{dv}{dt}$ fournie par le dynamomètre, la force F agissant sur le train et représentant l'effort de traction diminué de la résistance au roulement, de la résistance de l'air, de l'action éventuelle des freins, etc., on voit qu'il faut multiplier l'accélération par une *fonction des masses*; il est vrai de dire que $\frac{I}{r^2}$ est faible en comparaison de $M + m$.

Dans le cas où les freins agiraient seuls, et où tout effort de traction serait supprimé, $\frac{dv}{dt}$ serait négatif, et F représenterait la somme des résistances.

146. — *Inertia-Instrument* (1). — Cet appareil, auquel nous conservons le nom que lui a donné son inventeur, M. Williams, de Philadelphie, a été créé pour évaluer expérimentalement la force d'inertie des pièces à mouvement alternatif des machines à vapeur, pièces dont l'accélération atteint, aux points morts, de très grandes valeurs. Il comprend, comme parties essentielles, une masse reliée à la crossette par l'intermédiaire d'un ressort en hélice disposé absolument comme celui des indicateurs (148). L'axe de ce ressort est parallèle à la direction du mouvement, il mesure donc, par ses déformations très petites, la valeur de la force d'inertie de la masse reliée ; au moyen d'un système facile à imaginer et qui est imité de celui des indicateurs, on obtient l'inscription des forces d'inertie sur un tambour qui se déplace de la même manière que la crossette.

Il s'agit donc ici d'un dynamomètre du même genre que celui de M. Desdouits, mais dans lequel la force de rappel, au lieu d'être due à un poids, est produite par un ressort.

Nous devons encore signaler, à propos de cette classe intéressante

1. *American Machinist*, 9 août 1884. — Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand. — *Bulletin Mensuel*, 1884-85, p. 41.

d'instruments, que M. Ernest Solvay a émis l'idée, il y a quelques années, de se servir de l'accélération pour créer un instrument devant servir de stadiomètre, ou même de stadiographe, et qui serait d'une importance très grande pour la navigation par estime. En fait, cet instrument serait réalisé, pour les chemins de fer, par le dynamomètre de M. Desdouits, auquel on adjoindrait deux intégrateurs mécaniques successifs.

§ II.

Travail produit par la pression d'un fluide.

147. — Si on représente par p la pression par unité de surface exercée par le fluide, pression mesurée au moyen d'un manomètre, et par S la surface du piston, le travail correspondant à un déplacement e sera

$$p\,S\,e$$

Lorsque p varie pendant la course du piston, le travail correspondant à un parcours e de cet organe est

$$S\int_0^e p\,d\,e$$

p doit être donné à chaque instant en fonction de e; le manomètre ordinaire ne se prête pas à la lecture d'une pression variable, l'emploi d'un appareil enregistreur est donc tout indiqué.

148. — *Indicateur.* — On donne ce nom à l'instrument qui donne, pour chaque position du piston, la valeur de la pression qui s'exerce à cet instant. L'indicateur a été employé par Watt, sous une forme rudimentaire, probablement dès 1814, puis perfectionné par Mac-Naught, qui en a fait un appareil pratique pour les machines à basse pression et à marche lente. L'indicateur de Mac-Naught comprend un cylindre C

1. Edw. A. Cowper. — *On the Inventions of Watt.* - Engineering, 1883, 2e sem. p. 511, et une intéressante notice de M. Bryan Donkin. — Engineering, 1888, 2e sem. p. 577.

(fig. 134), dans lequel se meut un piston P ajusté par rodage, dont le jeu ne donne lieu à aucune fuite ni aucun frottement, ce cylindre est monté sur la machine en un point tel qu'il communique toujours avec la pression à mesurer, celle-ci s'exerce donc toujours sur le piston de l'indicateur, où elle est équilibrée par un ressort en hélice assez fort pour que ses déformations restent sensiblement proportionnelles aux pressions, dans les limites où l'instrument doit être employé, et assez long pour que les flèches soient suffisantes, et ne donnent pas lieu à des erreurs de lecture trop grandes.

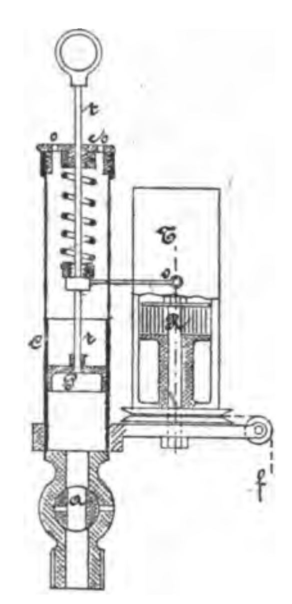


Fig. 134

Le ressort présente deux douilles vissées sur la tige du piston et sur le couvercle *c* de l'indicateur, de sorte qu'il peut agir par extension et mesurer des pressions inférieures à la pression atmosphérique qui s'exerce toujours sur le piston, et qui s'établit par les ouvertures *oo* ménagées dans le couvercle.

La tige *t* porte un crayon *s*, qui suit les déplacements du petit piston en se mouvant suivant les génératrices du tambour T; celui-ci porte une feuille de papier, et reçoit, de la machine à expérimenter, un mouvement alternatif, dont la vitesse, mesurée sur la circonférence, est à chaque instant proportionnelle à celle du piston moteur qui reçoit le travail à mesurer.

Ce déplacement du tambour est obtenu au moyen d'une corde très flexible et non susceptible de s'allonger, que l'on attache en un point convenablement choisi; elle n'agit que par extension, le mouvement de retour du piston est produit par un ressort en spirale R placé dans un barillet au centre du tambour, et dont la raideur est suffisante pour maintenir tendue la ficelle *f* qui lui communique le mouvement.

Le diagramme tracé représente, en ordonnées, l'excès de la pression à mesurer sur la pression atmosphérique, excès qui peut être positif ou négatif; il est nécessaire de relever au préalable l'axe à partir duquel cet excès est mesuré, il est obtenu en faisant agir la pression atmosphérique sur la face inférieure du piston de l'indicateur, au moyen du robinet à deux voies A, le crayon laisse sur le papier une ligne perpen-

diculaire aux génératrices du cylindre. Après une course double du piston, la pression du fluide reprend généralement la même valeur [1], il en

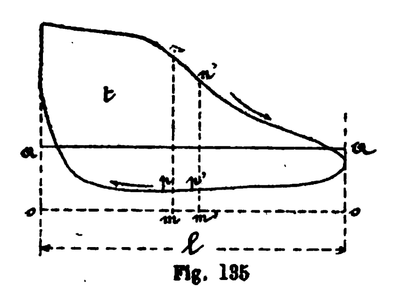


Fig. 135

résulte que le diagramme est une courbe fermée qui présente la forme de la figure 135, et qui est coupée par la ligne atmosphérique.

149. — Connaissant l'échelle qui doit servir à mesurer les ordonnées, la surface S du piston de la machine, et sa course L, on peut évaluer le travail développé pour le parcours complet du piston, sur une de ses faces.

Considérons à cet effet, une machine dont le piston aurait l'unité de surface, et une course égale à la longueur du diagramme : menons, parallèlement à la ligne atmosphérique, la ligne *oo*, distante de la précédente de 1 atmosphère; les ordonnées telles que *mn*, *mp*, représentent les pressions absolues qui s'exercent sur le piston à l'aller et au retour, le travail développé par le parcours du piston, à l'aller, est représenté par la surface

$$m\ n\ n'\ m'$$

le travail résistant absorbé au retour pour le chemin *m'm* est représenté par

$$m\ p\ p'\ m'$$

La différence de ces deux travaux est donnée par

$$n\ n'\ p'\ p$$

Pour la course entière d'aller et retour, le travail développé sera donc mesuré par la surface fermée *t* du diagramme.

1. Dans les moteurs à gaz les plus répandus, l'évolution complète du fluide comprend quatre courses.

Le travail de la machine réelle ne diffère de celui de la machine considérée que par la surface S fois plus grande du piston, et la longueur $\frac{L}{l}$ fois plus grande de la course, le travail cherché sera

$$S \frac{L}{l} t$$

Or, $\frac{t}{l}$ représente l'ordonnée moyenne du diagramme, indépendante de l'amplitude du mouvement du point choisi pour commander le tambour; si on appelle p_m cette ordonnée moyenne, mesurée à l'échelle des pressions, le travail, pour la période considérée, a pour valeur

$$SLp_m$$

Le calcul de p_m peut être fait au moyen du planimètre, qui donne immédiatement, après division de la surface t par la base, l'ordonnée moyenne en millimètres; l'échelle relative au ressort employé permet d'évaluer la pression correspondante en kilogrammes par centimètre carré, il suffit d'exprimer S en centimètres carrés et L en mètres pour obtenir le travail SLp_m en kilogrammètres.

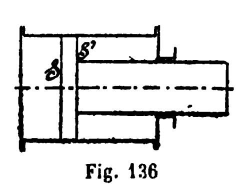


Fig. 136

La puissance développée sur un piston résulte des travaux développés sur ses deux faces; pour la calculer, il est nécessaire de relever le diagramme des pressions sur la deuxième face, dont la section S' peut être différente de la première (fig. 136). Soit p'_m la pression moyenne de ce diagramme.

Si le mouvement alternatif du piston est lié à un arbre qui effectue n révolutions par minute, la puissance développée sur les deux faces du piston, évaluée en chevaux, devient :

$$N = \frac{nL(Sp_m + S'p'_m)}{60 \times 75}$$

dans le cas où $S = S'$, on a :

$$N = \frac{2LnS}{60 \times 75} \frac{p_m + p'_m}{2}$$

Le facteur $\frac{2LS}{60 \times 75}$ caractérise les dimensions de la machine, il suffit,

à chaque expérience, d'évaluer *n* ainsi que les pressions moyennes des deux diagrammes. — Il est évident que la pression atmosphérique, qui s'exerce ***sur la section de la tige***, occasionne, pendant la course directe, un travail résistant; toutefois, ce travail est restitué pendant la course rétrograde, et n'intervient pas dans le calcul.

Lorsque le régime de la machine varie, tant sous le rapport du travail qu'elle développe que sous le rapport de la vitesse, on se propose presque toujours de rechercher la puissance moyenne développée pendant un temps assez long, ou encore de totaliser le travail effectué pendant un certain nombre d'heures; il faut alors, par des observations de vitesse et par des diagrammes suffisamment nombreux, calculer la puissance développée à des intervalles rapprochés, si N est la puissance à l'instant *t*, on voit que la puissance moyenne développée pour une période de durée T sera :

$$N_m = \frac{1}{T}\int_o^T N\,dt$$

lorsque les diagrammes sont pris à intervalles régulieurs $\frac{T}{K}$, on obtient

$$N_m = \left(\frac{\frac{N_o + N_k}{2} + N_1 + \ldots\ldots + N_{k-1}}{K}\right) T$$

Il ne faut pas confondre l'expression comprise dans la parenthèse, et qui représente l'ordonnée moyenne de l'intégrale, avec celle que l'on obtiendrait en calculant la moyenne arithmétique des ordonnées, et qui conduirait à un résultat inexact.

Le calcul ci-dessus suppose que la fonction N est *continue* ; lorsque le travail d'un moteur varie brusquement, suivant une loi indéterminée, il est impossible d'obtenir une mesure sérieuse de la puissance par ce procédé ; c'est pourquoi, dans les expériences de précision, il est nécessaire d'opérer sous une charge aussi *constante* que possible.

150. — ***Planimètre servant à trouver directement l'ordonnée moyenne*** (¹). — On peut réaliser un planimètre d'Amsler à directrice rec-

1. Cet instrument est signalé dans le catalogue de la Straight line Engine, de Syracuse, sous le nom de *Coffin's Averaging Instrument*.

tiligne (fig. 137), le diagramme étant placé comme l'indique la figure, c'est-à-dire ayant la ligne atmosphérique perpendiculaire à la directrice, et la première ordonnée suivant son prolongement, on fait le tour de la figure en partant du point A et dans le sens de la flèche, lorsque le stylet

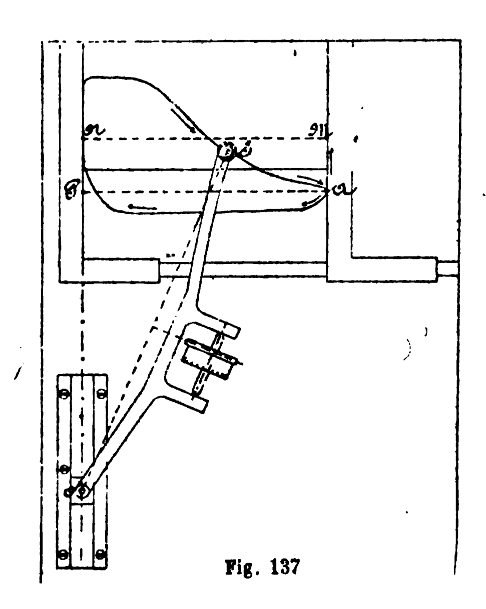


Fig. 137

est revenu au point de départ, on effectue un parcours additionnel AM, que l'on arrête lorsqu'on retrouve sur le compteur le chiffre du point de départ, AM est l'ordonnée moyenne.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que le parcours MN, NP, PA, n'altère pas la position de la roulette, attendu que les deux parcours MN et PA entraînent des rotations égales et opposées, et que le parcours NP laisse la roulette immobile, etc.

151. — *Observations.* — 1° La pression moyenne au diagramme peut être trouvée sans le secours du planimètre, les indicateurs Richards sont souvent pourvus d'un appareil articulé, qui sert à tracer à travers le diagramme, perpendiculairement à la ligne atmosphérique, 11 ordonnées séparées par 10 intervalles égaux, on a alors (fig. 138).

$$p_m = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{10}}{10}$$

2° Nous avons pris comme exemple, le cas d'une machine motrice, puisque nous avons supposé que la pression s'exerçant sur le piston

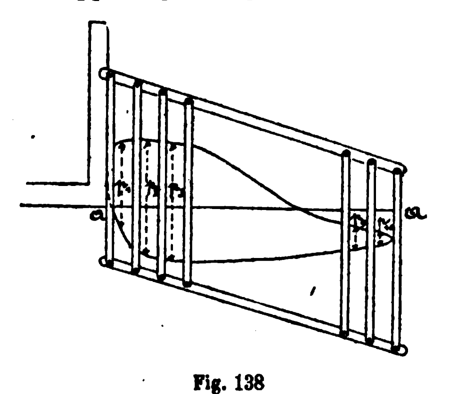


Fig. 138

pendant la course directe est plus grande que la contrepression pendant la course rétrograde.

Le même diagramme deviendrait celui d'une machine absorbant du travail s'il était tracé en sens inverse, c'est-à-dire si la branche inférieure de la courbe correspondait à la marche directe.

152. — ***Indicateur Richards.*** — L'indicateur de Mac-Naught, ou celui du même type, connu dans la marine française sous le nom d'indicateur Garnier, ne convient pas pour les grandes vitesses de rotation, car la

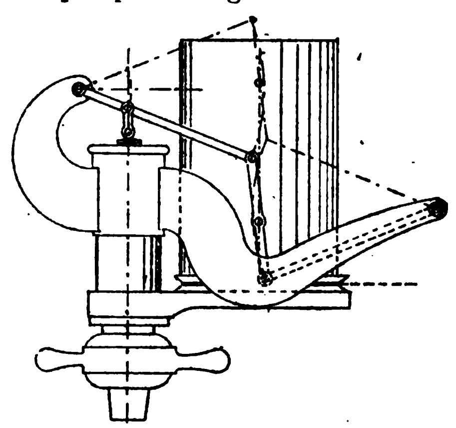


Fig. 139

compression du ressort doit être égale à la hauteur du diagramme, le piston de l'indicateur et sa tige doivent recevoir une course égale à cette hau-

teur; dans ces conditions, les ordonnées du diagramme sont influencées par les forces d'inertie des parties mobiles de l'indicateur, forces qui se traduisent par des ondulations de la courbe; on peut concevoir l'indicateur Richards comme dérivé de l'appareil précédent et dans lequel on aurait divisé le ressort en quatres parties égales pour n'en conserver qu'une; les flèches sont ainsi rendues quatre fois plus petites, elles sont ensuite amplifiées dans le rapport de 1 à 4 au moyen d'un mécanisme à fléaux extrêmement léger (fig. 139); les ressorts devenant très courts, on peut obtenir des déformations convenables en augmentant à la fois leur raideur et leur longueur, il en résulte que ces déformations restent plus exactement proportionnelles aux pressions.

153. — L'appareil Richards a été, pendant un assez grand nombre d'années, l'indicateur par excellence; son emploi tend déjà plus ou moins à disparaître; l'inertie des pièces y est trop considérable encore pour les

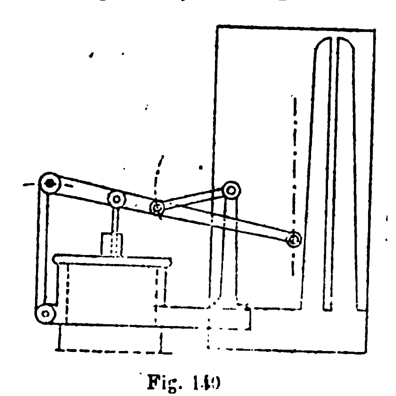


Fig. 140

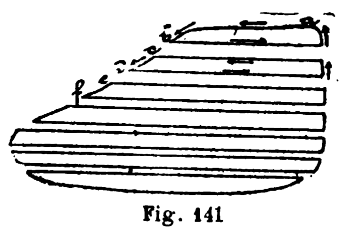
grands nombres de tours; les indicateurs Thompson (fig. 140), Crosby [1], Tabor [2], Martin [3], par la légèreté des pièces mouvantes et la réduction de la course pour une hauteur donnée de diagramme, permettent de relever des courbes qui ne présentent pas trop d'ondulations, même à des vitesses dépassant 300 révolutions par minute. Dans l'indicateur Crosby, le barillet a reçu des perfectionnements qui en rendent la commande très douce, et exempte de soubresauts [4].

Diverses tentatives ont été faites pour réaliser des indicateurs sans

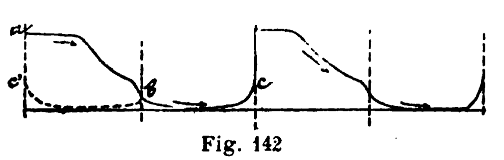
1. Engineering, 1884, 1er sem., p. 185.
2. Engineering, 1889, 1er sem , p. 653.
3. Bienaymé. — *Machines Marines*, p. 149.
4. *Compte-rendu des séances du 9e Congrès*, etc. — Paris, Capiomont, 1886. — Note de M. Walther-Meunier.

pistons, la pression s'exerçant sur un diaphragme flexible analogue à celui du manomètre Schaeffer et Budenberg, ou dans un tube à section elliptique ([1]). L'emploi de ces instruments ne s'est pas généralisé, ils peuvent rendre des services dans des cas spéciaux ([2]). M. Marcel Deprez avait indiqué ([3]) un moyen de supprimer le barillet et les saccades qui se produisent à grande vitesse, en se servant d'un système basé sur le pantographe.

Enfin, nous devons encore citer, à titre de curiosité, un procédé ingénieux imaginé par Hirn pour mettre le diagramme absolument à l'abri des forces d'inertie; il consiste à limiter, par un système de deux buttoirs, espacés d'une quantité constante, la course du piston de l'instrument; le système de deux buttoirs est déplacé à chaque relevé, on obtient ainsi, sur la même feuille, une série de diagrammes partiels (fig. 141), qui, par leur réunion, dessinent la loi réelle des pressions; le mouvement dans le sens vertical étant très faible à chaque tracé, il en résulte que les pressions enregistrées par les éléments *ab*, *cd*, *ef*, etc., sont bien affranchies des forces d'inertie. M. Paul Garnier, à Paris, construit un indicateur dans lequel le principe ci-dessus est réalisé d'une manière pratique. Pour que le procédé de Hirn soit applicable, il faut que la loi des pressions reste la même pendant toute la durée du relevé.


Fig. 141

154. — *Indicateurs pour travaux très variables.* — Dans les machines d'extraction des mines, le travail varie d'un tour à l'autre; on peut alors recueillir, au moyen de l'indicateur de M. Guinotte, les diagrammes d'un grand nombre de tours successifs, en évitant la confusion qui résulterait de leur superposition partielle; le mouvement du tambour, tout en étant proportionnel au déplacement du piston, a toujours lieu dans le même sens, grâce à un mécanisme d'enclanchement spécial; on obtient alors par un trait continu *abc*..... (fig. 142), la loi de variation de cette pression.


Fig. 142

1. *Kenyon's Pistonless Indicator.* - - Engineering, 1880, 1er sem., p. 323.
2. Indicateur pour faibles pressions, par A. Stévart, *Revue universelle des Mines*, 2e série, T. I, 455.
3. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 188J.

Dans un ordre d'idées analogue, on a produit des indicateurs où le tambour se relève, à chaque tour, d'une quantité constante et connue, (Schaeffer et Budenberg), et l'indicateur Richardson, où les diagrammes sont obtenus détachés l'un de l'autre avec une certaine déformation, etc.

155. — Nous devons signaler encore l'indicateur Prussman (fig. 143), qui donne à chaque instant, à partir de la ligne atmosphérique, la diffé-

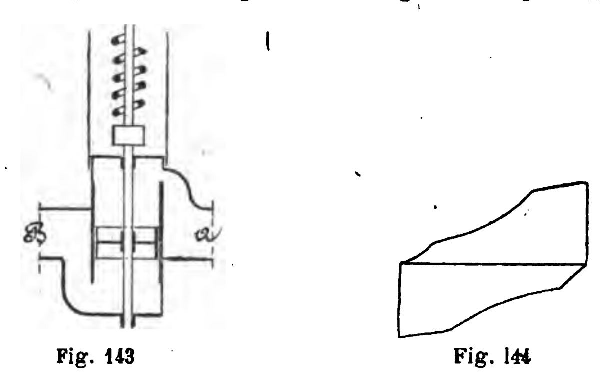


Fig. 143 Fig. 144

rence des pressions sur les deux faces du piston, il suffit à cette fin, de faire communiquer les tubulures A et B avec les deux extrémités du cylindre, les diagrammes obtenus sont représentés figure 144. Cet indicateur peut aussi, par une manœuvre convenable des robinets, donner des diagrammes ordinaires.

156. — ***Sur l'approximation obtenue au moyen des indicateurs et les précautions à prendre dans leur emploi.*** — L'indicateur est devenu un instrument de recherche de premier ordre, grâce à l'expérience que les ingénieurs en ont acquise, aux soins avec lesquels il est construit, et aux travaux de plusieurs savants qui l'ont étudié d'une manière complète [1]. Des expériences précises, dans lesquelles on dispose de moyens de vérification, ont démontré que l'approximation des indicateurs peut atteindre 1 %. Toutefois, l'attention doit être sérieusement attirée sur les points suivants :

1° Pour chaque système d'appareils, il existe une vitesse à laquelle les ondulations commencent à se montrer dans les diagrammes, et cette

1. Recherches du professeur Berndt, de Chemnitz, Engineering, 1877, 2e sem., p. 383. — 1878, 1er sem., pp. 77 et 295 ; de M. L. de Maupeou en France, *Minutes of proceedings of the Institution of Civil Engineers*, V. LXXII, p. 386 ; du professeur Osborne Reynolds, en Angleterre, même recueil, V. LXXXIII, pp. 1 à 105.

vitesse peut être d'autant plus élevée que les ressorts sont plus raides; ainsi, pour le Richards, d'après le mémoire de M. Osborne Reynolds, le ressort produisant des ordonnées de 1 pouce pour la pression de 20 livres par pouce carré, donne des ondulations lorsque le nombre de tours est de 69 par minute, la vitesse croît pour des ressorts plus raides suivant le tableau ci-dessous

NOMBRE DE LIVRES PAR POUCE CARRÉ DANS UN POUCE D'ORDONNÉE	VITESSE POUR LAQUELLE COMMENCENT LES ONDULATIONS
20	69
40	99
60	120
80	139
100	155

Les ondulations proviennent des effets de l'inertie lors de la brusque mise en charge du ressort, leur durée est à peu près constante, et leur amplitude décroit; elles n'affectent pas beaucoup la surface du diagramme, mais elles peuvent le déformer considérablement; on les réduit en diminuant la masse des organes rattachés au piston, sous ce rapport, les appareils Crosby, Thompson, etc., présentent une grande supériorité.

2° Les ressorts doivent toujours être essayés au moyen de charges directes, appliquées soit à l'aide de poids, soit au moyen d'un manomètre à air libre, les déformations sont mesurées dans toute l'étendue des pressions; pour cette opération, le ressort est placé dans l'indicateur, il doit être maintenu à la température de 100° au moins, par une circulation de vapeur, de manière à être mis dans les conditions pratiques de son emploi. Les déformations à chaud sont supérieures aux déformations à froid, et l'erreur de ce chef atteint 1 ou 2 %. Les ressorts qui présentent des déformations en désaccord avec les échelles doivent être rejetés.

3° Le crayon doit être appuyé très légèrement sur le tambour, principalement quand on opère sur de basses pressions, donc avec des ressorts faibles.

4° Les communications entre le cylindre et l'indicateur doivent être aussi courtes et aussi directes que possible, ne présenter ni coudes ni étranglements, et être bien préservées contre les refroidissements.

5° Les ficelles employées doivent être très résistantes et inextensibles, il faut au préalable les charger de poids, afin de supprimer leur allongement ultérieur; elles doivent être aussi courtes que possible ; l'axe du tambour doit être bien graissé ; pour les grandes vitesses, il faut préférer les dispositions de ressorts de rappel qui ont pour objet d'uniformer la tension de la ficelle, afin de rendre son allongement constant, ce qu est réalisé dans le Crosby [1].

6° Le tambour de l'indicateur peut être commandé par un réducteur de course à tambour différentiel, ou par un système de leviers rigides rattachés à la crosse du piston, ce dernier moyen est seul applicable pour les grands nombres de tours. — Il est impossible de prévoir en détail toutes les combinaisons qui peuvent être employées, mais il ne faut pas perdre de vue que les déplacements du tambour doivent rester rigoureusement proportionnels à ceux du piston, beaucoup de dispositions souvent admises ne satisfont pas à cette condition et donnent des diagrammes déformés.

7° L'habileté et l'expérience de l'opérateur ont naturellement une grande influence sur la précision des résultats, et lui suggèrent une foule de soins qu'il serait inutile d'indiquer.

8° Avant l'emploi, le piston et toutes les articulations doivent être graissés, après l'emploi, toutes les parties doivent être minutieusement essuyées, il faut éviter que la rouille, en attaquant les ressorts, n'altère leurs déformations.

§ III.

Travail moteur disponible sur un arbre.

157. — *Frein de Prony.* — Lors d'une expertise sur la machine à vapeur du Gros-Caillou, Prony eut l'idée de mesurer la puissance déve-

1. Mair, pp. 50-55. — Wingfield, pp. 74-78. — *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, LXXX.

loppée en l'absorbant par une résistance facile à évaluer, et créa un frein dynamométrique, souvent employé aujourd'hui encore sous sa forme primitive.

Il comprend (fig. 145), une poulie de rayon R, calée sur l'arbre auquel

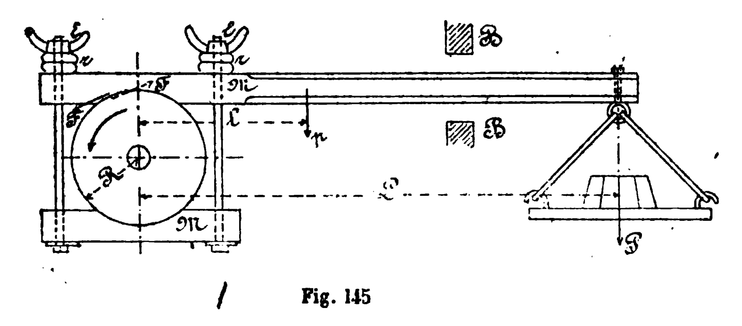


Fig. 145

le moteur communique la puissance à mesurer, et deux mâchoires M, M', en bois dur, serrées au moyen des écrous E; les ressorts r, r, permettent d'obtenir un serrage modéré; le sabot supérieur est prolongé par un levier, à l'extrémité duquel se trouve un plateau; des buttoirs B, B, permettent de limiter la course du levier dans les deux sens.

On met la machine dans les conditions de fonctionnement pour lesquelles elle développe le travail à mesurer, tout en serrant les mâchoires du frein, de manière à maintenir la vitesse du régime de n tours par minute; on équilibre le frein au moyen de poids placés sur le plateau.

Dans ces conditions, si l'on néglige le frottement sur l'arbre, et si l'on appelle F, F'.... les frottements développés entre les sabots et la poulie, on aura pour la puissance en chevaux, absorbée par ces frottements, laquelle représente aussi la puissance de la machine :

$$N = \frac{2\pi \ Rn \ \Sigma F}{60 \times 75}$$

D'autre part, soit p le poids du frein (y compris la plateau vide), agissant à la distance l du centre de l'arbre, et P le poids ajouté sur le plateau à la distance L, on aura, lorsque le frein est équilibré :

$$R \ \Sigma F = PL + pl$$

d'où, par substitution :

$$N = \frac{2\pi n \ (PL + pl)}{60 \times 75}$$

Le produit pl se détermine expérimentalement par le procédé indiqué (fig. 146), on obtient ainsi le poids p' tel que

$$p'L = pl$$

d'où

$$N = \frac{2\pi n L (P + p')}{60 \times 75}$$

Les mâchoires tendent à s'échauffer par le travail du frottement, il est nécessaire de les arroser au moyen d'eau savonnée, qui a pour effet de donner à ce coefficient de frottement une valeur plus régulière; malgré

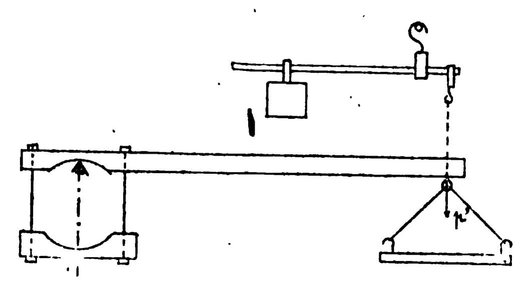


Fig. 146

cette précaution, il faut constamment régler le serrage afin de maintenir la vitesse de régime, et d'empêcher le levier de donner contre ses buttoirs.

Au point de vue de l'échauffement, il faut donner à la poulie une surface proportionnelle au travail à absorber par seconde, car la chaleur s'écoule par conductibilité à travers la jante; même si le refroidissement est obtenu par l'arrosage à l'eau froide, la quantité de chaleur enlevée par seconde est encore proportionnelle à cette surface, ou au produit de la largeur par le diamètre.

Pour que le bois se comporte bien au point de vue du frottement, il faut que la pression normale qu'il supporte par unité de surface soit à peu près constante en passant d'un appareil à l'autre, le frottement par unité de surface doit donc l'être aussi; si on appelle S la surface frottante, et v la vitesse au contact, le travail absorbé sera KSv, K étant un coefficient constant.

On aura donc:

$$S = \frac{N}{Kv}$$

c'est-à-dire que la surface de contact peut varier en raison inverse de la vitesse, tandis que, d'après la première condition, elle serait simplement proportionnelle à la puissance.

158. — En comparant les freins employés dans diverses circonstances, on peut poser la formule :

$$LD = 0{,}004\ N$$

L est la largeur et D le diamètre de la poulie en mètres, N la puissance en chevaux; il faut, pour que cette formule soit applicable, que la vitesse à la circonférence soit au moins de 6 mètres par seconde, si la vitesse v était inférieure à ce chiffre, il faudrait multiplier le produit ci-dessus par

$$\frac{6}{v}$$

Exemple :

$$N = 50 \text{ chevaux}$$
$$n = 130 \text{ tours par minute}$$

On trouve :

$$LD = 0.20$$

on pourra adopter :

$$D = 1^{m}000$$
$$L = 0^{m}200$$

attendu que

$$v = \frac{\pi \times 130}{60} = 6^{m}80$$

Pour $n = 80$ tours par minute, on a :

$$v = 4^{m}.20$$

on prendra donc

$$LD = \frac{0.20 \times 6}{4.2} = 0.285$$

d'où, pour

$$D = 1^{m}000$$
$$L = 0^{m}285$$

On peut employer des freins de moindre surface, mais on éprouve plus de difficultés à obtenir un fonctionnement régulier.

159. — ***Perfectionnements apportés au frein de Prony.*** — On peut rendre le serrage plus facile à régler en disposant les mâchoires comme l'a indiqué Poncelet (fig. 147), on profite ainsi du ressort des pièces de bois, l'écrou E devient aussi plus accessible, mais ce système ne convient que pour de petites poulies.

Dans la forme ordinaire, l'équilibre est affecté par la position du levier;

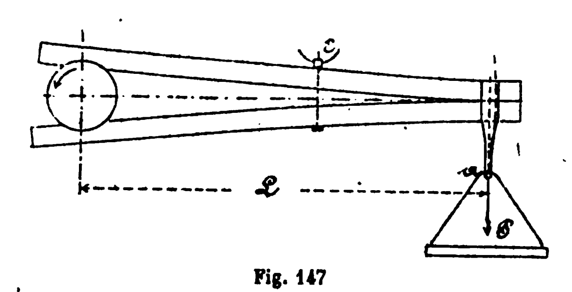


Fig. 147

lorsqu'il s'élève, le bras L diminue; il en résulte une certaine instabilité, que l'on peut combattre en reportant le point d'attache A, du plateau, en-dessous de l'horizontale passant par le centre de l'arbre. Lorsque le frein tend à s'enlever, le moment du poids augmente et l'équilibre se rétablit automatiquement; de même, quand il tend à descendre, le bras de levier de l'effort diminue, et l'équilibre se rétablit encore.

Il est vrai que les indications sont alors entachées d'une légère erreur; au point de vue de la rigueur des résultats, il vaut mieux employer un dispositif analogue à celui qui a été introduit par M. Walther Meunier dans le frein de MM. Weyher et Richemond (fig. 148).

Ce dernier appareil [1] est caractérisé surtout par une disposition excellente qui supprime l'arrosage, et qui consiste à employer une poulie

1. Note de M. Walther-Meunier présentée au 4e Congrès tenu en 1879 à Rouen, par les Ingénieurs en chef des Associations pour la surveillance des chaudières à vapeur.

creuse à circulation d'eau intérieure (fig. 149); l'eau arrive d'un réservoir par le tuyau *a*, pénètre entre les joues *j*, *j*, et s'écoule par un ajutage concentrique à la tubulure d'arrivée au point *b*. Les sabots sont enduits de graisse.

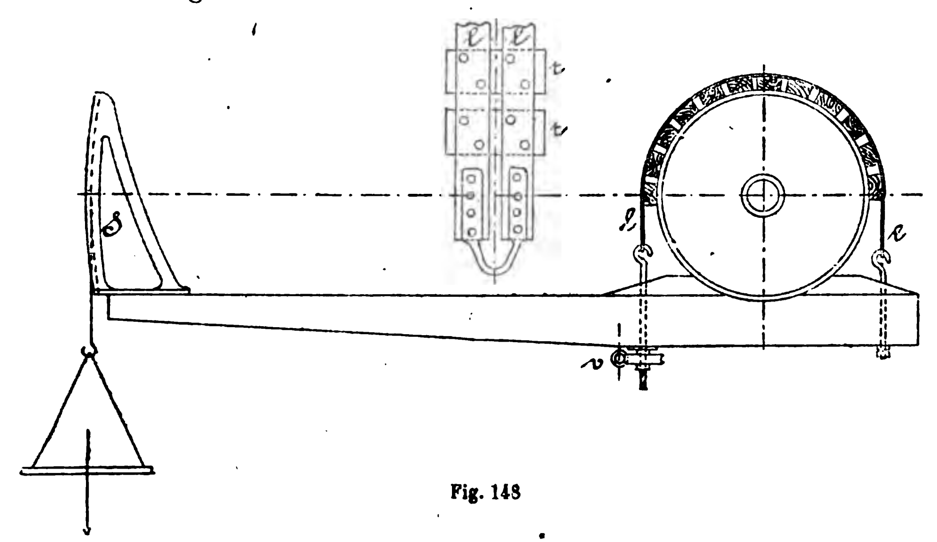


Fig. 148

Ce frein peut être proportionné d'après les formules établies au n° 158. On remarquera que les sabots rigides sont remplacés par des taquets *t*, montés sur une lame flexible *l*, sur laquelle on agit pour régler le serrage au moyen d'une vis tangente *v*, manœuvrée par un volant latéral; il est du reste presqu'impossible de conserver le sabot unique lorsque le diamètre devient grand.

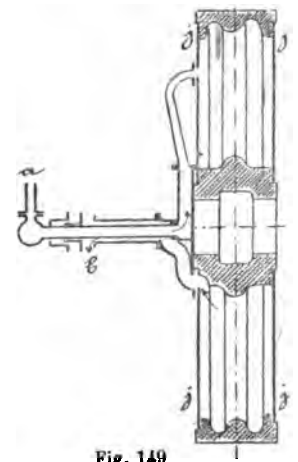


Fig. 149

Malgré l'emploi du secteur S, le poids *p*, du frein seul, étant appliqué au centre de gravité, est encore de nature à troubler l'équilibre lorsqu'il se produit des oscillations; on pourrait corriger tout à fait ce défaut, par l'addition d'un contrepoids capable d'amener le centre de gravité au centre de l'arbre.

D'ailleurs, ces diverses formes ont l'inconvénient de reporter sur l'arbre le poids propre du frein, ainsi que la

charge additionnelle ajoutée dans le plateau, il en résulte que le frottement de l'arbre sur ses coussinets est augmenté d'une manière anormale pendant l'expérience.

160. — Pour analyser la répartition des forces dans le frein de Prony, admettons qu'il soit constitué de telle manière que chacun des sabots ne touche la poulie qu'en un seul point A, B (fig. 150), et que les tringles

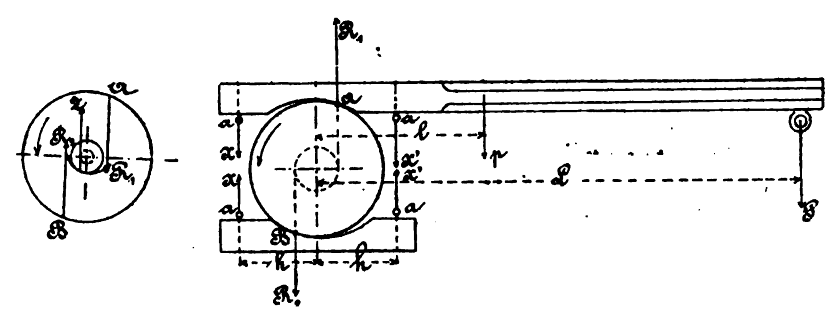


Fig. 150

qui réunissent les deux mâchoires soient articulées à leurs extrémités *a*, de manière que les tensions qui s'y développent ne puissent prendre que les directions *aa*; les réactions de la poulie sur les sabots passent à une distance du centre donnée par $r \sin \varphi$, r étant le rayon de la poulie et φ étant l'angle du frottement; de plus, elles ne peuvent être que verticales, étant donnée l'hypothèse faite sur les tringles. Si p représente le poids de l'appareil en y comprenant le sabot inférieur, R_1 et R_2 les réactions, on aura

$$(1) \qquad PL + pl = (R_1 + R_2)\, r \sin \varphi$$

$$(2) \qquad R_1 - R_2 = P + p$$

Ces équations permettent de déterminer R_1 et R_2.

On a du reste, en appelant X, X', les tensions dans les tringles, et p_2 le poids du sabot inférieur :

$$(3) \qquad X + X' = R_2 + p_2$$

$$(X - X')\, h = R_2\, r \sin \varphi$$

Ces deux dernières équations donnent X et X' et font voir que

$$X > X'$$

Il vaut donc mieux dans le dispositif de la figure 150 réaliser le serrage en agissant sur le boulon placé entre l'arbre et la charge.

En isolant la poulie, on voit que son arbre est soumis, d'une part, au couple moteur, et d'autre part au moment des forces R_1, R_2, et de la réaction $Z = R_1 - R_2$ qui agit sur les tourillons, ceux-ci étant supposés à égale distance du plan moyen de la poulie. On a, du reste, à cause de l'équation (2) :

$$Z = P + p$$

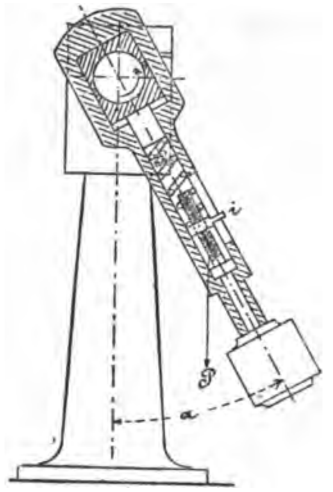
La puissance absorbée par Z est, dans le mouvement de rotation :

$$\frac{2\pi n\,(P + p) f \rho}{60 \times 75 \sqrt{1 + f^2}}$$

f est le coefficient de frottement des tourillons sur leurs coussinets, ρ leur rayon, n le nombre de tours par minute. Ce travail devrait être ajouté à celui de la formule ordinaire. Dans le cas où la poulie est montée en porte-à-faux (frein Weyher et Richemond) le travail du frottement est encore augmenté.

161. — *Freins équilibrés.* — L'incertitude qui règne sur la valeur de f doit faire recourir, pour les expériences de grande précision, aux freins équilibrés, dans lesquels la réaction verticale sur l'arbre est complètement annulée, et dont il est facile d'imaginer les dispositions (1).

162. — *Machine de Thurston pour l'essai des lubrifiants.* — Cette machine étant en réalité un frein dynamométrique, il y a lieu de l'examiner ici ; nous y avons fait allusion au n° 29 : on répand la matière à essayer sur un tourillon en porte-à-faux (fig. 151) : une tête de bielle à deux coussinets est engagée sur le tourillon et est lestée à son extrémité de manière à former un pendule de poids P. Les coussinets sont pressés



Fg. 151

1. Frein équilibré de M. Minary, 13e Congrès des Ingénieurs en chef, etc., tenu à Lyon.

contre le tourillon par un ressort R, logé dans le pendule, et dont la tension, que l'on peut régler, est connue par la position de l'index i.

Lorsque le tourillon tourne dans le sens de la flèche, le pendule dévie comme l'indique la figure ; son moment par rapport à l'axe du tourillon, proportionnel au sinus de l'angle α, permet de déterminer le moment résultant des frottements ; le pendule se meut du reste le long d'un secteur qui porte une graduation faite d'après le sinus de l'angle, le poids P étant connu, on obtient les résultats à simple lecture.

Ainsi que dans le frein de Prony, le moment agissant sur le pendule est produit par des forces tangentielles dont on ignore le mode de répartition, les forces normales sont également inconnues, cette machine ne peut donc servir, pas plus que le frein de Prony, à la détermination des coefficients de frottement.

163. — *Freins à serrage automatique.* — Les variations du frottement obligent, dans le frein de Prony, à régler à la main le serrage des mâchoires ; on a imaginé des dispositions dans lesquelles cette opération est produite automatiquement, il en est ainsi notamment dans les freins Appold, Marcel Deprez, etc.

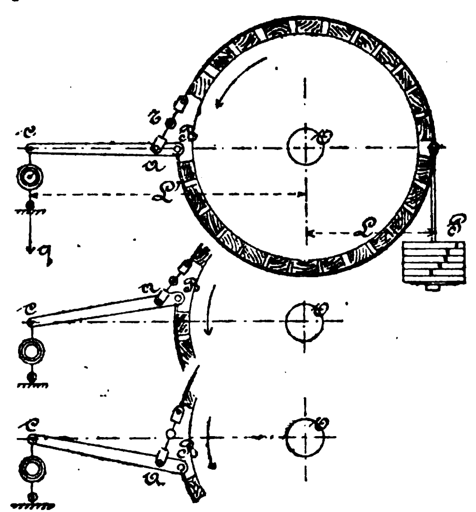


Fig. 152-153-154

Le frein Appold (fig. 152) comporte une bande flexible garnie de taquets et serrée au moyen d'un tendeur T ; la bande est rattachée, par

ses deux extrémités A, B, à un levier dont l'extrémité C fonctionne à peu près comme point fixe ; toutefois, la réaction exercée en ce point sur le levier est mesurée par un dynamomètre. La charge qui équilibre la plus grande partie de la résistance agit en P à la circonférence de la bande.

Lorsque le coefficient de frottement venant à diminuer, le poids P tend à descendre, la position du levier devient celle de la figure 153 et la bande se resserre ; au contraire si le frein vient à être entrainé, le frein se desserre ainsi que le montre la figure 154. C'est donc l'élément AB, qui, par son obliquité plus ou moins grande, fait varier la tension de la bande.

En appliquant à cet appareil le même raisonnement qu'au frein de Prony, et en supposant d'abord que le centre de gravité de l'appareil complet, avant l'addition du poids P, soit sur la verticale passant par le centre de l'arbre, on a pour le travail en chevaux :

$$N = \frac{2\pi n\,(PL - qL')}{60 \times 75}$$

q est l'action exercée au point C, c'est ici une traction de haut en bas.

Si le poids du frein n'était pas équilibré avant l'addition du poids P, il faudrait introduire son moment à côté de celui des autres forces, soit p ce poids, l la distance comprise entre le point O et la verticale passant par le centre de gravité, le moment à ajouter sera :

$$\pm pl,$$

le signe + ne doit être pris que si le centre de gravité est à droite du point O.

Le frein Appold admet un grand nombre de dispositions, celle de la figure 155 est équivalente à la précédente; toutefois, la réaction q prend une autre valeur que dans le premier cas ; cette disposition rend inutile la correction de poids (1).

Le frein Appold est très employé en Angleterre.

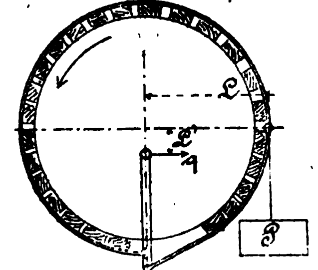


Fig. 155

1. Frein employé par M. Halpin, Engineering, 1882, 1er sem., p. 394.

164. — Dans le *frein de Marcel Deprez* (fig. 156), les bras portant les mâchoires sont articulés sur un plateau muni d'un contrepoids M destiné à équilibrer les masses excentriques ; les bras BB sont tenus rapprochés par un poids *p*, appliqué au levier C, en un point qui coïncide

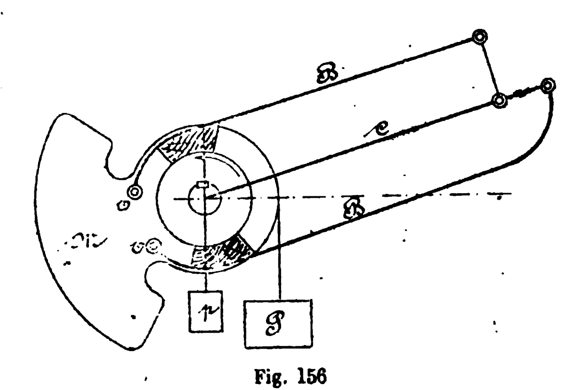


Fig. 156

sensiblement avec le centre de l'arbre ; la charge qui équilibre la résistance est P ; lorsque le frein tend à s'emporter, l'effet de *p* diminue de plus en plus, il cesserait même tout à fait si le levièr C devenait vertical. L'effort *p*, passant par le centre, ne doit pas intervenir dans la charge du frein.

165. — Le frein imaginé par M. Brauer, professeur à Darmstadt, comporte une lame flexible pour les volants à jante plate, et une série de fils métalliques de 7 à 8 millimètres de diamètre, pour les volants à gorge ; il se rapproche, par le principe, du frein Appold, mais son mécanisme de réglage est un peu différent ; le frottement a lieu de métal à métal, et le graissage se fait à l'huile ; M. Brauer considère l'emploi de ce frein comme possible lorsque le volant présente avec l'air une surface de contact d'au moins 10 décimètres carrés par cheval. M. Walther-Meunier s'en est servi pour l'essai d'une machine de 250 chevaux [1].

166. — *Appareils funiculaires.* — On emploie, pour l'essai de petits moteurs, une simple poulie à gorge, sur laquelle passe une corde en chanvre, la corde enveloppe la poulie sur les 3/4 de la circonférence ;

1. *Compte-rendu* des séances du 11e Congrès des Ingénieurs en chef, tenu à Paris en 1886. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*, 1884 p. 485.

soient P et t les tensions des deux brins (fig. 157), le travail en chevaux est :

$$N = \frac{2\pi n \, R}{60 \times 75} (P - t)$$

R étant le rayon mesuré à l'axe de la corde et n le nombre de tours par minute.

La tension t peut être évaluée au moyen d'un dynamomètre, mais on constate généralement qu'elle est négligeable ; en se reportant au tableau du n° 95, on trouve en effet pour le cas considéré, avec une gorge de 60°, un arc embrassé égal à $0{,}75 \times 2\pi$ et $f = 0{,}28$:

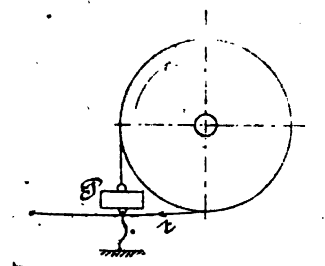


Fig. 157

$$\frac{P}{t} = 14 \text{ environ}$$

en négligeant t, on commet donc une erreur de $\frac{1}{14}$, soit un peu plus de 7 % ; pour opérer exactement, il faudrait du reste tenir compte du poids non équilibré de la corde sur la poulie ; ce frein est d'un emploi commode pour l'essai des moteurs à gaz ; il est bon de se garantir contre les projections possibles du poids qui présentent beaucoup de danger.

167. — *Frein à bande, d'Imray ou de Carpentier, perfectionné par Raffard.* — Nous nous bornerons à donner le principe de cet ingénieux appareil tel qu'on le trouve appliqué dans le frein dynamométrique de M. N.-J. Raffard [1] ; celui-ci (fig. 158) se compose d'une poulie A, calée sur l'arbre qui communique le travail, et de deux poulies folles BB, placées de part et d'autre de la précédente ; un étrier embrassant les trois poulies supporte une traverse t, qui s'oriente comme on veut autour de l'arbre, et sur laquelle agissent, vers le haut, des sangles en chanvre S S, tendues au moyen d'un poids P, et vers le bas, la sangle S_1, tendue par le poids p.

Si nous supposons la poulie A entraînée par l'arbre, et la sangle S_1

1. *Revue technique de l'Exposition Universelle de* 1889. — *Congrès de mécanique appliquée*, p. 267.

fixe, l'effort circonférentiel résistant sera $P-p$, il sert directement à la mesure du travail.

On a :

$$P - p = (e^{f\alpha} - 1) p$$

On voit que l'arc embrassé α, sur la poulie A, doit varier en sens inverse de f, c'est-à-dire que l'arc de contact nécessaire pour équilibrer un même effort $P-p$, dépend du coefficient de frottement ; si celui-ci

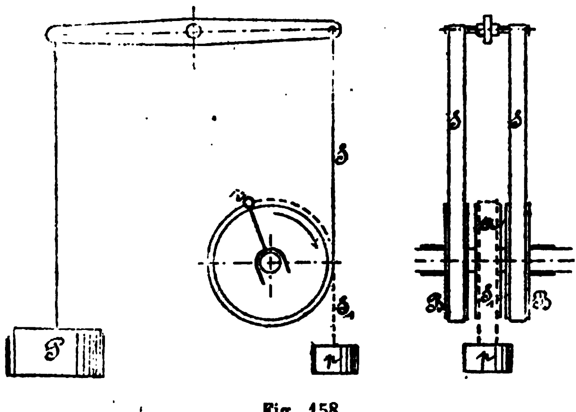


Fig. 158

vient à diminuer et prend la valeur f_1, la tension au point t prend la valeur :

$$X = pe^{f_1\alpha}$$

laquelle est plus petite que P, cette dernière force l'emporte donc, et l'arc embrassé augmente automatiquement, de manière à donner sur la jante de la poulie une résistance constante $P-p$, déterminée par les contrepoids p et P appliqués à l'appareil.

168. — *Frein enregistreur de Brotherhood.* — Le levier du frein, au lieu d'être équilibré par un poids que l'on fait varier d'après la résistance, agit sur un piston qui transmet sa pression à un liquide renfermé dans un petit récipient ; sur celui-ci est monté un indicateur analogue à ceux qui servent à l'essai des machines à vapeur, sauf que

le tambour y est remplacé par une bande de papier à mouvement continu ([1]).

169. — *Dynamomètre de Froude* ([2]). — Cet appareil consiste en une roue de turbine axiale, calée sur l'arbre, et enveloppée dans une coquille qui présente des aubes dirigées à contre-sens, de manière à créer une grande résistance au mouvement ; la coquille est concentrique à l'arbre, et laisse passer celui-ci par un bourrage, elle est maintenue immobile par un bras qui joue le même rôle que celui du frein de Prony et que l'on peut tarer au moyen de poids ; afin d'éviter les actions latérales, l'appareil est double, l'eau arrive par l'enveloppe extérieure, il est nécessaire de la renouveler d'une manière continue, de manière à limiter son accroissement de température.

La résistance est ici d'une régularité absolue ([3]), on peut l'augmenter ou la diminuer au moyen de vannes régulatrices qui agissent sur la section des canaux fixes et mobiles en présence.

L'appareil employé à l'Exposition d'électricité de Londres en 1882 avait $0^m,700$ de diamètre environ ; le travail qui peut être absorbé augmente, paraît-il, comme le cube de la vitesse, ce qui du reste importe peu, attendu que la puissance est mesurée comme dans le frein de Prony ; à 100 révolutions par minute la puissance qui peut être consommée est de 20 chevaux ; à la vitesse double de 200 tours, l'appareil pourrait absorber une puissance de 160 chevaux.

170. — *Remarque sur l'emploi des freins.* — Il résulte de ce qui précède que les essais au frein constituent un procédé de mesure par substitution, puisque, suivant l'expression de Hirn, on substitue le frein à l'usine et l'on cherche à mettre le moteur aussi exactement que possible dans les conditions où il se trouve pendant le travail industriel.

L'opération est toujours assez difficile à conduire, car il faut régler le serrage, maintenir la vitesse constante, et combattre l'échauffement ; l'appareil est assez volumineux, même pour de faibles puissances ; néanmoins, le frein est d'un grand secours lorsqu'il s'agit de vérifier le rendement organique d'un moteur, il n'est pas toujours nécessaire de

1. Engineering, 1889, 1er sem., p. 664.
2. Engineering, 1877, 2e sem., pp. 67, 90, 95 et 349, même recueil 1882, 1er sem. p. 241.
3. M. Osborne Reynolds emploie un frein du même genre sur la machine d'expériences du collège Owens, à Manchester.

procéder à un essai de longue durée; il suffit, à la rigueur, d'avoir, s'il s'agit d'une machine à vapeur, quelques tarages bien précis du frein aux instants où l'on fait des relevés à l'indicateur ; en opérant dans des conditions différentes de charge, on obtient des données du plus haut intérêt sur le travail des résistances accessoires des moteurs. Mais dans l'état actuel de la question, l'essai au frein n'est pas possible pour les moteurs de très grande puissance ; pour ceux-ci, on doit se contenter, lorsqu'il s'agit de machines à pression, de mesurer le travail à l'indicateur, ou travail indiqué.

§ IV.

DYNAMOMÈTRES DE TRANSMISSION

171. — Ces appareils n'exigent pas l'arrêt de l'usine, ils sont intercalés dans la transmission qui relie le récepteur à l'opérateur, et permettent d'apprécier d'une manière continue, ou même de totaliser le travail transmis; placés immédiatement près du moteur, ils donnent à la fois la puissance effective développée et le travail absorbé par l'ensemble des appareils de fabrication; placés près d'un opérateur, ils fournissent des données sur le travail absorbé par cette machine seule. Ils n'ont été réalisés d'une manière pratique que pour les petites forces, cependant, Hirn a indiqué le principe d'appareils qui pourraient servir à la mesure de travaux quelconques.

PREMIER GROUPE

Dynamomètres basés sur la déformation d'une pièce.

172. — *Dynamomètre de rotation de Morin.* — L'appareil de cette espèce appartenant à la collection de machines de l'Ecole de Génie civil de Gand se compose de trois poulies P_1 P_2 P_3 (fig. 159), montées sur un

bout d'arbre spécial, AA ; P_1 reçoit la courroie motrice, P_3 donne le mouvement à la courroie qui mène l'opérateur, la poulie P_2 est folle et reçoit la courroie motrice lorsqu'on ne veut rien transmettre.

La poulie P_1 est calée sur l'arbre, lequel entraîne la poulie P_3 par l'intermédiaire d'un manchon M, muni de deux ressorts L, L, qui viennent

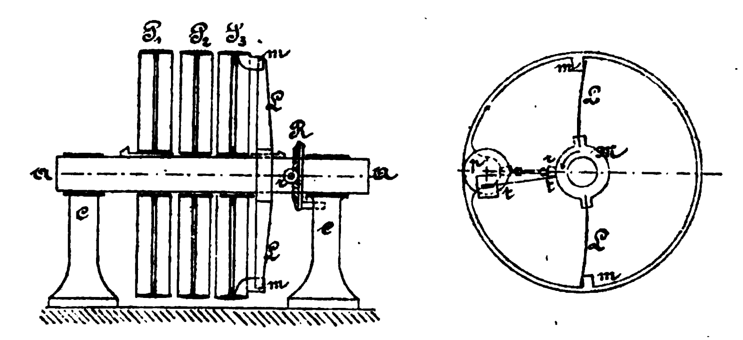


Fig. 159

appuyer contre des mentonnets venus de fonte à la jante de la poulie P_3; cette dernière est donc entraînée à partir du moment où la tension des ressorts équilibre la résistance, et il en résulte que la flèche des ressorts ou le déplacement angulaire relatif des poulies P_1 et P_3 mesure l'effort circonférentiel transmis ; le travail étant proportionnel au produit de cet effort par le déplacement absolu de la poulie P_3, il faut employer une disposition qui donne ce produit intégré pour toute la durée de l'expérience ; on y arrive par le procédé suivant : sur l'un des bras de P_3 est monté un plateau p qui reçoit son mouvement d'un petit arbre dirigé suivant le rayon et qui porte vers le centre une roue d'angle r, tournant autour de la roue R, concentrique à l'arbre, mais fixée au support de l'arbre ; le plateau p tourne ainsi autour de son centre et sa vitesse est proportionnelle à celle de la poulie.

Le manchon M porte un bras tt muni d'une roulette reposant sur le plateau; lorsque la flèche des ressorts est nulle et qu'il n'y a pas d'effort, la roulette est au centre du plateau ; lorsque la résistance existe, elle s'écarte du centre de ce plateau et roule sur une circonférence dont le rayon est proportionnel à l'effort.

Pour obtenir le travail transmis pendant un certain temps, il suffit, au moyen d'un compteur, de relever le nombre de tours de la roulette ; si l'on a déterminé, par une expérience préalable, les constantes relatives

à l'effort, ainsi que les rayons, ou les nombres de dents figurant comme facteurs de la vitesse, on possède les éléments nécessaires à la détermi nation du travail.

173. — *Pandynamomètres* (1). — Hirn a mesuré des travaux considérables en enregistrant la déformation d'une pièce par laquelle passe tout l'effort transmis ; dans la limite des tensions de travail admises pour les pièces de machines, l'élasticité des matériaux est plus parfaite que celle des ressorts employés pour mesurer les forces ; ces pièces constituent de véritables dynamomètres dont le seul défaut est de donner des déformations très faibles, il faut donc d'abord les amplifier au moyen de leviers très légers dont l'inertie ne puisse altérer les résultats ; les déformations sont inscrites en même temps que les déplacements de la pièce, on obtient ainsi des diagrammes qui peuvent donner lieu aux mêmes calculs que les courbes d'indicateur.

Hirn indique surtout deux genres de pièces qui peuvent être utilisées pour le but que nous avons en vue, les pièces fléchies telles qu'un balancier de machine à vapeur, et les pièces tordues, telles qu'un arbre ou une ligne d'arbrés. Il est évident qu'il faut toujours, au moyen d'une expérience directe, déterminer le rapport existant entre les efforts et les déformations, c'est ce qui constitue la véritable difficulté d'établissement de ces appareils. Pour une machine à vapeur, on peut, aux points morts et le moteur arrêté, déterminer les efforts exercés sur le piston en évaluant la pression à l'aide d'un manomètre à air libre bien gradué, Hirn a établi sur une machine du Logelbach un pandynamomètre de flexion qui a servi à relever un très grand nombre de diagrammes, ceux-ci ont toujours donné l'accord le plus parfait avec les courbes d'indicateur, ou, tout au moins, les différences observées représentent bien les valeurs probables du frottement du piston et des autres organes situés entre cette pièce et le point où la flèche a été mesurée. Hirn jugeait possible l'emploi d'un pandynamomètre de torsion pour mesurer les travaux les plus considérables transmis à l'hélice d'un navire.

1. *Les Pandynamomètres*, par G. A. Hirn. — Gauthier-Villars, 1876. — *C. Résio*. Application du téléphone à la mesure de la torsion de l'arbre moteur de machines en mouvement. *Revue universelle des Mines*, 2e série, T. VII, p. 632.

DEUXIÈME GROUPE

Dynamomètres à engrenages.

174. — *Le dynamomètre de Rieter* [1] (fig. 160) comprend trois arbres A_1, A_2, A_3; les arbres A_1 et A_3 sont montés sur un bâti rigide, l'un porte la poulie réceptrice P, l'autre la poulie P' qui commande l'usine

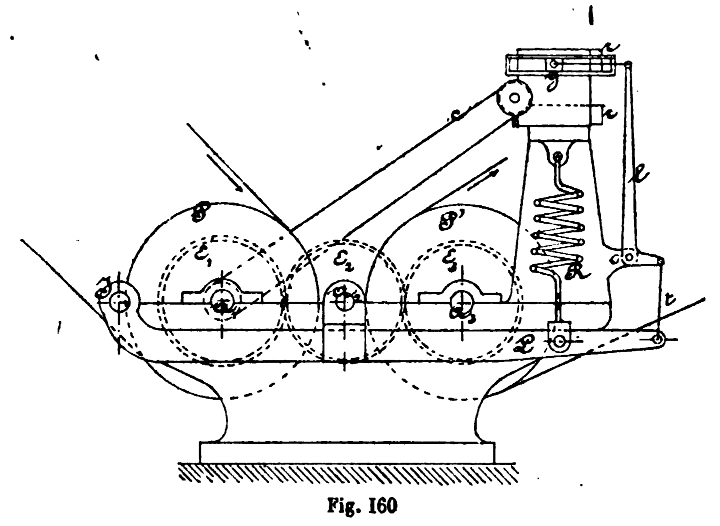


Fig. 160

ou l'opérateur; sur les arbres A_1 et A_3 sont calés deux engrenages E_1 E_3 reliés par une roue intermédiaire E_2, portée par l'arbre A_2, dont les paliers reposent sur un châssis formé de deux longerons L, articulés en I sur le bâti fixe et soutenus à l'autre extrémité par un ressort R. Le longeron fait mouvoir par son extrémité, au moyen de la tringle *t*, un levier coudé *l*, qui pivote autour du point fixe *o*; ce levier commande, par l'extrémité de sa longue branche, un coulisseau guidé en ligne droite *g*, qui inscrit les déformations du ressort R, en les amplifiant; l'appareil enregistreur se compose d'une bande de papier passant sur les deux tambours *r r* à axe horizontal, ceux-ci reçoivent de l'arbre A_1, au moyen

1. Constructeur à Töss, près de Winterthur. — Engineering, 1884, 1er sem., p. 500.

d'une petite transmission mue par la corde *c*, un mouvement de rotation proportionnel à celui de l'arbre moteur, il en résulte que la courbe tracée sur le papier continu présente les éléments du diagramme du travail ; les frottements propres de l'appareil, dépendant du travail transmis, ne peuvent être évalués avec une entière certitude, c'est du reste là un défaut commun à tous les instruments de l'espèce.

Le dynamomètre en question peut mesurer jusqu'à 12 chevaux, pour une vitesse de 200 révolutions des arbres.

175. — *Dynamomètre de Sellers.* — MM. Sellers ont employé dans leurs expériences sur les vis tangentes (n° 75) une forme du dynamomètre à engrenages qui présente l'avantage d'éliminer le frottement des arbres sur leurs tourillons ; A est l'arbre auquel on doit communiquer un travail à mesurer (fig. 161), E est une roue calée sur cet

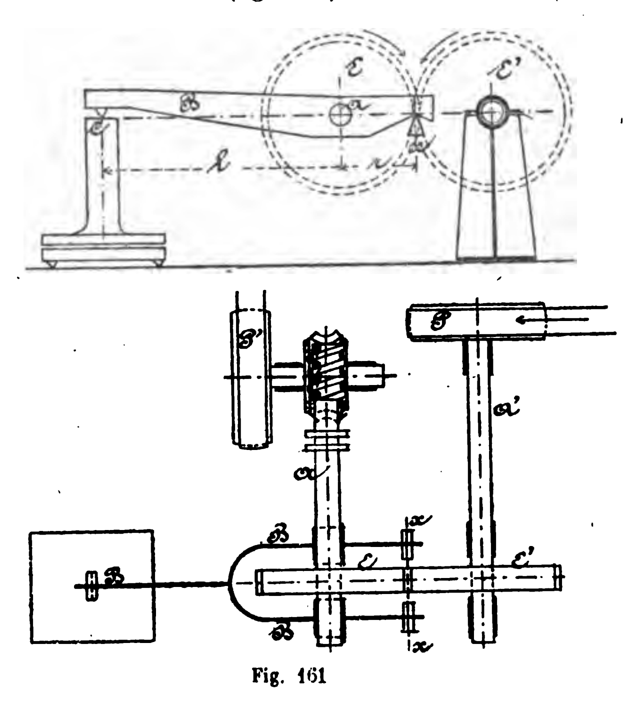


Fig. 161

arbre, E' est la roue qui lui communique la force motrice reçue par l'intermédiaire de la poulie P. La roue E est montée entre les branches d'un étrier BB, qui supporte l'arbre A en prenant appui, d'une part, sur

une ligne de couteaux xx, passant par la génératrice de contact des cylindres primitifs des roues, d'autre part sur le plateau d'une balance, au moyen d'un couteau C dont l'arête se trouve, avec l'axe de l'arbre et la ligne xx, dans un même plan horizontal.

La transmission s'opère toujours par deux dents qui sont en contact très près de la ligne des centres ; soit R la pression normale transmise à la dent de la roue E, p la réaction de la balance, ρ le rayon des tourillons de l'arbre, φ l'angle du frottement.

On a, pour l'équilibre de l'étrier BB autour de la ligne xx :

$$p\,(l+r) = \mathrm{R}\ (r - \rho \sin \varphi)$$

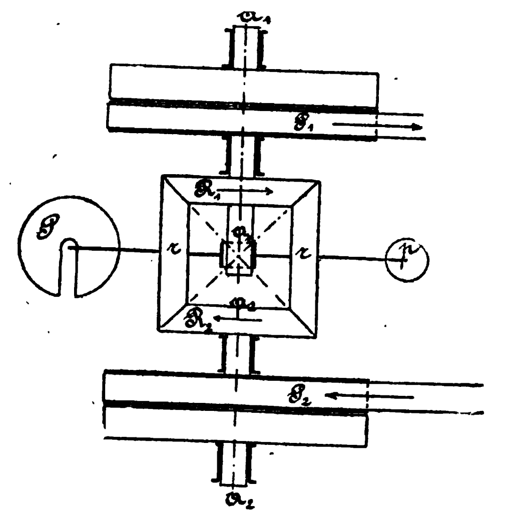
d'autre part, la puissance en chevaux transmise à l'arbre A, pour n tours par minute, a pour expression, si l'on en déduit le travail absorbé par le frottement des tourillons :

$$\mathrm{N} = \frac{2\pi n}{60 \times 75}\,\mathrm{R}\,(r - \rho \sin \varphi)$$

d'où

$$\mathrm{N} = \frac{2\pi n}{60 \times 75}\,p\,(l+r)$$

On voit que l'on obtient directement le travail net transmis ; on pourrait évidemment tenir compte, dans les équations ci-dessus, du poids propre de la roue E et de l'étrier B, qui sont connus avec certitude.



176. — ***Dynamomètre de White.*** — L'arbre A_1 (fig. 162) reçoit le travail moteur de la poulie P_1, il le transmet, par l'intermédiaire des roues coniques R_1, r, r, R_2, à l'arbre A_2, sur lequel est calée la poulie P_2 actionnant les résistances.

Les poulies *rr* constituent avec leur arbre *aa*, sur lequel elles tournent folles, un système libre autour de l'axe A_1 A_2, et qui peut être équilibré par le poids P lorsque la transmission s'opère ; le poids *p* sert à équilibrer le plateau. La connaissance de P et du bras du levier *l* permet d'évaluer le travail transmis (1).

On trouve des dynamomètres du même genre, dans lesquels l'une des roues *r* est supprimée.

TROISIÈME GROUPE

Dynamomètres à courroies.

177. — Ce groupe comprend les dynamomètres à courroie, basés sur la mesure des tensions du brin conducteur et du brin conduit d'une courroie de transmission.

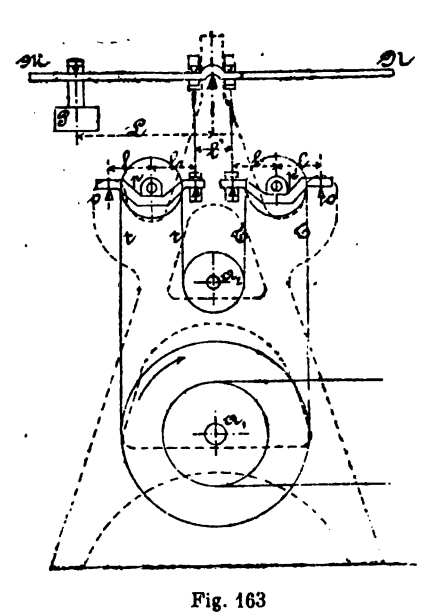


Fig. 163

Les appareils Denis-Farcot (2) et celui de l'Institut Franklin (3) sont conçus d'après le même principe ; la figure 163 représente le schéma de ce dernier appareil.

L'arbre A_1 reçoit la force motrice et la communique à l'arbre A_2, qui actionne la résistance ; la transmission s'opère par une courroie dont les brins font retour sur les deux poulies p, p'. Abstraction faite des résistances passives, si on désigne par t et T les tensions dans les brins de la courroie, on voit que la poulie p est sollicitée vers le bas par une force $2t$, la poulie p' est sollicitée de même par une force 2T ; les axes de ces poulies posent au

1. *Balance Dynamometer constructed by the Lawrence Machine Shop, Massachusetts*, Engineering, 1886, 2e sem., p. 605.
2. Buchetti. — *Guide pour l'essai des machines.*
3. Engineering, 1884, 1er sem., p. 560.

milieu de leviers à bras égaux, appuyés sur couteaux à l'une de leurs extrémités, il en résulte que les tringles de suspension exercent sur le fléau MN, de part et d'autre du pivot, les tractions t et T. Le fléau est équilibré quant à son poids ; soit P le poids qui, agissant à la distance L du couteau, équilibre T et t, l' la distance des tringles, on a :

$$(T - t)\frac{l'}{2} = PL$$

d'où :

$$T - t = 2P\frac{L}{l'}$$

Pour la puissance transmise à l'arbre A_1, on aura, si R est le rayon de la poulie augmenté de la demi-épaisseur de la courroie, et si n est le nombre de tours par minute :

$$N = \frac{2\pi nR(T - t)}{60 \times 75} = \frac{4\pi RP}{4500\, l'}\, Ln$$

Ayant déterminé une fois pour toutes la valeur du coefficient constant, il suffit, pour obtenir le travail, de le multiplier par la longueur L et par le nombre de tours.

178. — *Dynamomètre de la maison Siemens.* — Il se compose de

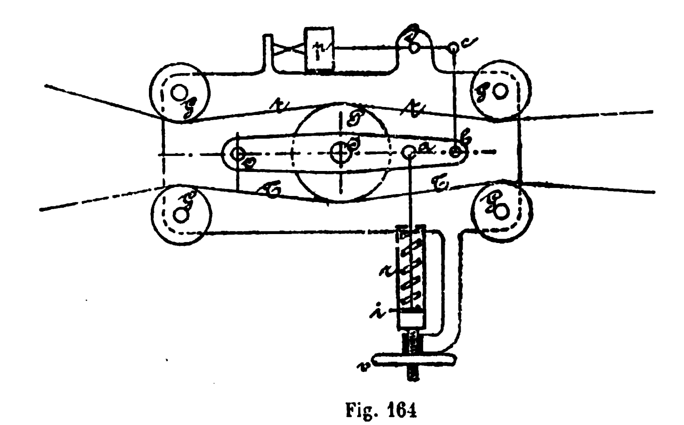


Fig. 164

quatre galets G (fig. 164), montés sur un châssis évidé non représenté sur la figure; autour de l'axe O pivote un bras qui porte la poulie P; ce

bras est équilibré au moyen du contrepoids *p* monté sur un levier oscillant autour du point fixe *d*; la tringle *bc* établit la liaison entre les deux systèmes; un repère, monté à l'extrémité du levier *l*, permet de voir si le bras *ob* est bien dirigé suivant la ligne médiane du système.

Les brins de la courroie sont représentés en T et *t*; les rayons des galets sont déterminés de telle manière que, dans la position normale, la courroie doive s'infléchir sur la poulie P. Pour maintenir la position, normale, il faut, au moyen d'un ressort *r*, que l'on comprime plus ou moins à l'aide du volant *v*, équilibrer le bras; la compression du ressort est proportionnelle à T — *t*.

Tout l'appareil, monté sur un support en bois, est placé dans une position telle que ce support soit peu sollicité, il peut être appliqué à une courroie existante, et a été employé pour mesurer la puissance transmise à de petites machines dynamo-électriques, il ne se prête pas à des mesures d'une grande précision.

179. — *Dynamomètre de M. Donat-Bânki* (1). — Cet appareil est construit par Ganz et Cie, à Buda-Pest; les galets sur lesquels passent les brins de tension T et *t* sont montés sur les deux branches d'une pièce en croix, qui appuie à l'une de ses extrémités sur un couteau contrebalancé par un levier. Ce levier agit lui-même sur un indicateur Richards au moyen d'une tringle très légère rattachée à une pièce qui remplace le piston, devenu inutile, de l'indicateur; le papier qui recueille l'inscription du diagramme reçoit, de l'un des arbres, un mouvement de translation continu. Ce dynamomètre convient, parait-il, pour des puissances variant de 1 à 100 chevaux, il est disposé sous une forme compacte et élégante.

1. *Praktische Maschinen Constructeur*, 1886, p. 349. — Engineering, 1886, 2e sem. p. 261.

TABLE DES MATIÈRES

THÉORIE DES MÉCANISMES

§ II.

Du frottement des liquides sur les solides.

§ III.

Résistance au roulement.

§ IV.

Raideur des cordes.

§ V.

Travail absorbé par les chocs.

CHAPITRE III.

Equilibre des mécanismes soumis à des résistances passives.

§ I.

Systèmes dans lesquels on n'a à considérer que le frottement.

§ II.

Systèmes dans lesquels se produit la résistance au roulement.

§ III.

Systèmes comportant des liens flexibles.

§ IV.

CHAPITRE III.

Régulateurs du mouvement.

§ I

Du volant.

Premier cas.

SYSTÈME DE PIÈCES TOURNANTES.

Deuxième cas.

SYSTÈME COMPRENANT DES MASSES ANIMÉES D'UN MOUVEMENT ALTERNATIF.

§ II.

Du régulateur.

A. Régulateurs à contrepoids.

I. Régulateurs du premier genre.

II. Régulateurs du second genre.

B. Régulateur à ressorts.

CHAPITRE IV.

Mesure expérimentale du travail des forces et de la puissance des machines

§ I.

Travail produit par une force isolée.

§ II.

Travail produit par la pression d'un fluide.

§ III.

Travail moteur disponible sur un arbre.

§ IV.

Dynamomètres de transmission.

Premier groupe.

Dynamomètres basés sur la déformation d'une pièce.

Deuxième groupe.

Dynamomètres à engrenages.

Troisième groupe.

Dynamomètres à courroie.

Paris. — Imp. E. Bernard & Cie, 71, rue La Condamine

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

Imprimerie E. Bernard et Cie, 71, rue La Condamine, Paris.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE SPÉCIALE DU GÉNIE CIVIL DE GAND

PAR

J. BOULVIN

INGÉNIEUR HONORAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME DE FRANCE

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS MARITIMES DE L'ÉTAT BELGE

2e FASCICULE

MOTEURS ANIMÉS

RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES, RÉCEPTEURS PNEUMATIQUES

avec 140 figures dans le texte



PARIS

E. BERNARD ET Cie, IMPRIMEURS-EDITEURS

LIBRAIRIE — 53 ter, Quai des Grands-Augustins

IMPRIMERIE — 71, Rue La Condamine, 71

1892

PREMIÈRE PARTIE

MACHINES SERVANT A RECUEILLIR L'ACTION DES MOTEURS ANIMÉS

1. — L'animal, envisagé comme moteur, n'échappe probablement pas aux lois de la Thermodynamique, mais l'étude de la transformation de la chaleur en travail, par les organismes vivants, est entourée de difficultés (1); le *mécanisme animal* au contraire, en tant qu'on se borne à considérer l'action des leviers formés par la charpente osseuse, et des ressorts qui constituent les muscles, a depuis longtemps fait l'objet de recherches intéressantes; cependant, M. Marey (2), dont les travaux ont le plus contribué à éclairer la question, pouvait encore écrire dans un ouvrage récent:

« La locomotion terrestre, celle de l'homme et des grands mammifères, par exemple, est très imparfaitement connue. Si l'on savait dans quelles conditions s'obtient le maximum de vitesse, de force ou de travail que peut fournir l'être vivant, cela mettrait fin à bien des discussions, et à bien des tâtonnements regrettables. Ainsi, on ne condamnerait pas toute

1. *G.-A. Hirn.* — Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur. — 3e édition, t. I, p. 27 à 53.
La Thermodynamique et le travail chez les êtres vivants, par G.-A. Hirn, *Revue scientifique*, 1887, 1er semestre, nos 22, 23 et 25.
Jamin et Bouty. — Cours de Physique, 4e édition, t. II, p. 118**.
Le Travail musculaire et l'énergie qu'il représente, par M. *Chauveau*, membre de l'Institut. — Paris, Asselin et Houzeau, 1891.
2. *E.-J. Marey.* — La machine animale. — 2e édition, Paris, Germer-Baillère, 1878.

une génération d'hommes à certains exercices militaires qui seront plus tard rejetés comme inutiles et ridicules. On ne verrait pas tel pays écraser ses soldats sous une énorme charge, lorsqu'il est admis dans tel autre, que le mieux est de ne rien leur donner à porter. On saurait exactement à quelle allure un animal fournit le meilleur service, soit qu'on lui demande la vitesse, soit qu'on lui fasse traîner des fardeaux. On connaîtrait enfin les conditions d'attelage qui sont les plus propres à la bonne utilisation des animaux ».

Ces lignes indiquent nettement le problème à résoudre dans l'emploi des moteurs animés, problème dont les données premières ne peuvent être trouvées que par l'expérience.

2. — On rencontre, du reste, deux cas bien distincts: ou bien, le moteur agit sur la résistance sans appareil intermédiaire, comme lorsque le cheval est attelé à un véhicule; ou bien, un appareil plus ou moins compliqué est interposé entre le moteur et la résistance (manivelle, cabestan, manège). Lorsqu'il s'agit de travaux appartenant à la première catégorie, et que la vitesse est imposée, comme autrefois pour les diligences par exemple, on n'est pas libre d'employer le moteur dans les conditions qui permettent d'accomplir le travail journalier le plus considérable, il faut alors multiplier les relais, et toute recherche sur le meilleur emploi de l'animal devient sans objet.

Au contraire, si la vitesse n'est pas déterminée, non plus que l'effort, et qu'on cherche à fixer ces éléments de manière à obtenir l'effet utile le plus grand, on peut suivre la marche indiquée par Coulomb [1] dans l'une de ses expériences; il s'agit, par exemple, de trouver la charge qui permet à l'homme de produire l'effet utile le plus élevé, son travail étant employé à élever un poids sur une rampe ou un escalier. Coulomb observe que l'homme pesant 70 kilogrammes, lorsqu'il n'élève que son poids, développe 205.000 kilogrammètres par jour; au moyen de deux observations donnant l'une la charge la plus grande que l'homme parvient à porter, mais sans pouvoir l'élever, l'autre le travail effectué par l'homme pour une charge moyenne et quelconque, il trouve que le travail journalier total T, que l'homme effectue lorsqu'il élève une charge p, est représenté par l'équation:

$$T = 205.000 - 1.410\,p. \tag{1}$$

1. Expériences sur la Force des Hommes, mémoire annexé à la Théorie des Machines simples. — Édition de 1821.

Si l'on appelle T_u le travail utile, c'est-à-dire celui qui correspond à l'élévation du poids p à une hauteur donnée h, on a:

$$(2) \qquad T_u = ph.$$

tandis que le travail T correspond à l'élévation du poids $70 + p$, attendu que l'homme pèse 70 kilogrammes; on a donc:

$$(3) \qquad T = (70 + p)\,h.$$

En faisant usage des équations (1) et (3), on trouve:

$$T_u = ph = 1.000\,\frac{205 - 1{,}41\,p}{70 + p}\,p$$

On peut chercher la valeur de p qui fournit le travail utile maximum, on obtient ainsi:

$$p = 53 \text{ k.}$$

et

$$T_u = 53.000 \text{ Kgm.}$$

Coulomb fait remarquer combien le travail utile obtenu est réduit, en comparaison de celui que l'homme développe en élevant simplement son poids et sans porter aucune charge; dans ce dernier cas, il est vrai, le travail n'est pas produit utilement, mais il peut être régénéré à la descente, en employant le poids mort de l'homme à soulever des fardeaux.

Callon [1] cite un appareil de ce genre dont Coignet s'est servi en 1835 dans les travaux de terrassement du fort de Vincennes, et qui se compose de deux plateaux suspendus aux brins d'un câble passant sur une poulie; le plateau inférieur portant une brouette chargée, et le plateau supérieur une brouette vide, le poids du manœuvre suffit pour vaincre la charge et les résistances passives; l'homme remonte à la surface au moyen d'une échelle; c'est dans cette opération, renouvelée à chaque voyage, qu'il développe le travail moteur. On a trouvé qu'un manœuvre pouvait ainsi faire 310 ascensions par jour, à 13 mètres de hauteur, et produisait environ 280.000 kilogrammètres. La charge des brouettes ordinaires employées pour le transport des déblais, étant précisément de 60 à 70 kilogrammes, correspond à peu près au poids moyen de l'homme.

1. *Cours de Machines*, t. 1, n° 45.

3. — D'une manière plus générale, lorsque le moteur n'agit pas directement sur la résistance, le récepteur peut toujours être disposé de manière à fournir la vitesse demandée par l'opérateur en permettant à l'animal d'agir dans les conditions où son travail est maximum; ainsi, dans un manège, les rayons des roues de transmission sont choisis de manière à ce que la vitesse demandée au dernier arbre soit réalisée lorsque les chevaux travaillent dans les conditions où ils fournissent l'effet journalier le plus grand possible; on imagine bien une autre solution, qui consisterait à employer des transmissions plus simples en forçant l'allure du cheval, mais le résultat serait obtenu au détriment de l'utilisation. C'est donc dans ce cas qu'il est nécessaire de posséder les valeurs les plus convenables de l'effort, et de la vitesse de son point d'application. Il faut déterminer, pour chaque vitesse, l'effort exercé régulièrement par le moteur, et le temps pendant lequel le travail peut être soutenu, en supposant qu'il doive être continué tous les jours; on obtient alors, dans un grand nombre de conditions, la valeur du travail journalier total:

$$p v t$$

et l'on doit adopter l'effort et l'allure qui correspondent au maximum de ce travail.

Les données d'expériences sont peu nombreuses, mais celles que l'on possède s'accordent assez bien; tout d'abord, il faut écarter l'opinion émise par Daniel Bernoulli, d'après laquelle, à degré égal de fatigue, on pourrait faire varier à volonté les trois facteurs du travail journalier pourvu que leur produit reste constant, et sous la condition qu'on n'excède pas les forces naturelles des moteurs; car on peut imaginer, pour p ou v, des valeurs telles que leur produit soit nul, il est fort difficile d'ailleurs d'apprécier les limites d'effort ou de vitesse à partir desquelles on excède les forces naturelles des animaux employés.

4. — *Maximum de puissance.* — Lorsqu'on n'a pas égard à la durée du travail journalier, il est facile de déterminer, au moyen de quelques observations, le mode d'emploi qui procure le maximum du produit pv, lequel n'est autre que la *puissance* du moteur.

Soit P_o l'effort produit lorsque la vitesse est nulle, V_o la vitesse qui peut être communiquée à un mobile sans résistance; entre ces limites, caractérisées par les points P_o, V_o, de la figure 1, l'effort est lié à la

vitesse par une certaine loi, traduite, d'après Euler (1), par la parabole dont l'équation serait

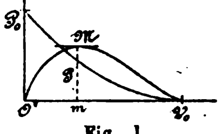


Fig. 1

$$p = P_0 \left(1 - \frac{v}{V_0}\right)^2$$

et qui est représentée par la courbe P_0 V_0.

Le travail par seconde pour différentes valeurs de v, et par conséquent de p, est donné par la courbe OMV_0; il atteint son maximum mM, lorsque

$$V = \frac{V_0}{3}$$

On a alors

$$P = \frac{4}{9} P_0$$

et

$$PV = \frac{4}{27} P_0 V_0$$

les notations P et V s'appliquent aux valeurs spéciales du maximum.

Pour le travail de l'homme sur un aviron, on a

$$P_0 = 22 \text{ k.}; \quad V_0 = 2^m,30$$

d'où l'on tire :

$$V = 0^m,77 ; \quad P = 9^k,77 ; \quad PV = 7,5 \text{ kgm.}$$

La puissance développée correspond à $\frac{1}{10}$ de cheval-vapeur; il s'agit ici de conditions moyennes, car il paraîtrait que dans les équipes entraînées, mais pour un temps assez court, un nageur peut fournir la puissance d'un demi-cheval.

Lorsque l'homme tire horizontalement, on a, d'après Schulze :

$$P_0 = 48 \text{ k.}; \quad V_0 = 1^m,60$$

qui, substituées dans les formules d'Euler donneraient

$$V = 0^m,53 ; \quad P = 21^k,3 ; \quad PV = 11,29 \text{ kgm.}$$

1. Cette loi a été obtenue par des considérations qui assimilent les moteurs animés aux machines hydrauliques, ce qui parait assez singulier. Toutefois Schulze, à la fin du siècle dernier, a vérifié l'équation pour l'homme et pour le cheval.

Hachette. — Traité élémentaire des Machines, 1819, p. 57.

Ce résultat semble conduire à une vitesse trop faible, Langsdorf indique (1) pour les conditions du meilleur emploi :

$$V = 0^m,757 ; \quad P = 13^k,3 ; \quad PV = 10 \text{ kgm.}$$

5. — *Maximum du travail journalier.* — Lorsqu'on fait travailler le moteur dans les conditions du maximum de puissance, on n'est pas certain qu'il produit par jour le maximum de travail : il faut faire entrer en ligne de compte le temps t pendant lequel l'action peut être prolongée, en supposant que l'animal doive accomplir tous les jours la même tâche.

On emploie en Allemagne, la formule de *Gerstner*

$$p = \left(2 - \frac{v}{V}\right)\left(2 - \frac{t}{T}\right) P \qquad (a)$$

dans laquelle p désigne l'effort qui peut être soutenu pendant un temps t à l'allure v; les quantités V, T et P, sont constantes pour un même moteur. Le travail journalier est alors

$$\left(2 - \frac{v}{V}\right)\left(2 - \frac{t}{T}\right) P\, vt$$

On reconnaît que cette fonction de deux variables atteint son maximum pour

$$v = V$$
$$t = T$$

auquel cas on a

$$p = P$$

On peut dire, par conséquent, que V, T et P sont les valeurs particulières de la vitesse, du temps et de l'effort pour lesquelles on obtient le travail le plus grand

$$PVT$$

L'expérience fournit, pour un petit nombre de cas, les valeurs de ces constantes.

On emploie aussi la formule de *Mascheck*, qui parait même s'accorder mieux avec les résultats trouvés dans l'emploi du cheval (2) :

$$p = \left(3 - \frac{v}{V} - \frac{t}{T}\right) P \qquad (b)$$

1. *Rühlmann.* — Allgemeine Maschinenlehre, t. 1, 268, note.
2. F.-W. Simms. — *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. II, p. 112.

Le maximum du travail correspond également aux valeurs V, T et P.

D'après *Weisbach* [1] P est égal au $\frac{1}{5}$ du poids de l'animal, et T a une valeur uniforme de huit heures; les données P et V sont contenues dans le tableau suivant:

NATURE du MOTEUR	POIDS DU MOTEUR en KILOGRAMMES	P^{k}	V^{m} PAR SECONDE
Homme	70	14	0.70
Cheval.	280	56	1.14
Bœuf..	280	56	0.71
Ane.	170	34	0.71
Mulet	235	47	1.00

Lorsque la résistance r doit être vaincue sur un plan d'inclinaison α, P se compose de cette résistance, et de la composante G sin α du poids de l'animal; on a donc dans les conditions du meilleur emploi:

$$r + G \sin \alpha = P$$

et, puisque $P = \frac{1}{5} G$

$$r = G \left(\frac{1}{5} - \sin \alpha\right)$$

r devient nul lorsque $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ ou $\alpha = 11^\circ \frac{1}{2}$

Ce qui veut dire que l'animal peut marcher pendant huit heures par jour, sans résistance, en gravissant une rampe de cette inclinaison, à la vitesse indiquée dans le tableau.

6. — Nous reproduisons, à titre de renseignement, quelques-unes des données généralement admises par les auteurs qui se sont occupés de la question des moteurs animés, en écartant les expériences dans lesquelles on a envisagé, non l'effort réellement exercé, mais les charges transportées sur camions, chariots, brouettes, etc., et qu'il ne faut pas confondre avec la résistance effectivement vaincue pour les faire rouler; nous y avons joint les chiffres récents trouvés par la Compagnie des

1. *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinen-Mechanik.*

Tableau relatif à l'emploi des moteurs animés

NATURE ET MODE D'ACTION DU MOTEUR	p EN KILOG.	v en mètres par seconde	t en secondes	TRAVAIL journalier pvt	Puissance en chevaux $\frac{pv}{75}$	ORIGINE DES DONNÉES
Homme élevant son poids	65	0.15	8 × 3.600	280.800	0.13	Coignet.
Homme tournant une manivelle de 0m36 de rayon	7.07	1.017	8 × 3.600	207.151	0.096	Rühlmann.
Homme agissant sur un balancier	5	1.10	8 × 3.600	158.400	0.073	Morin.
Homme actionnant le balancier d'une pompe à incendie	8.77	1.94	—	—	0.23	Rühlmann.
Homme élevant des fardeaux sur un escalier, son poids n'étant pas compté	53	—	—	56.000	—	Coulomb.
Homme agissant sur un manège ou au cabestan	12	0.60	8 × 3.600	207.360	0.096	Navier.
Homme tirant horizontalement	13.30	0.757	8 × 3.600	288.000	0.133	Euler et Schulze.
Homme tirant sur un aviron	9.77	0.77	—	—	0.10	
Homme élevant des poids au moyen d'une corde passant sur une poulie	18	0.20	6 × 3.600	77.760	0.048	Navier.
Homme agissant sur une roue à chevilles, au niveau de l'axe	60	0.15	8 × 3.600	259 200	0.12	Navier.
Homme agissant au bas de la roue	12	0.70	8 × 3.600	251.120	0.11	Smeaton et Navier.
Cheval, attelé à un manège au pas	45	0.90	8 × 3.600	1.166.400	0.54	Navier.
— — — au trot	30	2.00	4,5 × 3.600	972.400	0.80	Navier.
Forts chevaux, au pas	55	0.90	8 × 3.600	1.425.600	0.66	
Chevaux exceptionnels	60	1.25	8 × 3.600	2.160.000	1.00	
Chevaux de labour					1.06	A. Sanson.
Cheval au trot attelé à une voiture de tramway	27.3	3.00	1 1/2 à 3 × 3.600	—	1.10	Compagnie des Omnibus de Paris.
Cheval au trot attelé à un omnibus	38	2.50	1 1/2 à 3 × 3.600	—	1.27	
Bœuf au pas, au manège	60	0.60	8 × 3.600	1.036.800	0.48	
Mulet — —	30	0.90	8 × 3.600	777.600	0.36	
Ane — —	14	0.80	8 × 3.600	322.600	0.15	

Omnibus de Paris, et ceux de quelques expériences isolées. Ce tableau, auquel on peut joindre celui que nous avons reproduit plus haut d'après Weisbach, suffit à tous les besoins de la pratique.

7.— *Récepteurs.* — Les récepteurs employés sont d'un caractère très simple, qui nous dispense de toute description, ce sont la manivelle, le cabestan, les diverses variétés de roues à chevilles ou roues pénitentiaires, les manèges, les plans inclinés roulants ou manèges américains, etc.

Les manèges établis pour recueillir l'action du cheval sont encore employés fréquemment dans l'industrie agricole, où les opérations à effectuer sont temporaires, et où la force motrice est, pour ainsi dire, gratuite ; on distingue des manèges fixes, et des manèges locomobiles ; ceux-ci n'exigent ni maçonnerie, ni fondation spéciale.

Il convient d'observer, dans la construction des manèges, quelques principes que nous allons résumer brièvement.

Le cheval ne peut suivre une piste circulaire de faible rayon sans qu'il en résulte une décomposition de l'effort et une fatigue défavorables à l'effet recueilli ; la composante agissant sur le rayon, ou *flèche*, produit sur les appuis une pression nuisible, tant au point de vue de la résistance des pièces qu'à celui du travail absorbé par les frottements. Pour ces raisons, la longueur des flèches doit être de 3 mètres à $3^m,50$ au moins.

L'allure normale du cheval, correspondant à la vitesse de $0^m,90$ par seconde (voir le tableau) le premier arbre fait, par minute, un nombre de tours donné par

$$n = \frac{60 \times 0,90}{2 \pi r}$$

r étant le rayon de la piste.

En adoptant

$$r = 3^m,00$$

On a

$$n = 2,85$$

La plupart des opérations industrielles exigeant une vitesse bien supérieure, les manèges comportent toujours un nombre plus ou moins grand d'arbres de transmission ; si l'on suppose que chaque équipage multiplie la vitesse dans le rapport de 5 à 1, on doit employer, pour obtenir les vitesses de rotation exigées, un nombre d'arbres donné, (en

y comprenant le premier arbre qui porte les flèches), par le tableau suivant :

15 à 20 tours par minute	. . . .	2 arbres.
25 à 100 — —	. . . .	3 —
100 à 400 — —	. . . .	4 —

Lorsque l'on emploie plusieurs chevaux, il faut, pour neutraliser les réactions sur le premier arbre, disposer symétriquement les flèches autour du centre.

L'effort du cheval, au démarrage, peut atteindre le triple de sa valeur normale, c'est-à-dire 135 à 150 kilogrammes, mais il faut compter, dans le calcul des organes, sur un effort plus grand ; un fort cheval peut, lors d'un coup de collier, exercer une traction de 300 à 500 kilogrammes, les dentures des engrenages seraient donc exposées à se briser, si on se bornait à les calculer pour la valeur moyenne de l'effort.

L'extrémité de la flèche doit se trouver à $0^m,80$ au-dessus du sol. Les

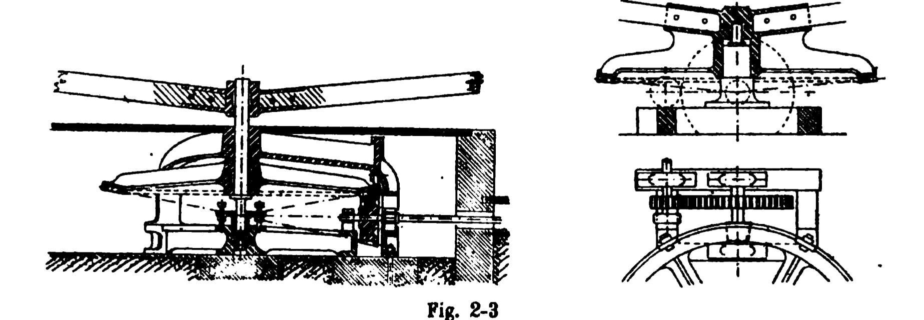


Fig. 2-3

figures 2 et 3 représentent sommairement le manège fixe à deux et à trois *tournants* (¹).

8. — Le moteur animé, et surtout le cheval, n'a pu être jusqu'ici remplacé avantageusement par les machines dans la traction sur les routes ordinaires ; on ne peut cependant poser à ce sujet de principe général, puisque le prix du combustible, des salaires et de la nourriture, de même que l'état des routes, varient suivant les lieux et les circonstances.

1. *Armengaud*. Publication industrielle, 1re série, t. XIV, p. 449-478.
Uhland. Handbuch für den Praktischen Maschinen Constructeur, t. I, p. 123 et Supplément, p. 130.

Ainsi, pour un service continu, et en tenant compte de tous les éléments de la question, on a trouvé, en Angleterre, que le prix du transport, par locomotives routières, n'était que la moitié de celui par chevaux [1]. La substitution de la locomotive aux mulets, dans certaines mines d'anthracite de la Pensylvanie, a réduit les frais de traction dans le rapport de 3 à 1. D'autre part, M. Sanson [2] établissait, en 1886, le prix de revient comparatif du labourage à la vapeur et par chevaux, et concluait à un léger avantage en faveur de ce dernier.

1. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, vol. XXXVI, p. 76.
2. Revue scientifique 1886, 1er semestre, n° 25.

DEUXIÈME PARTIE

RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES[1]

Ces machines sont employées pour recueillir le travail des chutes d'eau, naturelles ou artificielles ; nous n'examinerons pas ici les récepteurs secondaires intimement liés à un opérateur; tels sont ceux que l'on trouve dans les grues hydrauliques, les cabestans, les ascenseurs, le mécanisme des ponts mobiles, et, en un mot, l'ensemble des appareils qui dépendent d'une usine centrale d'eau sous pression, ce genre d'installations est étudié dans le 8e fascicule.

9. — Les éléments de la puissance d'une chute d'eau sont :

1° Le débit, c'est-à-dire le volume Q (en mètres cubes) qui s'écoule par seconde ;

2° La hauteur de chute H, ou différence de niveau (en mètres), entre l'amont et l'aval.

Abstraction faite de tout mécanisme, il est évident qu'on peut toujours assimiler l'eau d'une chute à un poids qui descend, et sur lequel la pesanteur exerce par seconde le travail :

$$T_m = \Pi\, Q\, H$$

Π étant le poids du mètre cube d'eau.

Ce travail est la limite de celui qui peut être recueilli par seconde, et se nomme *puissance absolue de la chute.*

Les machines hydrauliques employées présentent une grande variété de dispositions, qui se retrouve dans les appareils d'élévation des eaux[2], mais on peut les rattacher à trois systèmes, qui correspondent aux for-

1. Dans tout ce qui suit, on suppose connues les théories de l'Hydraulique.
2. Septième fascicule.

mes que prend l'énergie emmagasinée dans le fluide, et qui se manifestent : par la position du niveau de l'eau, par la pression exercée, et par la vitesse acquise. On n'imagine pas, en effet, que l'eau, à température constante, puisse transporter ou céder du travail autrement que par ces trois modes, qui peuvent quelquefois se trouver réunis dans une même machine.

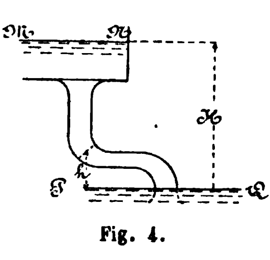


Fig. 4.

La figure 4 représente deux nappes MN, PQ, séparées par la différence de niveau H; si l'on désigne par p et v la pression et la vitesse dans une section quelconque, située à une hauteur h au-dessus du bief d'aval, on a :

$$H + \frac{p_a}{\Pi} = h + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}$$

p_a est la pression atmosphérique s'exercant sur la section d'amont MN, dont la vitesse est sensiblement nulle. En multipliant les deux membres par le débit, il vient :

$$\Pi Q H = \Pi Q h + Q(p - p_a) + \Pi Q \frac{v^2}{2g}$$

Le *travail absolu* de la chute est donc égal à la somme de trois termes, comprenant respectivement : la *hauteur* h, la *pression* $p - p_a$, et la hauteur due à la *vitesse* v.

Suivant les dispositions employées, on peut rendre nul l'un quelconque des trois termes, et même n'en conserver qu'un seul, on obtient ainsi, suivant que l'on conserve la hauteur, la pression, ou la vitesse, les moteurs dans lesquels l'eau agit par son poids, représentés principalement par les roues hydrauliques, ceux dans lesquels elle agit par pression, ou machines à colonne d'eau, et, enfin, ceux où elle agit par sa vitesse, parmi lesquels les plus importants sont les turbines [1].

Nous étudierons successivement ces trois genres de moteurs, mais, afin de tenir compte de certaines analogies de dispositions, les machines à colonne d'eau seront examinées en dernier lieu; en outre, nous rattacherons au chapitre premier quelques variétés de roues hydrauliques

1. Il existe cependant, comme nous le verrons, des turbines à pression, ou turbines à réaction, mais la pression y est employée à accélérer le mouvement de l'eau dans la machine même, dont la force motrice est, en fin de compte, la réaction produite par le changement de vitesse du fluide, en grandeur et en direction.

dans lesquelles l'eau n'agit nullement par son poids, mais par l'énergie résultant de sa force vive acquise ; bien que, en principe, ces machines se rapprochent davantage de celles qui font l'objet du chapitre deuxième, elles présentent avec les roues hydrauliques à action de poids un grand nombre de caractères extérieurs communs, qui justifient le plan adopté dans tous les traités de Mécanique appliquée.

CHAPITRE I.

Machines dans lesquelles l'eau agit par son poids.

10. — Nous citerons d'abord, pour mémoire, le *balancier hydraulique*, comprenant deux cuves suspendues aux deux bras d'un balancier oscillant, et dont l'une se remplit au niveau du bief supérieur, pendant que l'autre se vide par le jeu d'une soupape de fond que vient soulever un butoir fixe.

Cette machine, dont on ne peut guère citer d'application, est remplacée depuis longtemps par des récepteurs beaucoup mieux disposés au point de vue de l'utilisation du travail recueilli.

A la classe des moteurs qui nous occupent, appartient aussi le plan incliné *hydro-moteur*, qui se compose de deux voies parcourues en sens contraire par deux rames de wagons, dont l'une descend, et fait équilibre partiellement à celle qui monte ; les deux trains sont attelés aux deux extrémités d'un câble qui passe sur une poulie fixe établie au sommet ; chacun des trains comprend une caisse à eau que l'on vide au bas du plan incliné, et que l'on remplit au sommet; la force motrice est donc fournie directement, sans aucune transmission intermédiaire. Des freins sont établis pour modérer la vitesse du système, ils agissent sur l'arbre d'un pignon qui engrène avec une crémaillère placée au milieu de la voie.

On peut citer, comme installation de ce genre, le plan incliné d'Ouchy Lausanne, et celui d'Heidelberg; mais il s'agit évidemment ici d'applications tout à fait spéciales, dictées par la nature même de l'opération à effectuer.

Il existe un grand nombre de récepteurs dans lesquels l'eau agit par son poids, et qui sont d'un emploi général dans des circonstances données de chute et de débit, ils comprennent les meilleures variétés de roues hydrauliques à arbre horizontal [1].

Dans toutes les machines de cette classe, l'eau agit à la façon d'un

1. On a proposé dans certains cas l'emploi de roues à arbre incliné. Praktische M.C., 1881, p. 250.

corps solide, qui serait placé sur la machine à un niveau déterminé, et qui, en descendant, lui céderait le travail dû à son poids. Les propriétés fluides de l'eau ne sont utilisées que dans les périodes de remplissage et de vidange. Les parties mobiles de la machine (godets, aubes, etc.), doivent s'étendre au moins sur toute la hauteur de chute, on peut donc poser en principe que les roues hydrauliques ne peuvent, à moins de recevoir des dimensions incompatibles avec une construction économique, s'adapter aux grandes chutes (1).

11.— *Création des chutes d'eau.* — Avant d'aborder l'examen des moteurs en particulier, il convient, pour préciser ce que nous entendrons plus loin par hauteur de chute, d'indiquer comment les usines sont disposées le long des cours d'eau. On peut rencontrer deux cas principaux :

1° Lorsque la chute existe sous forme de dénivellation brusque du lit et de la surface du cours d'eau, ce que l'on rencontre fréquemment en pays de montagnes, le moteur peut être établi sans modification sensible du régime des niveaux d'amont et d'aval ; il en est encore de même lorsque la chute résulte de la mise en communication de deux nappes, ou de cours d'eau se trouvant à des niveaux différents, ou même de deux points écartés, choisis sur un filet d'eau à très forte pente.

Les fortes chutes appartiennent toujours à cette catégorie ;

2° La chute est créée dans une rivière à pente modérée.

On établit alors un barrage *dd* (fig. 5), qui produit un relèvement de l'amont, sans changer notablement le niveau à l'aval ; la hauteur de chute est déterminée par la crête du barrage. On préfère, lorsque la chose est possible, établir l'usine en terrain vierge, sur un canal de dérivation AB, et il est très avantageux d'utiliser un coude tel que ACB, afin de réduire les travaux de terrassement. Si cette coupure présente une certaine longueur, la chute disponible peut différer notablement de la dénivellation au barrage, ainsi que nous allons le voir.

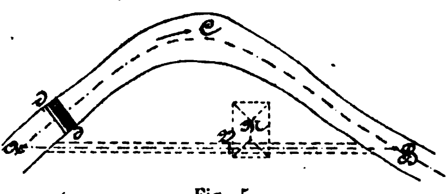


Fig. 5

1. La roue à augets de plus de 20 mètres de diamètre, établie près de Greenock, doit être considérée comme une exception, car il est très rare que ces roues atteignent un diamètre de 10 à 12 mètres.

Représentons en développement (fig. 6), les sections ACB et AB,

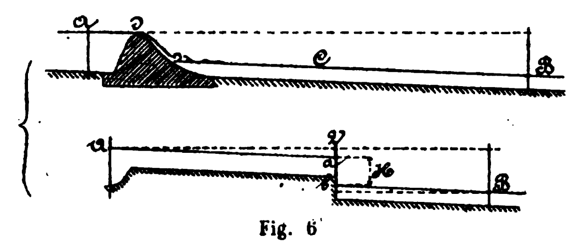


Fig. 6

faites suivant les axes hydrauliques du cours d'eau et de la dérivation ; la différence de niveau entre les points A et B se compose de la chute au barrage, augmentée de la différence de niveau nécessaire pour écouler le débit de la rivière depuis le barrage jusqu'au point B. Lorsque la vanne V, qui sert à régler l'alimentation du moteur établi en M, est fermée, l'eau de la dérivation est immobile, et les surfaces libres, à l'amont et à l'aval du vannage sont horizontales ; la chute est donc égale à la dénivellation mesurée entre les points A et B.

Lorsque le moteur fonctionne, et que la vanne est ouverte, la surface libre, tant dans le bief d'amenée que dans le canal de fuite, s'établit suivant la pente nécessaire A*a*, *b*B, pour écouler le volume d'eau qui passe sur le moteur ; la chute disponible H, est la différence entre les niveaux, pris immédiatement à l'amont du vannage, et à l'aval du moteur.

La pente nécessaire à l'écoulement est toujours extrêmement faible, lorsque l'on a soin d'adopter des sections suffisantes pour le débit (on étudie, dans les cours d'Hydraulique, tout ce qui se rapporte à l'établissement des barrages et des canaux).

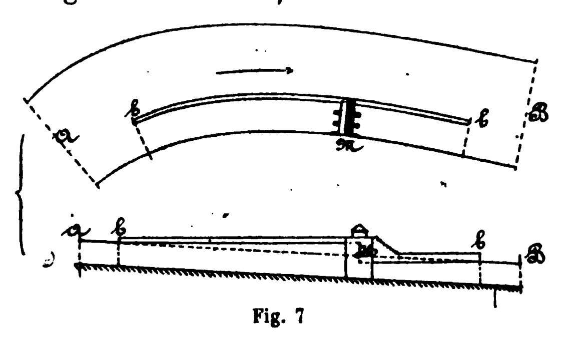


Fig. 7

Lorsque les rivières sont à forte pente de surface, la dérivation fournit le moyen de créer la dénivellation sans l'établissement d'aucun bar-

rage, pourvu que la pente des biefs de la dérivation soit plus faible que celle de la rivière ; cette condition peut toujours être remplie, si l'on donne au canal de dérivation une section suffisante relativement au volume qu'il doit écouler.

Il n'est même pas toujours nécessaire de creuser une dérivation, celle-ci est réalisée parfois dans le lit même de la rivière, au moyen d'un épi longitudinal *bb*, représenté en plan et en élévation dans la figure 7 (1). L'usine est établie en M, et la chute disponible est, à peu de chose près, la différence des niveaux dans la rivière dans les sections *b*, *b*.

§ I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ROUES HYDRAULIQUES A ACTION DE POIDS

12. — Soit H (fig. 8), la hauteur disponible comprise entre le niveau d'amont et le niveau d'aval, lorsque le moteur fonctionne. Les actions de choc étant réduites autant que possible, on peut, sans difficulté,

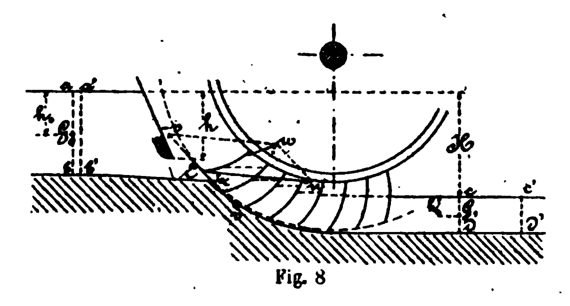


Fig. 8

étudier au moyen du principe des forces vives le mouvement de la masse liquide comprise entre les sections *ab* et *cd*; la première est choisie à l'amont, en un point où le liquide n'est pas encore influencé par le mouvement de la machine, l'autre est prise immédiatement à l'aval de la roue.

1. L'usine hydraulique de la ville de Zurich est établie de cette manière, dans le lit de la Limmatt.

Soient :

Π, le poids du mètre cube d'eau.

Q, le volume débité par seconde.

s_o, s_1, les sections, *ab* et *cd*.

p_o, la pression moyenne dans la section *ab*.

h_o, la hauteur du centre de gravité G_o de cette section sous le niveau d'amont.

u_o, la vitesse de l'eau dans la section *ab*.

p_1, h_1, u_1, les quantités analogues pour la section *cd*.

v, la vitesse de la roue à la circonférence extérieure.

Les aubes sont peu profondes dans le sens du rayon, et v diffère peu de la vitesse au centre des aubes.

Dans la figure 8, l'eau est reçue sur la roue au moyen d'un vannage, mais la théorie que nous allons établir convient quel que soit le mode de remplissage ; nous aurons seulement à préciser, dans l'équation générale, la valeur de certains termes qui dépendent du mode de construction et d'établissement du vannage.

Lorsque le régime est établi, le mouvement du liquide compris entre les sections *ab*, *cd*, peut être considéré comme permanent, car le temps qui s'écoule entre les passages de deux aubes au même point est si court, qu'il ne permet aucune modification sensible dans les circonstances du mouvement. Appelons F, F'... les réactions des aubes sur le liquide qui les pousse, projetées sur la direction de la vitesse v des aubes, soit M la somme des travaux résistants passifs absorbés par seconde, par le frottement de l'eau sur le fond du coursier et les chocs éventuels qui peuvent se produire à l'entrée de l'eau sur la roue.

Nous obtiendrons l'équation des forces vives appliquée au mouvement de la masse liquide *abcd*, en exprimant que la moitié de la force vive acquise par cette masse, pendant le temps élémentaire dt, ou pendant son passage dans la position *a'b' c'd'*, est égale à la somme des travaux moteurs (de la pression d'amont et du poids) diminuée de la somme des travaux résistants (de la pression d'aval et des réactions F, F'...) ainsi que des travaux résistants passifs.

Le premier membre de l'équation est donc, après simplification :

$$\frac{1}{2}\frac{\Pi\, Q\, dt}{g}(u_1^2 - u_0^2)$$

Le second membre se compose :

1° des travaux moteurs :

$$\Pi\, h_0\, s_0\, u_0\, dt + \Pi\, Q\, dt\, (H + h_1 - h_0)$$

2° des travaux résistants, qui sont, en leur attribuant le signe qui convient :

$$-\Pi\, h_1\, s_1\, u_1\, dt - \Sigma\, F\, v\, dt$$

3° des travaux passifs, qui introduisent dans l'équation le terme :

$$-\mathrm{M}\, dt$$

Après simplification, en remarquant que

$$s_0\, u_0 = s_1\, u_1 = Q$$

et que $\Sigma F v$ n'est autre chose que l'expression du travail moteur T_m communiqué à la roue par unité de temps, il vient :

$$T_m = \Pi\, Q \left(H + \frac{u_0^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} - \frac{M}{\Pi\, Q}\right)$$

La section *ab* a été choisie en un point où la vitesse est très faible, on peut donc négliger $\frac{u_0^2}{2g}$; on remarque ainsi que le travail moteur recueilli par seconde correspond à celui que développerait le poids ΠQ, en descendant d'une hauteur exprimée par la quantité comprise entre parenthèses dans l'équation :

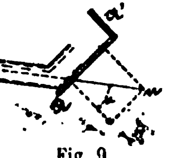
$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad T_m = \Pi\, Q \left(H - \frac{u_1^2}{2g} - \frac{M}{\Pi\, Q}\right)$$

Le travail moteur T_m est toujours inférieur à la puissance absolue de la chute, il peut cependant s'en rapprocher beaucoup, lorsque l'on diminue la vitesse v_1 conservée à la sortie, ainsi que les pertes de charge qui seront examinées en détail. M désigne un travail perdu par seconde, $\frac{M}{\Pi Q}$ exprime par conséquent la *perte de hauteur* correspondante et peut comprendre des pertes de charge proprement dites, ou des hauteurs dues à des *vitesses perdues* par suite de remous, etc.

13. — *Examen de la perte au remplissage.* — Lorsqu'un filet liquide atteint une aube animée d'une vitesse différente de la sienne, il se produit généralement une perte de charge qui peut être évaluée séparément ; différents cas sont à considérer :

1° *Choc d'une veine liquide contre un plan immobile.* — S'il s'agit du choc normal, toute la force vive peut être considérée comme perdue en agitations moléculaires (c'est ce qui se produit au pied des chutes

d'eau), mais lorsque le choc est oblique, il n'en est pas nécessairement ainsi.


Fig. 9

Soit α (fig. 9) l'angle formé par la vitesse avec la normale au plan A. En appliquant au liquide le principe des quantités de mouvement projetées *parallèlement* à l'aube, on trouvera que la composante u sin α, de la vitesse, se conserve intégralement, puisque le choc ne développe, outre les actions mutuelles, qu'une réaction normale à l'axe de projection.

La hauteur due à la vitesse était $\frac{u^2}{2g}$ elle devient après le choc :

$$\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

La perte de charge résultant de la rencontre du plan est donc :

$$\frac{u^2}{2g}(1 - \sin^2 \alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

On peut encore dire que la perte de force vive correspond à la composante de la vitesse perdue, ce qui, pour le cas considéré, est d'accord avec le théorème de Carnot.

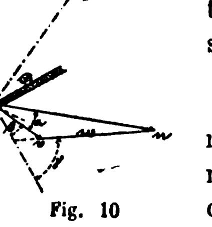
Il peut arriver que la composante conservée, u sin α, soit, à son tour, anéantie par un second choc, sur un plan A' normal au premier ; dans ce cas, la hauteur $\frac{u^2}{2g}$ sera consommée successivement par deux chocs qui absorberont respectivement :

$$\frac{u^2}{2g}\cos^2 \alpha$$

et

$$\frac{u^2}{2g}\sin^2 \alpha$$

2° *Choc d'une veine liquide contre une aube mobile.* — Supposons que l'aube A (fig. 10) soit entrainée et possède une vitesse v, faisant avec la normale à l'aube l'angle β; soit u la vitesse de la veine, faisant avec v l'angle α.


Fig. 10

La consommation de force vive résulte de la formation de remous, lesquels ne dépendent, évidemment, que du mouvement relatif des deux masses qui se rencontrent. La vitesse relative étant ici w,

fait avec la normale à l'aube l'angle γ; la composante parallèle au plan, soit :

$$w \sin \gamma$$

est conservée, tandis que la composante :

$$w \cos \gamma$$

est perdue. Or, on a :

$$w \cos \gamma = u \cos (\alpha + \beta) - v \cos \beta$$

Dans le cas où $\beta = o$,

$$w \cos \gamma = u \cos \alpha - v$$

La hauteur perdue est alors :

$$\frac{w^2 \cos^2 \gamma}{2g} = \frac{(u \cos \alpha - v)^2}{2g}$$

c'est-à-dire qu'elle est due à la composante anéantie de la vitesse relative de rencontre de l'eau avec l'aube. Lorsque cette composante est nulle ($u \cos \alpha = v$), il n'y a pas de choc, la vitesse w se confond alors avec $u \sin \alpha$, qui est la composante conservée, et, à moins que celle-ci ne soit détruite par un choc ultérieur, il n'y a aucune perte [1].

Il en est toujours ainsi, lorsque la vitesse relative d'entrée de l'eau est conservée, ce que l'on peut réaliser en donnant à l'aube la direction parallèle à w; mais la constitution des roues hydrauliques qui nous occupent ne permet pas, en général, d'utiliser, sans perte, la vitesse relative d'entrée : la partie de w non absorbée par le frottement se perd contre la fonçure de la roue, ou contre le fond des augets. La roue *Zuppinger* (26) fait exception; la vitesse w, au lieu d'être éteinte par le choc, relève l'eau à un niveau supérieur à celui du point d'entrée, et ne s'annule que sous l'influence du travail négatif développé par la pesanteur, travail qui est régénéré ensuite [2]; la perte au remplissage est alors théoriquement nulle, le rendement ne peut être affecté que par la vitesse u_1, conservée par l'eau dans la section d'aval, et par le frottement de l'eau sur le coursier. Dans le cas contraire, l'ensemble de la

1. En résumé, la perte de force vive est celle que l'on trouverait par l'application du théorème de Carnot, en supposant que le corps choqué (la roue) possède une masse infiniment grande relativement à celle du corps choquant; nous admettons, en effet, que la roue est maintenue à la vitesse courante, v, après comme avant le choc.

2. Cette disposition est réalisée dans les roues de *Marly*, qui comprennent de longues aubes planes sur lesquelles l'eau s'élève en vertu de sa vitesse relative d'entrée. *Publication industrielle* d'Armengaud, t. XIV, pl. 21.

perte au remplissage, de la hauteur due à la vitesse u_1 et de la hauteur absorbée par le frottement de l'eau sur le coursier, doit être réduit au minimum, et c'est ce qui détermine les conditions de marche.

§ II.

ROUE DE COTÉ ORDINAIRE [1]

14. — Les dispositions de cette roue rappellent celles de la figure 8. Soient E le point où le filet moyen atteint la circonférence extérieure, h la hauteur qui détermine la vitesse d'écoulement dans l'orifice du vannage (orifice noyé) ; d'après le tracé adopté pour le coursier et le canal de fuite, on voit que l'on aura, pour cette roue :

$$u_1 = v$$

Soient u la vitesse absolue à l'entrée sur la roue,
α l'angle qu'elle forme avec la circonférence extérieure,
w la vitesse relative de l'eau par rapport à la roue.

On a :

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad w^2 = v^2 + u^2 - 2\,uv \cos \alpha$$

Cette roue présente une fonçure destinée à empêcher l'eau de dépasser les aubes vers l'intérieur, on doit donc considérer la vitesse w comme entièrement perdue et faire entrer $\frac{w^2}{2g}$ dans le terme :

$$\frac{M}{\Pi Q}$$

Le frottement sur le coursier et les bajoyers dépend, comme on le sait, de la surface mouillée, de la forme de la section et d'une fonction de la vitesse à laquelle on donne différentes formes ; il se traduit par une hauteur que l'on peut calculer au moyen de la formule de Darcy et Bazin, donnant la perte de charge η par mètre de longueur du coursier :

1. Publication industrielle d'Armengaud, t. I, pl. 1.

$$\eta = \frac{1}{r}\left(m + \frac{n}{r}\right) v^2$$

r est le rayon moyen de la section, c'est-à-dire le quotient de la section par le périmètre mouillé, m et n ont des valeurs qui dépendent de la nature des parois, et qui sont choisies comme ci-dessous:

Ciment lisse, bois raboté.	$m = 0{,}000.15$	$n = 0{,}03$
Parois unies en maçonnerie ou en planches.	$m = 0{,}000.19$	$n = 0{,}07$
Parois brutes en moellons.	$m = 0{,}000.24$	$n = 0{,}25$
Parois en terre.	$m = 0{,}000.28$	$n = 1{,}25$

Soient a la largeur des aubes, e la quantité moyenne dont elles sont immergées, L la longueur développée du coursier; la perte de charge $L\eta$ devient:

$$L\eta = \frac{a+2e}{ae}\left(m + n\,\frac{a+2e}{ae}\right) L v^2$$

En substituant au terme $\frac{M}{\Pi Q}$, dans l'équation (1) les valeurs qui le composent, et en faisant usage de l'équation (2), il vient:

$$T_m = \Pi\, Q\left[H - \frac{u^2}{2g} + \frac{v}{g}\,(u \cos\alpha - v)\right] - \Pi\, Q\, L\eta$$

Pour augmenter autant que possible le travail recueilli, il faut choisir une valeur v qui rende maximum le terme:

$$\frac{v}{g}\,(u \cos\alpha - v)$$

c'est-à-dire qu'il faut adopter, en supposant que la grandeur de u soit donnée, ainsi que son inclinaison,

(3) . . . . $v = \frac{1}{2}\, u \cos\alpha$

D'ailleurs puisque

(4) . . . . $\frac{u^2}{2g} = h$

on a:

(5) . . . $T_m = \Pi Q\left[H - h\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha\right)\right] - \Pi\, Q\, L\eta$

Il ne faut pas perdre de vue que le dernier terme est lui-même fonc-

tion de la vitesse v, qu'il y a tout intérêt à réduire ; en effet, le volume débité par la roue, qui est une donnée de la question, est approximativement égal à :

$$aev$$

toute diminution de v agit en sens inverse sur le produit ae, de telle sorte que si v est remplacé par $\frac{v}{K}$, le produit ae sera remplacé par $K \times ae$, et en supposant que les aubes conservent des dimensions proportionnelles (ce qui a lieu, en effet), les quantités a et e devront être remplacées par $a\sqrt{K}$ et par $e\sqrt{K}$; on reconnait facilement que toute diminution de v agit dans le même sens sur la perte de charge représentée par le dernier terme de l'équation (5). Pour augmenter la valeur du premier terme, il convient de réduire h, on est ainsi conduit, pour recueillir le maximum du travail, à cette double condition :

1° La hauteur h qui détermine la vitesse absolue u doit être aussi réduite que possible ;

2° La vitesse v doit satisfaire à la condition (3).

On peut encore chercher l'influence de α sur le travail recueilli ; cet angle a été, dans tout ce qui précède, considéré comme une quantité donnée, mais on voit d'après l'équation (5), qu'il y a intérêt à le réduire.

On ne peut cependant adopter $\alpha = o$, car l'eau ne pénétrerait pas dans la roue ; α ne descend pas, pour cette raison, en dessous de 30° et s'élève jusqu'à 45°.

Le maximum théorique du rendement serait obtenu pour :

$$\alpha = 0$$

et l'on aurait :

$$T_m = \Pi Q \left(H - \frac{h}{2}\right) - \Pi Q L_1$$

En négligeant le dernier terme, qui est toujours très faible, on voit que le travail recueilli correspond à la chute :

$$H - \frac{h}{2}$$

Lorsque l'on adopte la valeur usuelle :

$$\alpha = 30°$$

on trouve pour la hauteur utilisée :

$$H - 0{,}625\,h$$

Ce résultat indique qu'il faut disposer le vannage de manière à réduire h; c'est ce qui est obtenu par une prise d'eau en *déversoir*.

15. — *Forme des aubes*. — Puisque la vitesse relative est perdue à l'entrée sur la roue, la théorie n'impose aucune obligation en ce qui concerne la forme ou l'inclinaison des aubes ; si on les trace de manière à ce qu'elles soient parallèles à la vitesse relative w, la force vive s'anéantit sur la fonçure; si, au contraire, les aubes sont plus ou moins inclinées sur la vitesse relative d'entrée, la force vive se perd en deux fois : une première partie est détruite au bord des aubes, la force vive due à l'autre composante de la vitesse se perd comme dans le premier cas ; théoriquement les deux états de choses sont équivalents, mais la direction de l'aube ne pourrait être telle que w vînt choquer sa face postérieure, car il en résulterait un effet nuisible.

Pratiquement, il vaut mieux diriger les aubes parallèlement à la vitesse w, au moins pour leur premier élément, car ainsi, l'eau pénètre nettement dans la roue, sans rejaillissement, c'est pourquoi on adopte fréquemment des aubes à contour brisé, lorsqu'elles sont en bois

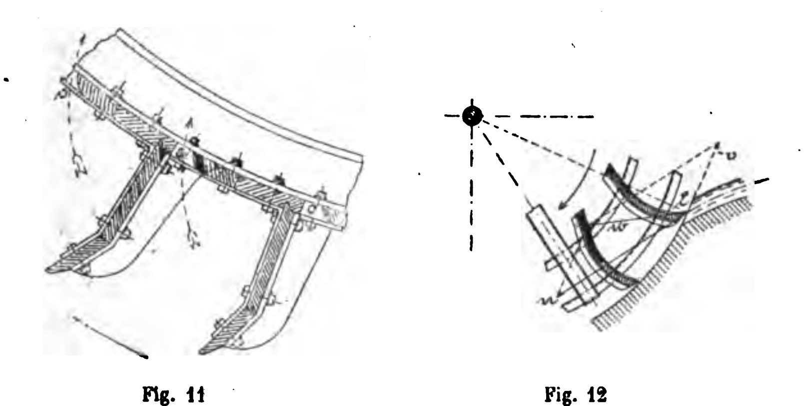


Fig. 11 Fig. 12

(fig. 11), ou même des aubes courbes (fig. 12); ces formes ont du reste encore l'avantage de ne pas relever l'eau à la sortie.

La fonçure peut être entièrement supprimée (fig. 12), mais le plus souvent, on la conserve en la disposant de manière à ce qu'elle laisse échapper l'air pendant le remplissage ; à cette fin, on ménage à la partie

supérieure de chaque compartiment une ouverture *o* (fig. 11), qui règne sur toute la largeur de la roue.

Les aubes sont quelquefois disposées comme dans la figure 13, c'est-à-dire qu'elles comprennent un premier élément *a*, dirigé suivant le rayon, et une contre-aube a_1 contre laquelle la force vive relative est plus ou moins utilisée par réaction comme dans les roues à aubes courbes. Une fonçure discontinue favorise le départ de l'air pendant le remplissage. Lorsque l'on emploie cette construction, et qu'on veut éviter le choc contre le bord extérieur des aubes, il faut évidemment que w soit dirigée suivant le rayon, on a alors :

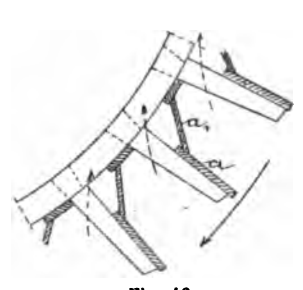


Fig. 13

$$v = u \cos \alpha$$

En substituant cette valeur à l'équation (3) et en négligeant le terme dû à la résistance du coursier, on trouverait au lieu de l'équation (5) :

$$T_m = \Pi Q (H - h)$$

Ce mode de fonctionnement serait donc moins avantageux que celui auquel conduit l'équation (3), puisqu'on perdrait entièrement la hauteur *h*, mais nous n'avons pas tenu compte de l'effet dû à la réaction sur la *contre-aube* ; pratiquement, la hauteur *h* n'est donc pas entièrement perdue.

16. — ***Conditions pratiques d'établissement du vannage en déversoir.*** — La formule qui donne le débit, en fonction de la largeur *a* du déversoir et de la profondeur *h'* du seuil en dessous du niveau d'amont prolongé (fig. 14) est, comme on le sait :

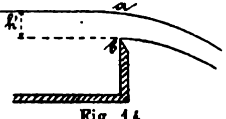


Fig. 14

$$Q = \frac{2}{3} \theta a h' \sqrt{2 g h'}$$

θ est un coefficient qui dépend en partie de la contraction plus ou moins grande de la veine, aussi bien dans le sens latéral que sur le seuil. Dans les roues hydrauliques, l'étranglement latéral est presque nul, la hauteur *h'* s'élève toujours au moins à $0^m,10$; on a alors, d'après les expériences de Castel :

$$\theta = 0{,}665$$

Le chiffre trouvé par Poncelet se rapproche beaucoup de celui-ci. Nous avons supposé que le seuil présente une arête tranchante qui permet à la pression atmosphérique de s'établir dans la section *ab* ; lorsque le seuil présente beaucoup de largeur dans le sens des filets, avec une courbure assez faible pour que la veine s'y attache (fig. 15), les conditions de l'écoulement sont modifiées ; l'expérience indique alors qu'il faut prendre [1] :

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58$$

D'où :

$$\frac{2}{3}\,\theta = 0{,}385$$

On a pour l'épaisseur de la veine :

$$h'' = \frac{2}{3}\,h'$$

La hauteur motrice n'est alors, dans la section *ab*, que la hauteur sur le point *a*; on peut vérifier qu'il en est bien ainsi, car en supposant que les filets traversent la section *ab* à peu près horizontalement, et, en remarquant que la hauteur sur le point *a* est :

$$h' - h'' = \frac{1}{3}\,h'$$

il vient, pour le débit :

$$Q = \frac{2}{3}\,h'a\sqrt{2g\,\frac{h'}{3}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,h'a\sqrt{2\,gh'}$$

ce que l'expérience fournit précisément dans ce cas, attendu que :

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1. *Haton de la Goupillière*. Cours de Machines, p. 67 à 69. Il existe d'autres formules, notamment celles de Weisbach, Boileau, etc., qui donnent des résultats peu concordants avec celle que nous employons. *Revue universelle des Mines*, 2e série, t. XI, p. 511.

Voir une étude récente sur ce sujet par M. Bazin (Annales des Ponts et Chaussées), ainsi que Experiments on « Measurement of Water on Weirs », par Donkin et Salter, *Minutes of Proceedings of the Institution of C. E.* vol. 83, année 1886.

Il y aurait quelque difficulté à suivre une marche tout à fait rigoureuse pour le tracé du déversoir, nous procéderons de la manière suivante :

Remarquons d'abord que la veine, au moment où elle traverse la section *ab*, (fig. 15) possède, dans tous ses filets, à peu près la même vitesse que si elle s'écoulait du vannage m_o n_o (fig. 16), supposons que le seuil de ce dernier soit prolongé par le coursier n_o n, et proposons nous de déterminer l'arc qui lui sert de directrice, de telle manière que la veine liquide reste en contact avec lui.

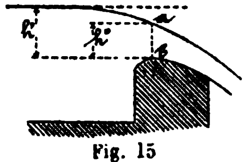


Fig. 15

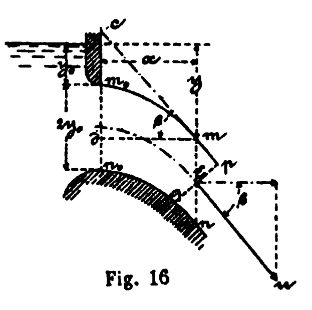


Fig. 16

On a, par l'équation de continuité, en appelant u la vitesse d'un filet dans la section mn, et β l'angle qu'elle forme avec l'horizontale :

$$mn \times u \cos \beta = \text{constante}$$

et, puisque :

$$u \cos \beta = \text{constante} = u_o$$

On a aussi

$$mn = \text{constante} = m_o n_o$$

Pour tracer le coursier, il suffira donc de prendre une courbe $n_o n$, équidistante de celle $m_o m$, que suit librement le filet superficiel.

Soient

y la hauteur d'eau sur le point m,
y_o la hauteur sur le point m_o,
x la quantité md.

La parabole décrite par le filet a pour équation :

$$x^2 = 4\, y_o\, (y - y_o)$$

Or, menons par m la tangente mc à l'arc mm_o en remarquant que l'angle cmd est égal à β, et que

$$cd = 2\, m_o d = 2\, (y - y_o)$$

on a :

$$tg\ \beta = \frac{2\,(y - y_o)}{x} = \sqrt{\frac{y - y_o}{y_o}}$$

ou réciproquement :

$$y = y_0 (1 + tg^2 \beta) = y_0 \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

en faisant usage de l'équation de la parabole, on trouve aussi :

$$x = y \sin 2 \beta$$

On peut, en se donnant à l'avance β, trouver la valeur de y, c'est-à-dire la quantité dont le point m est situé sous le niveau d'amont.

L'épaisseur *normale* de la veine au point E sera :

$$mn \cos \beta, \quad \text{ou} \quad 2 \, y_0 \cos \beta$$

L'angle β peut être choisi par les considérations suivantes :

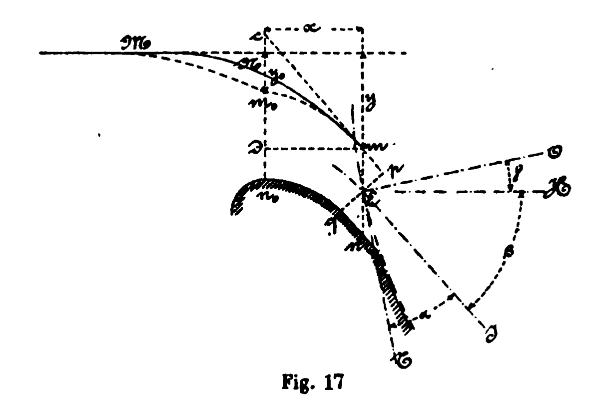


Fig. 17

Le filet moyen EI (fig. 17) doit faire avec la tangente ET un angle α donné; nous avons vu (14) qu'on prend

$$\alpha = 30 \text{ à } 45^0$$

Le centre de la roue O, doit être situé plus haut que le niveau d'amont, on peut se donner l'inclinaison γ du rayon OE sur l'horizontale ;

L'angle β sera donc :

$$\beta = 90^0 - (\alpha + \gamma)$$

Pour $\gamma = 15^\circ$, et $\alpha = 30^\circ$, on a $\beta = 45^\circ$.

Faisons en sorte que $u = 2$ mètres.

il faudra prendre

$$u_0 = u \cos \beta = 2 \cos 45^0 = 1^m,414$$

or,

$$\frac{u_0^2}{2g} = {}_0$$

d'où

$$y_0 = 0^m,102$$

cette quantité représente aussi la demi-épaisseur mE, de la veine, mesurée verticalement.

On a

$$y = \frac{y_0}{\cos^2 \beta} = 0^m,204$$

Le point E sera sous le niveau d'amont, à la distance

$$y + m\mathrm{E} = 0,306$$

L'épaisseur normale pq de la veine, au point d'entrée, est :

$$e = mn \cos \beta = 0^m,144$$

La distance horizontale x, qui sépare les sections $m_o n$ et $m n$ est, comme nous l'avons vu plus haut :

$$x = y \sin 2\beta = 0,204$$

En résumé, la marche à suivre sera la suivante : ayant calculé comme ci-dessus les divers éléments en se donnant les valeurs de α, γ, et u, on pourra fixer sur un tracé la position du point E relativement au niveau d'amont MN, tracer la ligne EI, formant avec l'horizontale l'angle β, porter sur la verticale

$$\mathrm{E}m = \mathrm{E}n = y_0$$

calculer x et tracer la section $m_o n_o$, enfin, tracer la parabole mm_o, ainsi que l'arc parallèle nn_o.

En réalité, la surface libre de l'eau, ne pouvant présenter la courbure discontinue $\mathrm{M}m_o m$, le vannage en déversoir ne peut être, en toute rigueur, substitué à celui de la figure 16, mais on possède, dans la

mobilité du vannage, un moyen de régler le débit de manière à admettre sur la roue le volume Q par seconde ; la vitesse u, et l'épaisseur de la veine au point E, ne pourront différer beaucoup des valeurs prévues.

17. — *Largeur de la roue.*

Soit a la largeur utile de la roue, égale à celle du déversoir, on a :

$$Q = u_0 \times 2\, y_0 \times a$$

d'où

$$a = \frac{Q}{2\, y_0\, u_0}$$

Si, en employant les valeurs fixées au numéro précédent, et qui sont :

$$u_0 = 1^m,414$$
$$y_0 = 0{,}102$$

on était conduit à une largeur de roue dépassant 5 mètres, ou si, d'une manière générale, on veut alléger la roue ou rendre sa construction plus économique, on accepte comme base du calcul du déversoir une vitesse u supérieure à 2 mètres, on augmente ainsi à la fois u_0 et y_0, et, par conséquent, la largeur de la roue diminue très rapidement (on reconnait que la largeur varie en raison inverse du cube de la vitesse admise).

18.— *Profondeur des aubes.*— Pour régler la profondeur b de l'aubage, il faut avoir égard au *coefficient de remplissage*, celui-ci ne peut être supérieur à $\frac{1}{3}$ lorsque la fonçure est continue, et qu'aucune disposition spéciale n'est prise pour le départ de l'air, tandis qu'on peut le prendre égal à $\frac{1}{2}$ lorsque le système de construction est celui des figures 11, 12 et 13.

Adoptons le coefficient $\frac{1}{2}$, le volume engendré par l'aube qui se déplace, pendant une seconde, est :

$$abv$$

et le volume d'eau admis pendant le même temps est :

$$aeu$$

on doit avoir :

$$abv = 2\, aeu$$

d'où

$$b = 2\frac{u}{v}e$$

D'ailleurs, on connaît, d'après le tracé d'aubes que l'on veut adopter, le rapport entre u et v (15). Si l'on a égard à la condition du maximum d'effet, on prend

$$v = \frac{1}{2}u\cos\alpha$$

d'où

$$b = \frac{4e}{\cos\alpha}.$$

qui, pour $\alpha = 30°$ donne $b = 4{,}6e$.

Si, au contraire, on adopte des aubes dirigées suivant les rayons,

$$v = u\cos\alpha$$

et

$$b = 2{,}3\,e$$

La distance des aubes ne peut être fixée convenablement par la théorie ; on peut dire seulement, pour que le remplissage ait lieu dans les conditions supposées, que cette distance ne peut être augmentée au delà de certaines limites, puisque sans cela l'eau serait reçue, à la fin du passage d'un compartiment devant le déversoir, sous une hauteur très supérieure à h.

D'autre part, dans les roues non ventilées, la distance de deux aubes doit être plus grande, afin d'augmenter la durée pendant laquelle l'air peut s'échapper par la circonférence extérieure

On obtient généralement de bonnes dimensions en prenant pour la distance d des aubes, une quantité comprise entre $0{,}8\,b$ et b

19. — *Epaisseur de la nappe d'eau à l'aval.* — Soit e_1 cette épaisseur, on a, par la condition de continuité :

$$e_1 v = eu$$

d'où

$$e_1 = \frac{u}{v}e$$

c'est-à-dire que e_1 est précisément égal à la moitié de la longueur des aubes projetée sur le rayon, lorsque l'on adopte un coefficient de remplissage égal à $\frac{1}{2}$, ce qui devait évidemment avoir lieu.

20. — ***Rayon de la roue.*** — Soit R ce rayon, on a (fig. 18) :

$$R = OP + H - AE + e_1$$

D'où

$$R(1 - \sin\gamma) = e_1 + H - AE$$

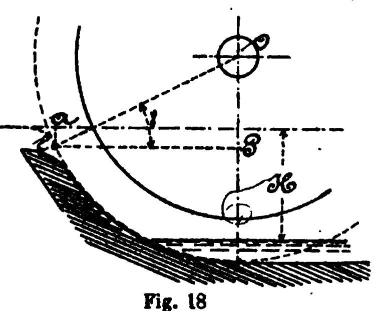


Fig. 18

on a vu que, pour obtenir $u = 2$ mètres, il faut (fig. 17) avec $\gamma = 15°$:

$$y + mE = 0{,}306$$
$$e = 0{,}144$$

c'est-à-dire que, pour $v = u \cos\alpha$, et $\alpha = 30°$.

$$e_1 = 0{,}166$$

d'où

$$R = 1{,}36\,(H - 0{,}14)$$

21. — ***Mode de construction des roues de côté.*** — Les roues étaient autrefois construites exclusivement en bois, le fer n'y entrait qu'a l'état de frettes ou de couvre-joints pour la consolidation des assemblages ([1]). Le fer et la fonte permettent d'obtenir des roues plus rigides, le bois n'est plus guère employé que pour la construction des aubes et du vannage.

Dans les bons spécimens ([2]), la roue est composée de deux ou plusieurs plans de bras, suivant sa largeur ; le nombre de bras à adopter dans chaque plan est donné par la formule empirique suivante :

$$n = 2\,(R + 1)$$

Ainsi, pour un rayon de 2 mètres, on adopterait 6 bras.
» 3 mètres, » 8 bras.
et ainsi de suite.

Les bras sont assemblés, au centre, sur des plateaux en fonte à nervures, ou tourteaux, calés sur l'arbre, et à l'extérieur, avec des couronnes de forme circulaire, qui servent d'appui aux coyaux supportant les aubes ; les couronnes sont réunies par la fonçure, lorsque celle-ci existe.

1. Portefeuille des Machines. — 1865, pl. XIX et XX.
2. Redtenbacher. — Theorie und Bau der Wasserrader, pl. IV, V, VI et XXIV. — On trouve de beaux exemples de roues de construction moderne, et notamment de la roue de côté à tête d'eau, de la roue Sagebien, et de la roue à augets en dessus. dans l'atlas du Traité théorique et pratique d'Hydrauliqu appliquée, par L. Vigreux. — Paris, E. Bernard et Cie.



Un cercle denté, servant à actionner la transmission, est boulonné latéralement contre l'une des faces; dans ce cas, toute la roue étant sollicitée par torsion, doit être consolidée au moyen de tirants en fer diagonaux s'étendant entre les couronnes ; lorsque les roues sont de grand diamètre relativement à leur largeur, ce qui arrive surtout pour les roues à augets (§ VI), les bras sont entretoisés au moyen de tirants croisés.

On a aussi réalisé des roues en fer, dites à suspension, dans lesquelles les pièces sont principalement sollicitées par traction, et peuvent être plus légères.

La figure 19 indique le mode de construction d'un coursier en bois ; comme toutes les parties en sont presque toujours noyées, le bois se trouve dans de bonnes conditions de conservation [1].

Un certain nombre de traverses *t*, noyées dans la maçonnerie de fondation, et se prolongeant jusque sous les bajoyers, servent d'appui aux longrines courbes *l*, sur lesquelles s'appliquent les madriers garnissant le coursier. Le vannage s'efface dans une poche ménagée à l'amont, il glisse entre les pièces fixes c, c_1, formant un cadre rigide entretoisé ; le bord supérieur de la vanne est garni d'un seuil courbe en tôle ou en fonte, dont le tracé a été indiqué au n° 16.

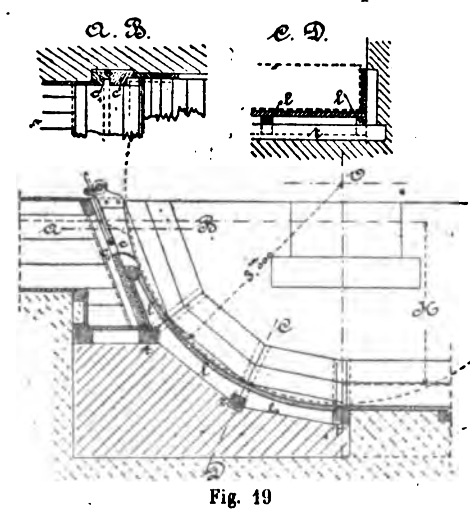


Fig. 19

La roue doit être montée avec un jeu aussi faible que possible (un centimètre tout au plus) et, afin d'éviter les fuites [2] on fait en sorte que la largeur *a* de la veine qui s'échappe au-dessus du déversoir, soit un peu inférieure à la distance comprise entre les bajoyers (section AB, figure 19).

A l'amont, le canal d'alimentation doit présenter assez de section pour que la perte de chute ne soit pas trop considérable, il n'y a pas de règle fixe

1. Voir sur la construction des coursiers en béton de ciment, au moyen de cintres et de formes en bois, le « Civil Ingenieur. » — 1885, p. 65.
2. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur, etc., et Redtenbacher, ont calculé la perte d'effet résultant des fuites.

à ce sujet, la vitesse doit être d'autant plus réduite que le bief est plus long.

Le canal de fuite se raccorde tangentiellement avec le coursier; on adopte pour ce canal un fond en pente, de manière à ralentir progressivement la vitesse de l'eau. Pour les conditions de fonctionnement habituelles, la vitesse v avec laquelle l'eau quitte la roue, est d'environ un mètre par seconde, et la profondeur e_1 à l'aplomb de l'axe est comprise entre 0,15 et 0,20 (20) on donne au canal de fuite une profondeur double ou triple.

La roue de côté est applicable à des chutes inférieures à $2^m,50$; au-delà elle devient lourde et coûteuse, et sa vitesse angulaire de rotation est très lente. On estime que les roues de côté, en fer et fonte, pèsent environ 500 kilogrammes par cheval de puissance.

22. — *Rendement.* — La formule (5) établie au n° 14, suffisante pour rechercher les meilleures conditions d'établissement, ne peut servir à calculer le rendement réel, même d'une manière approximative, puisqu'elle ne tient pas compte des fuites, non plus que de certaines pertes accessoires. Des expériences exécutées sur des roues bien établies, et confirmant les calculs de Redtenbacher, ont montré que le travail disponible sur l'arbre peut atteindre en moyenne 0,70 de la puissance absolue.

D'après cet auteur, la puissance absolue étant représentée par 1, les pertes calculées, pour une roue de côté de $3^m,60$ de largeur, fonctionnant sous une chute de $2^m,50$ seraient :

Perte au remplissage	0,111
Perte à la sortie	0,011
Perte due aux fuites	0,082
Perte due à la résistance de l'air	0,002
Perte due au frottement de l'eau	0,001
Perte due au frottement des tourillons [1]	0,007
Total des pertes	0,214

Effet utile : 1 — 0,214 = 0,786.

1. Avec $f = 0,08$.

§ III

ROUE AVEC VANNAGE A TÊTE D'EAU.

23. — Le vannage en déversoir n'est applicable que dans le cas où le niveau d'amont est rigoureusement constant, puisque le sommet de la vanne forme une partie essentielle du coursier, et que les conditions à l'entrée seraient notablement modifiées si la veine n'était pas distribuée à la roue à la hauteur pour laquelle le tracé a été fait.

La roue à tête d'eau convient pour les mêmes hauteurs de chute que la roue de côté proprement dite, mais elle permet une certaine variation du niveau d'amont. Elle est représentée (fig. 21) dans ses dispositions générales ; elle diffère surtout de la machine qui fait l'objet du paragraphe précédent par le tracé de la partie amont de son coursier [1].

Le vannage est établi assez bas pour qu'en temps de basses eaux la vitesse d'entrée u conserve une valeur suffisante. On choisit le point C (fig. 20) qui est celui où commence la partie circulaire du coursier, à une certaine hauteur, y, sous le niveau d'amont ($y=0^m,80$ environ); on mène le rayon CO de la roue, faisant avec l'horizontale CN, un angle de30 à 45°, ainsi que la ligne Ct, coupant la tangente au contour de la roue sous un angle α de 20 à 30°; cette ligne, qui doit représenter la direction de la vitesse d'entrée, fait avec l'horizontale l'angle β, déter-

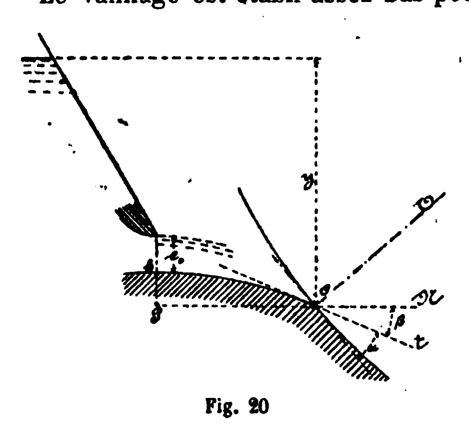


Fig. 20

1. Les roues à tête d'eau tracées par Redtenbacher, ouvrage déjà cité, pl. I et II, sont établies dans l'hypothèse où le niveau d'aval varie de $0^m,50$; le canal de fuite présente alors, à l'aplomb de l'axe de la roue, un approfondissement brusque; le bord des aubes est tangent au niveau d'aval lorsque celui-ci est le plus bas, et les aubes sont entièrement immergées en temps de hautes eaux.

miné ; on trace la parabole CS, tangente à Ct, et dont le sommet S est obtenu en prenant

$$CP = y \sin 2\beta$$

on a par conséquent

$$SP = \frac{1}{2} CP \, tg\, \beta = y \sin^2 \beta$$

Puis, on raccorde, avec le fond du bief d'amont, le contour ainsi trouvé.

On peut vérifier que la parabole SC est celle que suivrait librement le filet liquide s'échappant horizontalement du point S et dont la vitesse serait due à la hauteur au-dessus de ce point, ce qui arrive lorsque le vannage commence à s'ouvrir. En effet, la hauteur au-dessus du point S est :

$$y - SP = y - y \sin^2 \beta = y \cos^2 \beta$$

la parabole du filet aurait pour équation, en appelant V la vitesse due à la hauteur $y \cos^2 \beta$, x' et y' les coordonnées relativement à deux axes passant par le point S :

$$y' = \frac{1}{2} g \frac{x'^2}{V^2} = \frac{1}{2} g \frac{x'^2}{2g\, y \cos^2 \beta} = \frac{x'^2}{4y \cos^2 \beta}$$

Pour $x' = CP = y \sin 2\beta$, on a

$$y' = y \sin^2 \beta = SP$$

Comme la veine a toujours une certaine épaisseur, la hauteur motrice est en réalité inférieure à celle qui existe au point S, et l'on est assuré, quelle que soit l'ouverture du vannage, que la veine suivra l'arc SC. L'épaisseur normale de l'eau au point d'entrée sur la roue, étant désignée par e, la hauteur h qui produit la vitesse u est approximativement

$$h = y - \frac{e}{\cos \beta}$$

Pour

$$\beta = 30^\circ, \quad e = 0^m,12, \quad y = 0^m,80$$

on trouve

$$h = 0^m,661$$

et

$$u = \sqrt{2g\,h} = 3^m,60$$

Il est facile de calculer l'ouverture e_0, du vannage, nécessaire pour réaliser l'épaisseur e; on adopte, pour obtenir le maximum d'effet:

$$v = \frac{1}{2} u \cos \alpha$$

ou, pour $\alpha = 20°$.

$$v = 1^m,70$$

La hauteur perdue au remplissage, (voir numéro 14, éq. 5) est :

$$h\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2 \alpha\right) = 0,559\, h = 0^m,369$$

Lorsque le niveau d'amont s'abaisse, la vitesse u diminue, et, si l'on veut laisser à la roue la même vitesse v à la circonférence, ce qui est souvent exigé par les opérateurs, la vitesse relative d'entrée prend une inclinaison plus grande sur la tangente à la roue; il est bon d'avoir égard à cette considération dans le tracé des aubes, afin qu'elles ne soient pas frappées à revers.

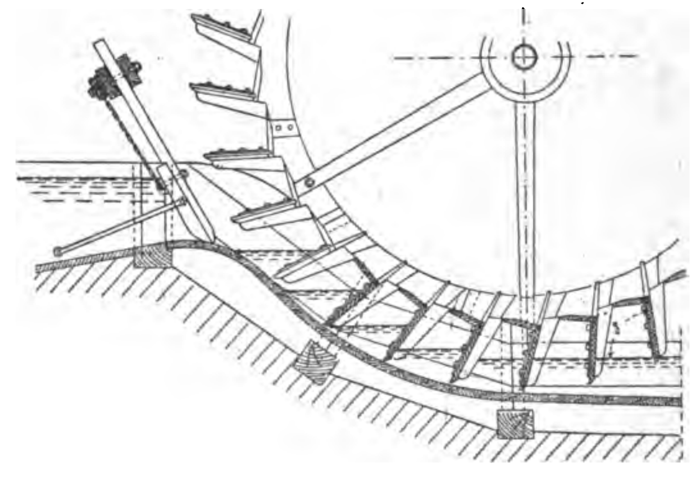


Fig. 21

Lorsque le niveau d'aval est constant, l'immersion e_1 des aubes, au point le plus bas, est donnée par la condition :

$$e_1 v = eu$$

ou

$$e_1 = e \frac{u}{v}$$

La valeur admise pour v donne :

$$e_1 = \frac{2\,e}{\cos\,\alpha}$$

Pour $e = 0{,}12$
on trouve

$$e_1 = 0^{m},255$$

Lorsque le niveau d'aval est variable, la hauteur à laquelle on place le coursier doit être déterminée de manière à ce que, pour les plus hautes eaux, il n'y ait pas de soulèvement à la sortie; on y parvient en maintenant l'angle δ assez ouvert (fig. 21).

§ IV

ROUE DE COTÉ AVEC VANNAGE A PERSIENNES.

24. — Lorsque la chute dépasse $2^{m},50$, il est impossible d'obtenir un bon tracé de roue avec vannage en déversoir, parce que la vitesse d'entrée coupe la circonférence extérieure sous un angle trop grand, à moins que l'on n'augmente le rayon de la roue, ce qui est désavantageux à d'autres points de vue. On peut, en employant des directrices, obliger la veine à suivre une direction déterminée à l'avance, et qui coupe la circonférence sous un angle convenable ; il n'est pas nécessaire alors d'augmenter le rayon, et l'on peut placer le centre de la roue sous le niveau d'amont (fig. 22). Le vannage comprend plusieurs orifices, ce qui permet, lorsque le niveau d'amont est variable, d'admettre toujours l'eau sous une charge constante ; on découvre à volonté l'un ou l'autre des orifices, cc_1, c_1c_2, c_2c_3.

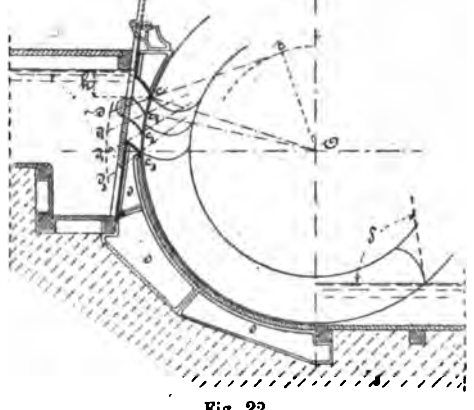


Fig. 22

Pour tracer le vannage (d'après Redtenbacher) on fait en sorte que c soit situé à $0^m,30$ sous le niveau d'amont; on porte $c_1c_2 = c_2c_3 = cc_1 = 0^m,10$; le jet fait avec la circonférence un angle de 36° environ, ce qu'on obtient en menant $Oct = 36°$, en abaissant de O la perpendiculaire Ot à ct, et en décrivant la circonférence de rayon Ot; on mène des tangentes à cette circonférence par les points $c_1c_2c_3$; les centres $dd_1d_2d_3$ des cloisons directrices sont choisis sur les prolongements de ces tangentes, à une distance du contour de la roue égale à $0^m,50$. Lorsque l'orifice supérieur est ouvert (en temps de hautes eaux), on a pour la vitesse de tous les filets de la section cc_1 [1]

$$u = \sqrt{2gh} = 2^m.40$$

Au fur et à mesure que le niveau d'amont descend, on découvre le second, puis le troisième orifice. L'angle d'entrée conserve toujours la même valeur, ainsi que la charge qui produit l'écoulement, le tracé des aubes convient donc quelle que soit la variation du niveau.

Les aubes peuvent recevoir à volonté, soit une forme brisée, soit une forme courbe [2]; l'angle δ est assez ouvert pour que les cloisons ne soulèvent pas l'eau à la sortie.

Lorsque la hauteur devient de plus en plus grande relativement au rayon, cette roue se rapproche de plus en plus de la roue à augets, avec laquelle elle présente une grande analogie théorique.

§ V

ROUE SAGEBIEN ET ROUE ZUPPINGER.

25. — La *roue Sagebien* [3] est l'une des modifications les plus inté-

1. Si le jet s'échappait à l'air libre, la pression atmosphérique s'établirait dans la section de sortie, et toutes les vitesses seraient différentes; mais l'eau est reçue sur une aube de la roue, où elle continue son mouvement; la pression s'établit donc dans la section cc_1 suivant la loi hydrostatique.
2. Redtenbacher. Pl. VII. — C. Bach, *Die Wasserrader*. — Stuttgard, 1886, pl. 11, 15, 16.
3. M. Martin Grübler a publié, dans le « *Civil Ingenieur*, » 1876, p. 409, un important mémoire intitulé : Zur Theorie mittelschlachtiger Wasserrader und des Sagebien Rades.

ressantes de la roue de côté; elle présente, à un plus haut degré encore que le type primordial, les caractères qui ressortent de la théorie générale. Elle est représentée figure 23, et ses particularités les plus saillantes sont :

1° L'absence de tout ouvrage spécial destiné à amener l'eau sur la roue autrement que dans une direction horizontale; le vannage établi à l'amont ne sert qu'à arrêter le moteur, et s'efface pendant le fonctionnement.

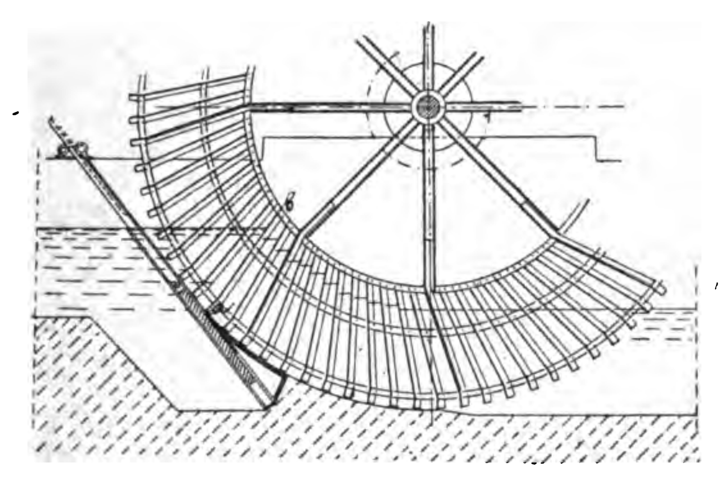


Fig. 23

2° La grande longueur des aubes, et leur inclinaison en arrière du rayon ; elles sont terminées, il est vrai, par un élément droit de peu de longueur (0m,10), mais le but de cette disposition est d'éviter les broutements qui ne manqueraient pas de se produire, entre les aubes et le coursier, au passage des corps étrangers entraînés.

L'inclinaison des aubes est choisie de manière à ce qu'elles pénètrent dans l'eau d'amont sous un angle assez ouvert sans que l'on doive trop augmenter le rayon; à l'aval, cette disposition, qui serait défectueuse pour une roue rapide parce qu'elle soulèverait l'eau, n'occasionne ici aucun inconvénient, à cause de la faible vitesse donnée à la roue.

La théorie de cette machine est extrêmement simple, la vitesse à la circonférence, réduite à 0m,60 ou 0m,70 par seconde, combinée avec la direction des aubes et la grande épaisseur (donc la faible vitesse) de l'eau affluente, permet de négliger à la fois le frottement sur le coursier,

la perte au remplissage, et la perte à la sortie, de sorte que le rendement n'est, en fin de compte, affecté que par les fuites; celles-ci sembleraient, au premier abord, devoir être plus importantes que dans la roue ordinaire, à cause de la grande longueur des aubes et de la lenteur de marche, mais l'eau étant reçue sous une forte épaisseur, la roue est relativement peu large.

Le tracé des vitesses montre que la perte à l'entrée est pratiquement nulle, car la vitesse w est convenablement dirigée, et la roue n'a pas de fonçure.

Des expériences au frein très nombreuses ([1]), faites surtout par Tresca, établissent que le rendement de cette roue peut dépasser 0,90, en y comprenant les transmissions; le jaugeage de l'eau a été fait en suivant, au moyen d'un flotteur, le niveau de la surface libre entre deux aubes successives. Il a été constaté aussi que cette roue conserve presque toujours un rendement supérieur à 0,80, même lorsque les niveaux varient considérablement, et que la chute devient très faible. Rühlmann ([2]) a relevé, sur une chute extrêmement réduite de $0^m,284$, un rendement de 0,75.

Le seul inconvénient de la roue Sagebien est sa grande lenteur de marche; elle serait fort encombrante pour des chutes supérieures à $1^m,50$, (le diamètre extérieur atteint parfois 11 mètres, et la largeur 6 mètres); pour les petites chutes, qui seraient à peine utilisables au moyen d'autres moteurs hydrauliques, elle constitue au contraire, une machine très parfaite; elle a généralement des longueurs d'aubes de 1 mètre à $1^m,30$; exceptionnellement, avec une longueur de 2 mètres et une vitesse de $0^m,80$ par seconde, on a pu écouler un débit de 1.000 à 1.200 litres par mètre de largeur de roue. Les aubes sont toujours très rapprochées, le pas est de $0^m,20$ à $0^m,30$.

La profondeur du bief d'amenée est égale à la hauteur de chute; la longueur des aubes vers le centre est déterminée de manière à ce que l'eau ne déborde pas vers l'intérieur par suite du manque de fonçure, il suffit pour cela que l'aube *ab*, qui vient de dépasser le *col de cygne* par son arête extérieure, s'élève au-dessus du niveau de l'eau par son arête intérieure. La roue est noyée à l'aval, d'une quantité égale à la hauteur d'eau se trouvant entre les aubes au moment où elles quittent

1. Revue universelle des Mines, 1re série, tome XXXV, p. 12. (Revue des Machines motrices à l'Exposition de Vienne, par M. Dwelshauvers-Dery).
2. Allgemeine Maschinenlehre, t. I, p. 351.

la partie courbe du coursier à l'aval; lorsque les niveaux varient, les aubes doivent être prolongées suffisamment pour que l'eau ne puisse jaillir vers l'intérieur.

26. — *Roue Zuppinger* (1). — Cette machine (fig. 24), ressemble en principe à la précédente, sauf que les aubes présentent une courbure qui a l'avantage de faciliter leur émersion à l'aval; le vannage est en déversoir, comme pour la roue de côté normale, mais l'aube est tracée de manière à éviter la perte au remplissage; ces roues peuvent avoir un rayon inférieur à celui de la roue Sagebien, leur vitesse à la circonférence est d'environ 1 mètre par seconde.

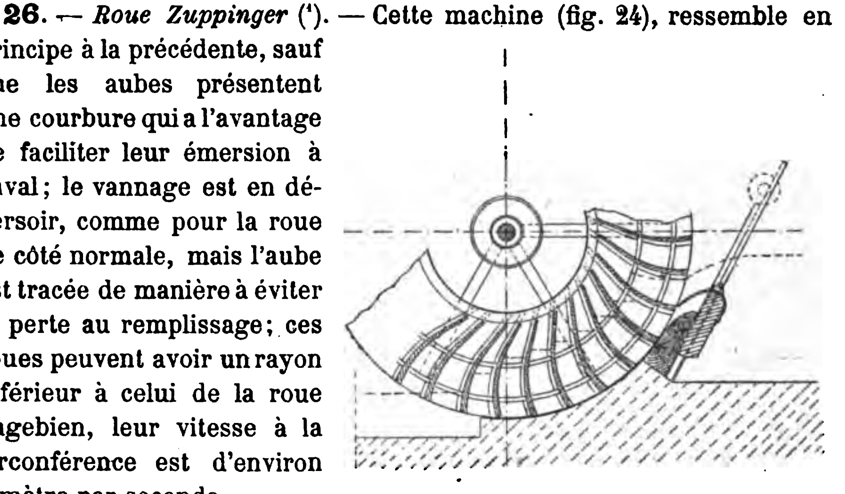


Fig. 24

Les roues Sagebien et Zuppinger ont la plus grande analogie avec les *roues à la Hollandaise*, qui servent aux épuisements de grands volumes à faible profondeur, et qui sont établies par conséquent dans un but opposé; les roues à la Hollandaise (voir 7e fascicule) comportent également les variétés à aubes droites et à aubes courbes.

§ VI

ROUE A AUGETS (2).

27. — Lorsque la chute atteint et dépasse 4 mètres, aucune des dispositions examinées jusqu'ici ne peut convenir; les diamètres deviennent, en effet, beaucoup trop grands, les roues sont coûteuses d'établissement,

1. C. Bach. — Ouvrage cité, pl. 19, 20, 21.
2. Publication industrielle d'Armengaud, t. II, pl. 38.

et ont l'inconvénient de tourner fort lentement; on emploie alors soit la ***roue à augets***, soit la ***roue à augets de poitrine*** avec vannage à persiennes, qui ne diffère pas essentiellement de celle décrite au § III.

Dans la roue à augets, l'eau est reçue au sommet du diamètre vertical passant par l'axe (fig. 25), le vannage est prolongé par un conduit

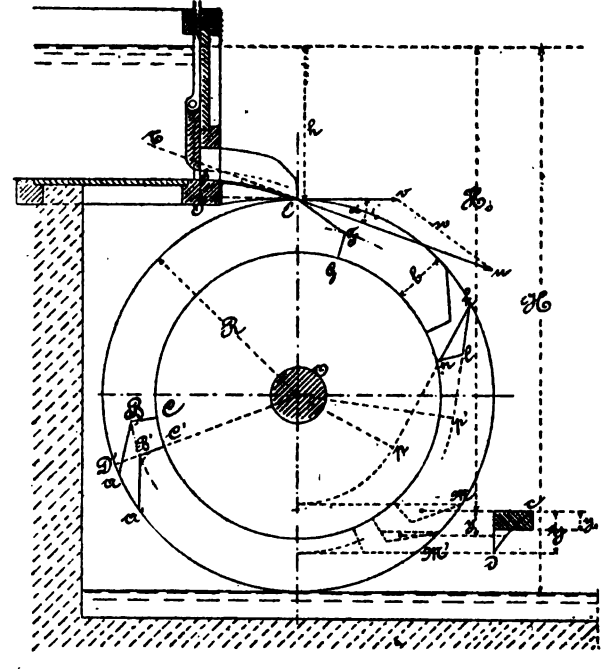


Fig. 25

ouvert à la partie supérieure, destiné à insérer avec précision l'eau dans la roue; les augets ne sont que partiellement remplis, et ils se déversent dans le bief inférieur; le point où l'eau quitte la roue dépend du diamètre de celle-ci, de la vitesse, du coefficient de remplissage, et du tracé des cloisons.

Le déversement a lieu progressivement, par suite de l'inclinaison croissante des cloisons, et le travail de l'eau est perdu à partir du moment où elle quitte la roue. Au point de vue du travail recueilli, les choses se passent comme si l'auget se déversait brusquement, dans une position intermédiaire entre celle où il commence à abandonner le liquide, et celle où le déversement est complet. Désignons par H_1 la

hauteur comprise entre ce point et le niveau d'amont, hauteur pour le moment inconnue, mais que nous pourrons évaluer plus tard.

On peut admettre que l'eau, au moment où elle quitte l'auget, possède la même vitesse que la roue; ce n'est que plus tard, en effet, et sous l'influence de la pesanteur, qu'elle acquiert une vitesse plus grande.

Pendant le remplissage, l'eau possède la vitesse absolue u, faisant avec la circonférence l'angle α; soit v la vitesse à la couronne, la vitesse relative est w, et l'on admet que la hauteur correspondante à cette vitesse, soit $\frac{w^2}{2g}$, est perdue (1).

Par suite de ces considérations, on peut appliquer à la roue à augets l'équation déjà trouvée au numéro 14, en ayant soin d'y remplacer H par H_1, et de supprimer le terme dû au frottement de l'eau sur le coursier. On obtient, pour le travail recueilli, en prenant

$$v = \frac{1}{2} u \cos \alpha$$

$$T_m = \Pi Q \left[H_1 - h \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) \right]$$

h est la hauteur génératrice de la vitesse u.

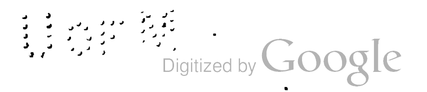
On a, tout d'abord, le même intérêt à réduire α que pour la roue de côté, mais en outre, cette valeur règle l'inclinaison de l'auget sur la circonférence, ainsi que le point où se produit le déversement de l'eau; il y a donc ici toutes raisons de réduire la valeur de α, qui ne doit pas dépasser 15 à 20°.

28. — *Eléments du vannage.* — On connaît les niveaux d'amont et d'aval (fig. 25), on se donne la vitesse absolue u avec laquelle l'eau arrive au sommet de la roue, on en déduit

$$h = \frac{u^2}{2g}$$

h étant la hauteur nécessaire pour créer cette vitesse. Le sommet E de la roue est ainsi déterminé (on raisonne provisoirement comme si

1. En réalité, l'eau agit plus ou moins par réaction sur la cloison brisée ou courbe de l'auget; elle acquiert d'autre part, avant d'atteindre la surface libre du compartiment, un supplément de vitesse qui augmente la perte.



l'épaisseur de la veine était nulle, ou réduite à celle d'un filet). La roue doit être tangente au niveau d'aval, on peut donc déterminer le rayon R :

$$R = \frac{H - h}{2}$$

On mène par E la tangente ET au filet, faisant avec la circonférence, donc avec l'horizontale, un angle α ; on prend

$$EP = h \sin 2\alpha$$

et on mène la parabole ES tangente à ET, et dont le sommet S se trouve sur la verticale du point P, on a

$$PS = h \sin^2 \alpha$$

Par le même raisonnement que celui déjà établi au numéro 23, on sait que la courbe SE peut servir de directrice au filet sortant du vannage, pour toute hauteur sur le point E égale ou inférieure à h [1].

Soit e l'épaisseur normale de la veine, au moment où elle atteint la roue, la hauteur motrice est :

$$h - \frac{e}{\cos \alpha}$$

On sait que l'épaisseur, mesurée verticalement, est partout égale à l'ouverture e_0 du vannage, on a donc :

$$\frac{e}{\cos \alpha} = e_0$$

et la valeur de la vitesse peut être calculée exactement ainsi que le débit pour une largeur a ; on prend ordinairement :

$$u = 3^{m},00$$
$$e = 0^{m},10$$
$$\alpha = 20^{\circ}$$

On peut aussi avoir à établir les roues à augets de manière à réaliser

1. Pour une hauteur supérieure, au contraire, l'eau pourrait ne pas adhérer à la paroi SE, et s'échapper sous un arc plus tendu; elle atteindrait la roue sans être dirigée, et au delà du point E.

une vitesse augulaire, ω, déterminée à l'avance; en ce cas, soit R le rayon de la roue, on a:

$$v = \omega R$$

on a du reste,

$$v = \frac{1}{2} u \cos \alpha$$

ou

$$u = \frac{2v}{\cos \alpha} = \frac{2 \omega R}{\cos \alpha}$$

Cette vitesse devant être produite par la hauteur $h - e_0$, on a:

$$u^2 = 2g (h - e_0)$$

ou

$$2 \omega^2 R^2 = g (h - e_0) \cos^2 \alpha$$

En joignant à cette équation la condition:

$$H = 2R + h$$

On peut déterminer R et h; mais on peut être conduit ainsi à une valeur de h assez grande, incompatible avec un bon rendement.

29. — *Tracé des augets.* — Pour faciliter le remplissage de la roue, on ne peut employer l'artifice dont on use dans la roue de côté, et qui consiste à ménager des vides dans la fonçure [1], on est obligé pour cette raison, ainsi que pour retarder le déversement, d'adopter un coefficient de remplissage ne dépassant pas $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{3}$; la profondeur des augets est déterminée en conséquence.

La direction adoptée pour u permet de tracer l'auget, car la vitesse v de la roue est donnée par:

$$v = \frac{1}{2} u \cos \alpha$$

1. On a cependant tourné cette difficulté dans quelques roues, voir notamment C. Bach, ouvrage cité pl. 7. — *Praktische M. C.*, 1875, p. 125. — *Publication industrielle* d'Armengaud, t. IV, pl. 34.

La vitesse w étant connue en direction, on trace le premier élément de l'auget, EF, parallèlement à w; les cloisons formant les compartiments ont un contour brisé, dont le sommet F se trouve sur une circonférence partageant b en deux parties égales.

Redtenbacher donne, pour déterminer l'espacement des augets, la règle suivante: ayant tracé, comme il vient d'être dit, l'une quelconque des cloisons, A'B'C', on prolonge le rayon OC' jusqu'au point D' on prend

$$D'A = \frac{1}{5} D'A'$$

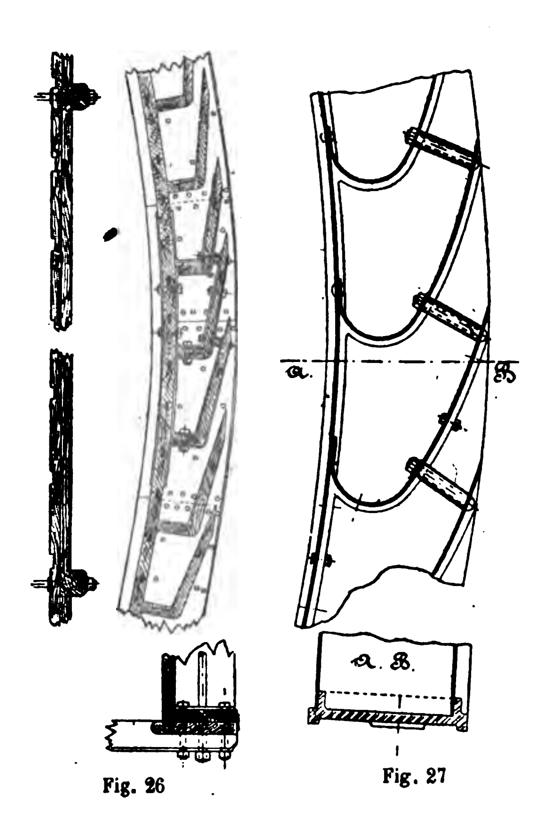


Fig. 26 Fig. 27

L'espacement à adopter pour les aubes est A'A; ce tracé a pour effet de produire un certain recouvrement des augets.

Pour des roues en tôle [1] il est plus facile de réaliser le contour continu (fig. 27), que le contour brisé adopté pour les roues en bois (fig. 26).

30. — *Calcul de* H_1. — Pour déterminer, soit le travail recueilli, soit le rendement, il faut connaître les circonstances du déversement; il y a lieu de distinguer deux cas:

Premier cas. — *Roues à marche lente.* — La force centrifuge n'a pas d'influence sensible sur la forme d'équilibre de la surface de l'eau contenue dans les augets; on connaît, d'après le coefficient de rempliss-

1. C. Bach, pl. 3, 4, 5. — Redtenbacher, pl. XVIII.

sage adopté, le volume d'eau reçu dans chaque compartiment; on cherche la position M (fig. 25), pour laquelle la surface libre atteint le bord de la cloison, ainsi que la position M' pour laquelle l'auget est complètement vidé; on abrège cette recherche en opérant de la manière suivante: on prend un auget quelconque, on mène la ligne *kn*, de manière à intercepter le volume V_o reçu dans l'auget, on abaisse O*p*, perpendiculaire à la surface *kn*, prolongée, et on ramène O*p* sur la verticale passant par le centre; on opère de même à l'égard de O*p'* perpendiculaire au prolongement de *kl*.

Entre les positions M et M', le volume d'eau contenu dans l'auget diminue progressivement, et si l'on trace un auget quelconque, on détermine facilement, et le volume V qu'il renferme, et le centre de gravité de ce volume, situé à une distance y en dessous de celui de l'auget M; on trouve donc, pour le travail cédé à la roue entre les positions M et M':

$$\Pi \int_0^Y V \, dy$$

L'intégration peut se faire d'une manière suffisamment exacte en traçant la courbe *cd* des volumes, on détermine ensuite la hauteur y_1 du déversement fictif, que l'on peut substituer au déversement réel, par l'équation

$$y_1 V_o = \int_0^Y V \, dy$$

La hauteur H_1 cherchée, est évidemment la distance comprise entre le niveau d'amont, et le niveau du déversement fictif, tel qu'il vient d'être construit, et l'on a:

$$H_1 = H_o + y_1$$

Il résulte du tracé, que la hauteur $H - H_1$, perdue par suite du déversement anticipé, est proportionnelle au rayon ou au diamètre de la roue, pourvu que l'angle α et le coefficient de remplissage conservent une valeur constante; or, le diamètre de la roue étant $H - h$, la perte *relative* de travail, pour une roue quelconque, est proportionnelle à

$$\frac{H-h}{H} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{h}{H}$$

c'est-à-dire, puisque h est constant pour une même vitesse d'entrée, que cette perte relative diminue légèrement pour les petites chutes.

Le déversement est d'autant plus retardé, que l'angle α est plus faible; dans certaines roues dessinées par Redtenbacher, cet angle n'est que de 10°; enfin, le coefficient de remplissage a une grande influence sur la hauteur à laquelle se produit le déversement.

Deuxième cas. — Roues à marche rapide. — Lorsque la vitesse linéaire à la circonférence s'élève notablement au-dessus de 1m,50 par seconde, et qu'en même temps le rayon de la roue est faible, il faut tenir compte

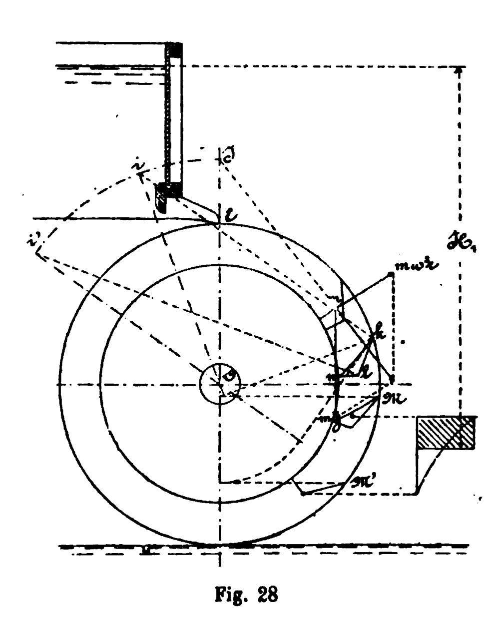


Fig. 28

de la force centrifuge qui s'exerce sur le liquide, et modifie sa forme d'équilibre.

Un point quelconque de masse m (fig. 28), appartenant à la surface libre, est sollicité à la fois par son poids mg, et par la force centrifuge $m\omega^2 r$, ω étant la vitesse angulaire, et r le rayon Om ; la résultante rencontre au point I la verticale OI passant par le centre, et l'on a

$$\mathrm{OI} = \frac{g}{\omega^2}$$

Cette quantité étant constante, le point I est le même pour toute la surface libre, quelle que soit la position de l'auget; ce point est ainsi le centre de courbure de toutes les sections droites des surfaces cherchées.

Pour trouver la position de l'auget pour laquelle le déversement commence à se produire, on calcule la quantité OI, on trace l'auget dans une position quelconque, on cherche par tâtonnements, sur la circonférence de rayon OI, le centre i de l'arc kn déterminant dans l'auget la base kln du prisme d'eau admis; il suffit de ramener le rayon Oi sur la verticale OI, en faisant tourner la roue du même angle, le point k, par l'effet de ce mouvement de rotation, vient se placer en M, qui est ainsi la position du bord de la cloison pour laquelle le déversement commence.

Pour chercher la position M' qui correspond au déversement complet, il faut, par le point l, qui représente le fond d'un auget quelconque élever la normale li', à l'élément lk, et ramener par rotation le rayon Oi' dans la position verticale OI.

La quantité d'eau contenue dans un auget intermédiaire est déterminée en observant que le centre de courbure de la section droite de la surface libre est le point I.

On achève, comme dans le premier cas, le calcul de la hauteur moyenne H_1.

31. — *Formules de Morin.* — Morin a établi des formules permettant de calculer le rendement des quatre espèces de roues examinées jusqu'ici; on les tire facilement de la formule générale du numéro 14, dans laquelle on peut négliger le dernier terme (provenant du frottement de l'eau sur le coursier); on peut alors mettre l'équation sous la forme:

$$T_m = \Pi Q \left(H - \frac{u^2}{2g}\right) + \Pi Q \frac{v}{g} (u \cos \alpha - v)$$

ou

$$T_m = \Pi Q (H - h) + \Pi Q \frac{v}{g} (u \cos \alpha - v)$$

Le premier terme représente le travail effectué par l'eau à partir du moment où elle est emprisonnée dans la roue; le second terme est, par conséquent, le travail cédé par l'eau pendant le remplissage, par suite du choc.

Mais, le rendement étant affecté par diverses causes, telles que les

fuites entre la roue et le coursier, lorsqu'il s'agit de roues de côté, ou le déversement anticipé, lorsqu'il s'agit de roues à augets, Morin, à la suite d'expériences, a corrigé la formule ci-dessus, en multipliant Q, pour les roues à coursier, par un coefficient inférieur à l'unité, et en affectant $H - h$ d'un coefficient de réduction lorsqu'il s'agit des roues à augets. On peut donc poser la formule unique:

$$T_m = A \Pi Q (H - h) + B \Pi Q \frac{v}{g} (u \cos \alpha - v)$$

en donnant à A et B les valeurs qui sont comprises dans le tableau suivant:

ESPÈCE A LAQUELLE APPARTIENT LA ROUE	A	B
Roues de côté avec prise d'eau en déversoir	0.799	0.799
— avec vannage à tête d'eau	0.750	0.750
— avec vannage à persiennes	0.799	0.799
Roues à augets	0.780	1.000

Ces coefficients sont applicables aux moteurs établis conformément aux indications théoriques exposées pour chacun d'eux, car sinon le rendement pourrait s'abaisser en dessous de toute limite.

§ VII

ROUE PONCELET A AUBES COURBES.

32. — Cette machine participe à la fois des roues hydrauliques par sa forme extérieure et son montage dans un coursier, et des turbines par le mode suivant lequel l'énergie lui est communiquée.

L'eau est reçue par un vannage de fond (fig. 29), à la partie inférieure de la roue. Considérons le filet moyen, animé de la vitesse absolue u, au moment où il rencontre la circonférence sous l'angle α ; la vitesse de la roue au pourtour étant v, l'aube est tracée de manière à ce que le choc à l'entrée soit évité, c'est-à-dire parallèlement à la vitesse relative w. On obtient la directrice AB, de la surface cylindrique de

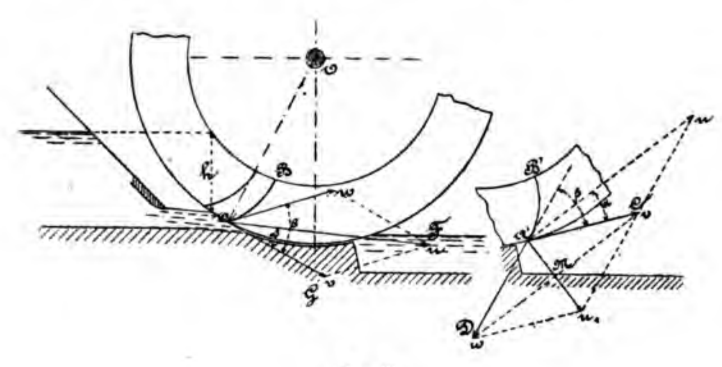


Fig. 29

l'aube, en menant une courbe (généralement un arc de cercle), tangente à la direction w.

L'eau est reçue sur la surface concave de l'aube pendant un temps très court, car les aubes sont très rapprochées; on peut, jusqu'à un certain point, considérer que les choses se passent comme si la masse liquide m était concentrée en une molécule. Sous l'influence de la pesanteur et de la force centrifuge [1], la vitesse relative w diminue peu à peu, jusqu'à devenir nulle, puis, elle reprend, en sens inverse, une valeur de plus en plus grande, jusqu'au moment où elle quitte l'aube au point A'.

Admettons, tout d'abord, que ce point soit situé à la même hauteur que le point A, et négligeons le frottement sur l'aube. Le travail des

1. Dans le mouvement *relatif* de l'eau par rapport à l'aube, la force centrifuge intervient comme force égale et contraire à la force d'entrainement lorsqu'on néglige le frottement; le poids est la seule force extérieure donnant lieu à du travail, car la réaction de l'aube sur le liquide, normale à la trajectoire du mouvement *relatif*, reste sans effet sur la variation de force vive évaluée dans le mouvement *relatif*, et il en est de même de la force centrifuge composée (42).

forces évalué dans le mouvement relatif depuis A jusqu'en A', étant nul, il en est de même de la variation de la force vive,

$$\frac{1}{2} m w^2$$

La vitesse relative de sortie en A' est donc égale à la vitesse relative d'entrée.

La vitesse absolue à la sortie est la résultante u_1, de v et w, et la force vive correspondante

$$\frac{1}{2} m u_1^2$$

est la seule perte d'effet utile dont nous ayons à tenir compte; pour évaluer cette perte par unité de temps, m doit être remplacé par la somme des masses reçues pendant une seconde, c'est-à-dire par

$$\frac{\Pi Q}{g}$$

Le travail recueilli est, par conséquent :

$$T_m = \Pi Q \left(H - \frac{u_1^2}{2g}\right)$$

Pour améliorer le rendement, il convient de réduire u_1 autant que possible; admettons que l'angle β, que fait l'aube avec la circonférence, ait été fixé; l'angle CA'D, supplémentaire de β, aura également une valeur déterminée; d'autre part, l'égalité des triangles A'DC, AFG, donne

$$DC = u$$

Dans le triangle A'DC, le côté DC et l'angle opposé ayant des valeurs constantes, le minimum de la médiane A'M ou $\frac{u_1}{2}$, correspond au cas où le triangle devient isocèle, et où l'on a

$$A'D = A'C$$

c'est-à-dire

$$w = v$$

égalité qui entraine, comme conséquence:

$$\beta = 2\alpha$$

ou

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Telle est la condition qui, pour un angle β, déterminé *a priori*, donne à u_1 sa valeur minimum, et procure le maximum du rendement. Le travail recueilli a pour expression :

$$T_m = \Pi Q \left(H - \frac{u^2}{2g} tg^2 \alpha\right)$$

Et la vitesse du maximum d'effet est

$$v = \frac{1}{2} \frac{u}{\cos \alpha}$$

Cette théorie est subordonnée à la condition que les points A et A' soient au même niveau, ce qui, avec la valeur trouvée ci-dessus pour v, ne pourrait se produire que par l'effet du hasard ; néanmoins, la roue ayant toujours un rayon assez grand, le point A' peut se déplacer notablement sur la circonférence sans changer beaucoup de niveau ; on voit, cependant, que cette circonstance limite la hauteur des chutes auxquelles la roue Poncelet est applicable, attendu que l'arc AA' compris entre les points d'entrée et de sortie de l'eau, dépend à la fois des vitesses et du rayon [1].

En admettant que la hauteur h qui produit la vitesse d'entrée u, soit choisie égale à la hauteur de chute,

$$\frac{u^2}{2g} = H$$

Pour $\alpha = 15°$, on a

$$T_m = 0{,}93 \ \Pi Q H$$

En réalité, le rendement des roues Poncelet ne s'élève pas, dans des conditions moyennes, au-dessus de 0,65 (il atteint exceptionnellement

1. Cette question a été complètement étudiée par Redtenbacher, ouvrage cité p. 112. — Le maximum des chutes auxquelles la roue Poncelet peut s'appliquer avantageusement est de $1^m{,}50$.

0,75), la théorie ci-dessus ne tient pas compte, du reste, des fuites entre la roue et le coursier, ni des angles différents sous lesquels les divers filets sont admis dans la roue, et dont α n'est qu'une valeur moyenne, ni du frottement sur les aubes, etc.

33. — *Proportions et tracé pratiques.* — On immerge la roue de $0^m,10$ à $0^m,15$, et l'on obtient le point le plus bas, P, du coursier (fig. 30). Le rayon extérieur égal au double de la chute étant porté en PO, on décrit

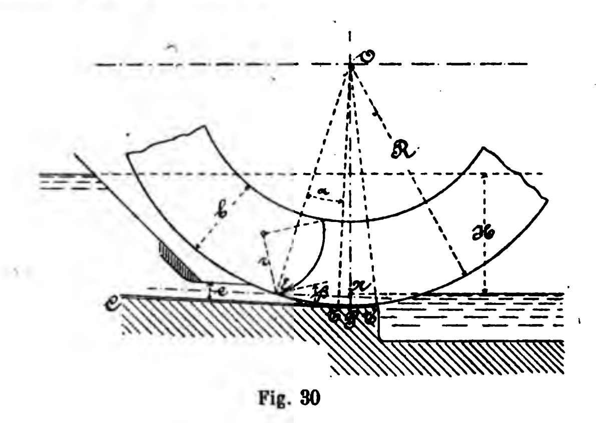


Fig. 30

la circonférence extérieure de la roue; on prend l'angle POT égal à 3°, et on mène par le point T la tangente TC, qui constitue la partie rectiligne du coursier.

L'angle TOE $= \alpha = 15°$, détermine la position du filet moyen (qui passe en E), et, par conséquent, l'épaisseur de la veine d'entrée ou l'ouverture du vannage. La directrice de l'aube doit faire avec la circonférence l'angle $\beta = 2\alpha = 30°$, son rayon de courbure r est égal à la moitié de la hauteur de chute.

Le vannage est placé aussi près que possible de la roue, on évite ainsi la perte de charge, qui, pour l'eau animée d'une grande vitesse, deviendrait très sensible ; afin de réaliser plus complètement cette condition, on incline la vanne à 45° sur l'horizon.

La largeur b de la couronne doit être déterminée de manière à ce que l'eau ne puisse franchir le bord intérieur des aubes, car, à partir de ce moment, son effet serait perdu pour la roue ; nous avons déjà vu que la force vive due à la vitesse relative w est absorbée par le travail de la pesanteur et par celui de la force centrifuge ; si on néglige ce dernier,

on aura, pour la hauteur verticale x à laquelle l'eau peut s'élever à partir du point E d'entrée :

$$x = \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{4}\frac{u^2}{2g}\frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

ou, pour la valeur de α adoptée :

$$x = 0{,}265 \text{ H}$$

On pourrait déterminer le bord intérieur de l'aube d'après cette condition, mais la portion de liquide reçue sur l'aube n'est pas assimilable à une petite masse isolée, les premières tranches poussées par celles qui sont admises vers la fin du passage de l'aube, s'élèvent à une hauteur plus grande que x ; du reste, la vitesse w n'acquiert sa valeur normale qu'après la période de mise en train; lorsque l'on ouvre la vanne, l'eau tend à s'élever jusqu'au niveau d'amont.

L'expérience conduit à donner à la couronne une largeur égale à la moitié environ de la hauteur de chute.

Le nombre des aubes est toujours assez grand, Weisbach indique pour leur écartement normal $0^m{,}30$; Redtenbacher prend un nombre d'aubes constant et égal à 36, quel que soit le diamètre. Fairbairn [1] donne pour le nombre d'aubes

$$n = 10{,}4 \text{ R} + 16$$

R étant le rayon en mètres.

L'arc TT', sur lequel le coursier emboite la roue, est de 10 à 15°; la profondeur du canal de fuite, à l'aval, doit être assez grande (0,5 à 0,6H) attendu que l'eau s'échappe de la machine presque sans vitesse.

34. — *Coursier en développante.* — Le tracé précédent a le défaut de donner, pour l'angle sous lequel les divers filets rencontrent le contour de la roue, des valeurs différentes de celle admise pour le filet moyen qui, seul, coupe la circonférence sous un angle α convenable.

On a imaginé pour remédier à cet inconvénient, le coursier en spirale d'Archimède, et le coursier en développante de cercle ; ce dernier donne une solution exacte de l'admission sous un angle constant.

1. Treatise on Mills and Millworks, t. I, cité par Rühlmann.

Pour tracer le coursier en développante, on détermine le point m (fig. 31), en donnant à l'arc Pm une valeur convenable, on construit l'angle $Omp = \alpha$, on abaisse Op perpendiculaire à mp, et l'on trace la développante mm' de la circonférence Op en considérant m comme le point décrivant. Quelle que soit l'ouverture s du vannage, la hauteur motrice, défalcation faite de la perte de charge, conserve sensiblement la même valeur dans une section quelconque de la veine; celle-ci doit donc avoir une épaisseur normale constante et égale à s; or, si l'on retranche, de tous les rayons tels que pm la quantité constante s, on obtient une développante identique à la première et qui coupe la circonférence de la roue sous l'angle α; la surface libre de la veine rencontre donc la circonférence au point n sous un angle convenable; le même raisonnement s'appliquerait évidemment à un filet quelconque.

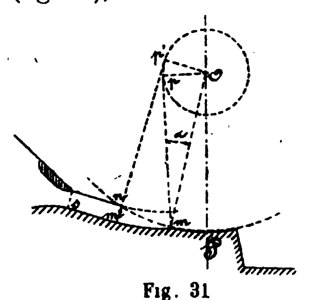


Fig. 31

§ VIII.

ROUE EN DESSOUS A AUBES PLANES.

35. — L'eau est distribuée par un vannage de fond (fig. 32), mais elle agit par impulsion sur les aubes, qu'elle rencontre à peu près normalement.

Pour appliquer à cette machine la théorie générale exposée au § I, il faut observer que l'eau étant reçue dans le voisinage du niveau d'aval, on doit avoir :

$$h = H$$

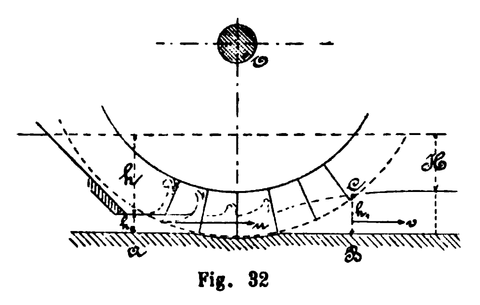


Fig. 32

D'autre part, α est très faible, et par conséquent, on peut poser

$$\cos \alpha = 1$$

Le travail recueilli a donc pour expression, si l'on néglige le frottement sur le coursier (n° 14) :

$$T_m = \Pi Q \frac{v}{g} (u - v)$$

Le maximum de cette expression correspond à

$$v = \frac{1}{2} u$$

et a pour valeur :

$$T_m = \frac{1}{2} \Pi Q \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2} \Pi Q H$$

Le rendement de la roue en dessous, dans les circonstances les plus favorables, n'est donc que de 50 %.

On peut se faire une idée de l'emploi de la force vive totale de l'eau en construisant le carré ayant pour côté $AB = u$ (fig. 33). La force vive totale étant représentée, à une certaine échelle, par la surface de ce carré, portons $BC = v$, et achevons le partage du carré total. Le carré construit sur le côté $u-v$ représente la force vive perdue par le choc, le carré construit sur le côté v représente la force vive perdue par suite de la vitesse conservée à la sortie. Les parties non couvertes de hachures correspondent au travail recueilli ; elles atteignent leur valeur maximum, égale à la moitié du carré total, lorsque le point C est au milieu de AB, ou lorsque $v = \frac{1}{2} u$.

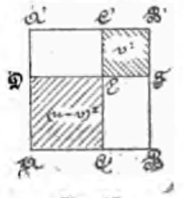


Fig. 33

La puissance abolue de la chute se partage donc de la manière suivante :

La moitié est utilisée, un quart est perdu par le choc, le dernier quart est abandonné à l'aval.

36. — Cette théorie, bien qu'elle rende à peu près compte des faits, est imparfaite, car elle fait abstraction de la surélévation de l'eau, qui

se produit nécessairement par suite du passage de la vitesse u à la vitesse plus faible de l'aval, surélévation dont on peut tirer parti en établissant le vannage assez bas. La méthode basée sur le principe des quantités de mouvement projetées (ou de Bélanger), dans laquelle les actions mutuelles dues au choc s'éliminent, permet d'arriver au résultat sans qu'il soit nécessaire de connaitre la force vive perdue.

Désignons par F; F', F''..., les réactions produites sur l'eau par les différentes aubes plongées, et par h_0, h_1 les hauteurs des sections rectangulaires A et B prises à l'amont et à l'aval de la roue, respectivement; soient ω_0 et ω_1 ces sections, u et v les vitesses des filets liquides qui les traversent (v est aussi la vitesse de la roue à la circonférence).

L'équation à poser doit exprimer que l'accroissement, pendant le temps dt, de la quantité de mouvement du liquide compris entre les sections A et B, projeté sur un *axe horizontal*, est égal à la somme des impulsions des forces agissant sur la masse pendant le même temps.

Dans ce calcul, la pression atmosphérique ne donne lieu à aucune impulsion, il en est de même de la réaction du coursier, que nous supposons normale à la direction de la vitesse; les termes entrant dans l'équation seront, par conséquent :

Quantité de mouvement perdue, projetée sur l'axe :

$$\frac{\Pi Q}{g} dt (u - v)$$

Impulsion projetée de la pression d'aval diminuée de celle de la pression d'amont :

$$\frac{\Pi h_1}{2} \omega_1 dt - \frac{\Pi h_0}{2} \omega_0 dt$$

Impulsion projetée des réactions des aubes, celles-ci étant supposées normales à la vitesse :

$$dt \, \Sigma F$$

L'équation cherchée est, par conséquent, après suppression du facteur, dt :

$$\frac{\Pi Q}{g} (u - v) = \frac{\Pi h_1}{2} \omega_1 - \frac{\Pi h_0}{2} \omega_0 + \Sigma F$$

En multipliant les deux membres par v, et remarquant que :

$$T_m = v \, \Sigma F$$

il vient :

$$(1) \ldots\ldots \quad T_m = \frac{\Pi Q}{g} v (u - v) - \Pi Q \frac{h_0}{2} \left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u} \right)$$

La vitesse u est créée par la hauteur h, or

$$h = H + h_1 - h_0$$

ou, puisque l'on a

$$h_1 = h_0 \frac{u}{v}$$

on peut écrire

$$(2) \ldots\ldots \quad u^2 = 2g \left[H + h_0 \left(\frac{u}{v} - 1 \right) \right]$$

On peut tirer de cette dernière équation la valeur de u, la substituer dans l'expression de T_m, et chercher la vitesse v de la roue qui donne le maximum du travail en supposant donnée l'ouverture du vannage h_0 : on peut aussi prendre comme inconnue le rapport

$$(3) \ldots\ldots \quad \frac{u}{v} = m$$

et, au moyen de cette équation jointe à l'equation (2), éliminer u et v de l'équation (1), chercher ensuite la valeur particulière de m qui rend T_m maximum. L'équation qui donne m est du troisième degré, mais on peut éviter de la résoudre en calculant quelques valeurs numériques pour chaque cas d'application.

Si l'on admettait *a priori*, comme au numéro 35 :

$$v = \frac{1}{2} u$$

on trouverait

$$T_m = \Pi Q \left(\frac{H}{2} - \frac{h_0}{4}\right)$$

ce qui fait voir que le rendement serait légèrement inférieur à $\frac{1}{2}$. Toutes les recherches expérimentales anciennes conduisent à admettre, pour la vitesse de la roue, une valeur comprise entre 0,3 et 0,4 u.

Les fuites ont dans ces roues une grande importance ; Gerstner [1] a montré que, quelle que soit la précision de l'emboîtement dans le coursier, une certaine partie de l'eau s'échappe à l'aval sans agir sur les aubes ; il est nécessaire, pour éviter cet effet, de munir le coursier d'une partie concentrique à la roue.

La roue en-dessous est la seule, parmi celles qui ont été examinées jusqu'ici, où la vitesse dans le canal de fuite est assez grande pour qu'un raccordement soit possible avec le niveau d'aval par une *contre-pente* ou par un *ressaut* ; pour profiter de cette circonstance, qui permet de regagner une partie de la hauteur due à la vitesse de sortie, il faudrait évidemment établir la roue de manière à ce que le point C se trouve d'une certaine quantité en dessous du niveau d'aval [2], mais cette question présente peu d'intérêt pratique, car la roue en dessous n'en resterait pas moins une machine médiocre, à laquelle on ne doit avoir recours que si la considération de rendement est secondaire.

La roue en dessous était autrefois la seule qui permît d'obtenir, sans transmissions, une vitesse de rotation notable ; la roue Poncelet réalise cette condition avec un rendement meilleur, car l'effet utile de la roue qui nous occupe ne dépasse pas 0,35 ; ce résultat avait déjà été établi par Smeaton et par Bossut, au siècle dernier.

1. Weisbach. — Ouvrage cité, 2e vol., p. 460. — Redtenbacher, Wasserrader, p. 39.
2. Cette étude devrait être faite au moyen de la théorie créée par M. E. Boudin : *de l'Axe hydraulique des Cours d'eau*, Annales des travaux publics de Belgique, T. XX.

§ IX.

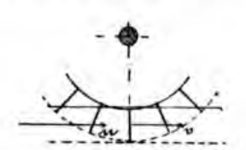
ROUES ACTIONNÉES PAR UN COURANT.

37. — Supposons que le rayon (fig. 34), soit assez grand pour que les aubes deviennent à peu près normales à la direction des filets liquides.

Soient u la vitesse du courant ;

v la vitesse de la roue au milieu des pales ;

S la surface immergée de l'aube dans la position verticale.



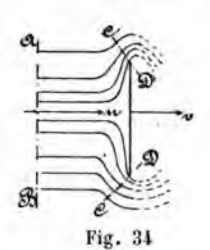


Fig. 34

Pour appliquer le principe des quantités de mouvement à la masse liquide qui influence la roue, il faut d'abord remarquer que les filets liquides sont déviés jusqu'à une distance notable du bord des aubes, la section de la veine à considérer est donc plus grande que S ; en second lieu, les filets conservent dans la section CD, après avoir agi, une certaine vitesse relative dont la projection sur la vitesse v n'est pas nulle ; pour ces deux raisons, la quantité de mouvement perdue devra être affectée d'un coefficient K, indéterminé. Par un raisonnement analogue à celui que l'on suit pour établir la formule des *Moulins à vent* (n° 116), on trouve pour l'expression du travail recueilli par seconde (formule de *Parent*) :

$$T_m = \frac{\Pi}{g} K S (u - v)^2 v$$

La valeur de v qui donne le maximum du travail est :

$$v = \frac{1}{3} u$$

La formule de *Borda* est tirée de la théorie des roues en dessous à aubes planes ; en tenant compte du coefficient numérique calculé par Poncelet, cette formule est

$$T_m = 81{,}56 \, S \, u \, (u - v) \, v$$

La valeur maximum du travail est réalisée théoriquement pour $v = \frac{1}{2} u$, mais l'expérience a montré que la valeur la plus convenable est

$$v = 0{,}4\, u$$

Pour des aubes de 3 mètres carrés de surface, immergées dans un courant de 3 mètres par seconde, la puissance recueillie est d'environ 20 chevaux ; pour 2 mètres de vitesse, elle n'est que de 6 chevaux ; on voit que ces machines ne sont pas d'un emploi pratique dans les courants ordinaires, mais elles sont d'un usage fréquent sur les fleuves rapides, et paraissent même représenter le moteur hydraulique sous sa forme la plus ancienne; pour que l'immersion soit constante, et pour rendre plus libre l'accès de l'eau, ces roues sont montées sur des bateaux ancrés dans le courant [1].

On peut citer, comme appartenant à cette classe de moteurs hydrauliques, la chaine de Roman, l'hydromoteur Jagn, la roue flottante de Colladon [2].

1. Des roues semblables, actionnant des moulins à blé, étaient en usage sur le Tibre, à Rome, au VIe siècle. — Rühlmann, t. 1. — On retrouve des moulins à blé flottants, sous une forme presque identique, dans l'un des bras du Rhin. près de Nierstein.

2. Haton de la Goupillière. — *Cours de Machines*, t. I, p. 265-269.

CHAPITRE II

Machines dans lesquelles l'eau agit par sa vitesse [1].

38. — Ces machines comprennent surtout les roues hydrauliques horizontales, ou turbines, dont l'idée première se retrouve dans la roue à cuillers [2] ; on avait été amené à cette disposition par l'avantage qu'elle présente de pouvoir actionner par son arbre vertical, sans transmission intermédiaire, la *meule courante* des moulins à blé ; ces roues, qui n'avaient pas d'appareil injecteur, étaient fort imparfaites. La roue de *Segner*, produite au siècle dernier, est une machine dérivée du tourniquet hydraulique, elle fut analysée par Daniel Bernoulli, puis par Euler; *de Mannoury d'Ectot*, qui reproduisit sous le nom de levier hydraulique, une machine du même genre, est plus connu par sa *Danaïde*, qui s'écarte assez notablement des turbines connues aujourd'hui sur le continent, mais présente plusieurs caractères communs avec quelques turbines Américaines actuelles.

Burdin parait avoir le premier (en 1826) réalisé une turbine munie d'un appareil injecteur ; à la même époque, Fourneyron construisit une turbine composée de deux parties concentriques, la partie centrale était fixe et munie de directrices courbes; la roue, enveloppant cet appareil injecteur, comprenait les aubes mobiles se dégorgeant sur tout le pourtour. En peu d'années, cette machine, qui réalisait la turbine sous ses éléments essentiels, a été portée à un haut degré de perfection, et a donné lieu à des variétés nombreuses, qu'on peut rattacher, quant aux formes extérieures, à deux classes [3] :

1. H.-V. Reiche préconise pour les machines de cette classe le nom de « *roues à action de masse.* » (Wassermasserader) — Die Gesetze des *Turbinen-Baues.* — Leipzig, Arthur Félix, 1877.
2. *Bélidor.* — Architecture hydraulique.
3. Nous ne citons que pour mémoire une classe de turbines qui participent à la fois du genre radial centripète et du genre axial, et qui parait être en grande vogue en Amérique. La théorie générale leur est applicable en ce qui concerne les dimensions de l'appareil injecteur, les sections d'entrée et de sortie des canaux mobiles, les inclinaisons du dernier élément de la directrice et des aubes; mais le tracé des parties intermédiaires des aubes présenterait des difficultés que nous ne saurions aborder ici; il est du reste probable que ce tracé est fait au sentiment, et vérifié par l'expérience. On trouvera un grand nombre de ces turbines dans le recueil de *Uhland* (*Praktische M. C.*), années 1876-1877, ainsi que dans l'ouvrage de *Meissner* (*Die Hydraulik*, etc.), Iena-Costenoble.

1° Les turbines *axiales*, ou turbines du système Burdin ou Fontaine ;

2° Les turbines *radiales*, ou du système Fourneyron, qui comprennent deux genres différents : les turbines centrifuges, et les turbines centripètes ou de Francis.

Dans chacune des classes, les turbines peuvent être à injection partielle; lorsque, de plus, elles sont radiales et à arbre horizontal, on leur donne souvent le nom de roues tangentielles.

En ce qui concerne le fonctionnement, et avec une très grande analogie de dispositions, les turbines se distinguent, par le régime des pressions qui s'y établit, en turbines d'*action* et turbines à *réaction* [1]; les turbines d'action comprennent, comme cas particulier, la turbine à *libre déviation* de Girard.

39. — Pour éviter toute fausse interprétation de la théorie générale qui sera exposée plus loin, nous examinerons d'abord par quel mécanisme l'énergie emmagasinée dans l'eau sous forme de mouvement, est transformée en travail pendant son passage à travers les canaux de la turbine.

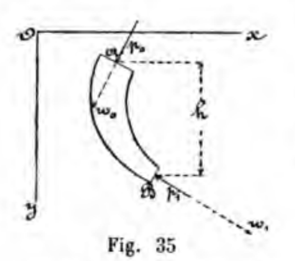


Fig. 35

Considérons un conduit à axe curviligne AB (fig. 35) de section transversale variable; supposons d'abord que ce conduit soit fixe et parcouru par le débit Q. Soient :

w_0, la vitesse dans la section d'entrée A;

w_1, la vitesse dans la section de sortie B;

s_0 et s_1, les sections ;

p_0 et p_1, l'excès sur la pression extérieure ou pression atmosphérique, des pressions qui règnent dans les sections A et B.

Lorsque le mouvement est devenu permanent, les vitesses et les pressions en un point quelconque conservent une valeur constante, il en est de même des réactions exercées par la paroi sur le liquide.

Appliquons à la masse AB, supposée isolée et soumise à son poids P, aux pressions p_0 et p_1 et aux réactions des parois, le principe de la

1. Ce terme, assez mal choisi, puisqu'il sert à caractériser le mode de fonctionnement du tourniquet hydraulique, qui n'est qu'une turbine imparfaite, a cependant prévalu pour désigner les turbines dans lesquelles la pression au joint diffère notablement des pressions extérieures. On emploie aussi en Allemagne l'expression *Druckturbine* pour turbine d'action, et *Ueberdruckturbine* pour turbine à réaction.

quantité de mouvement projetée sur les axes Ox et Oy, l'un horizontal, l'autre vertical.

Désignons par ΣX et par ΣY la somme des projections des réactions suivant les axes considérés; nous obtenons après simplification, et en donnant aux termes les signes qui conviennent au cas de la figure, les deux équations suivantes :

$$\Sigma X = \frac{\Pi Q}{g}(w_{1x} + w_{0x}) + (p_0 s_0)_x + (p_1 s_1)_x$$

$$\Sigma Y = \frac{\Pi Q}{g}(w_{1y} - w_{0y}) + (p_0 s_0)_y - (p_1 s_1)_y + P$$

ΣX et ΣY, étant les composantes de la réaction sur le liquide, sont égales, mais de signe contraire, à celles de l'action totale exercée sur la paroi.

Si le conduit, au lieu d'être fixe, était animé d'un mouvement uniforme dirigé parallèlement à l'axe des x et dans le sens négatif, il céderait à la composante $-\Sigma X$; la composante $-\Sigma Y$ ne pourrait évidemment faire aucun effet; les équations ci-dessus subsistent néanmoins, en y considérant w_0 et w_1 comme des vitesses relatives.

Avant d'aller plus loin, remarquons que notre raisonnement s'applique seulement au cas où la pression est nulle dans tout l'espace extérieur ; mais il est facile de voir que la pression atmosphérique, qui règne autour du vase, ne peut modifier le résultat ; en effet, on sait que l'ensemble des pressions p_a (fig. 36), qui s'exerce sur tout le pourtour du vase, peut être remplacé par les pressions égales (en trait pointillé) qui s'exerceraient sur les deux surfaces A et B; en posant les équations qui donnent les réactions ΣX et ΣY du vase sur le liquide, on remarquera que les pressions dans les sections A et B devront être diminuées de la pression atmosphérique, mais p_0 et p_1 représentent précisément l'excès de la pression d'entrée et de la pression de sortie sur la pression atmosphérique, etc...

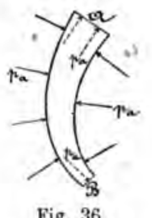


Fig. 36

La composante $-\Sigma Y$, qui agit verticalement sur le vase, augmente ou diminue la charge qu'il exerce sur son support, et, à ce titre, elle peut être intéressante à considérer, puisqu'elle doit entrer en ligne de compte dans le calcul de la résistance des pièces, et de la surface portante du pivot (84).

Dans toutes les turbines, si l'on en excepte le tourniquet hydraulique, les sections d'entrée et de sortie A et B sont parallèles à la direction de la vitesse d'entraînement, on a donc simplement :

$$\Sigma X = \frac{\Pi Q}{g}(w_{1x} + w_{0x})$$

$$\Sigma Y = \frac{\Pi Q}{g}(w_{1y} - w_{0y}) + p_0 s_0 - p_1 s_1 + P$$

D'ailleurs, même pour le tourniquet hydraulique, si l'on choisit la section d'entrée au niveau d'amont et si l'échappement se fait à l'air libre, on a :

$$p_0 = p_1 = o$$

Toutefois, nous nous bornerons à appliquer les equations ci-dessus au mouvement rectiligne déjà supposé, qui peut être assimilé à celui des canaux d'une turbine *axiale* [1] et énoncer le principe suivant :

La force motrice qui résulte du mouvement de l'eau sur les aubes, est proportionnelle à la fois au débit et au changement de la vitesse relative $(w_{1x} + w_{0x})$ *projetée sur la direction du mouvement.*

Ce changement peut résulter de modifications dans la grandeur de la vitesse relative, et dans sa direction, ou de l'une de ces deux causes seulement.

Ainsi, lorsque w_0 est normale à la direction du mouvement (conduit AB, fig. 37), on a :

Fig. 37

$$\Sigma X = \frac{\Pi Q}{g} w_{1x}$$

On trouve pour le conduit AB' un résultat identique, pourvu que la section de sortie soit la même dans les deux cas, ainsi que l'inclinaison de la vitesse de sortie sur la direction du mouvement.

1. Pour les turbines radiales, il faudrait, du reste, tenir compte de la force centrifuge composée.

Lorsque la projection de w_0 est en sens contraire de la direction du mouvement (fig. 38), il vient :

$$\Sigma X = \frac{\Pi Q}{g}(w_{1x} - w_{0x})$$

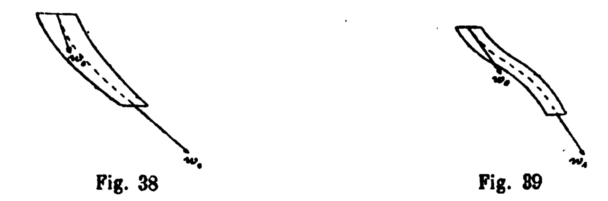


Fig. 38 Fig. 39

Enfin, lorsque w_1 est égale et parallèle à w_0 (fig. 39), il ne peut se produire *aucune force motrice* quelles que soient la courbure du canal ou même ses variations de section entre l'entrée et la sortie.

40. — *Expression du travail cédé.* — On obtient le travail cédé, en effectuant le produit de la composante motrice $-\Sigma X$, par la vitesse avec laquelle le conduit se déplace ; on pourrait donc établir la théorie des turbines au moyen du principe des quantités de mouvement projetées, mais le théorème des forces vives permet d'opérer directement sur les quantités d'énergie en jeu, et, comme dans tous les cas où les pertes sont nulles ou exactement connues, il conduit à l'expression du travail recueilli, sans qu'il soit nécessaire de passer par toutes les transformations intermédiaires.

41. — *Différence entre les turbines d'action et les turbines à réaction.* — Nous avons fait remarquer plus haut que la force motrice ne dépend, pour un volume donné, que du *changement de la projection de la vitesse relative* sur la vitesse d'entraînement, et que les pressions p_0 et p_1 ne figurent pas explicitement dans la valeur de ΣX ; quelque grande que soit la pression p_0 à l'entrée, comparativement à la pression p_1 à la sortie, il n'en résulte pas, sur les cloisons de la turbine, une action comparable à celle du liquide sur le piston des machines à colonne d'eau [1] ; l'influence de la pression se traduit autrement : tout excès $p_0 - p_1$ détermine, dans le canal mobile, un accroissement de la vitesse

1. *C. Bach.* — Ouvrage cité, p. 32.

de sortie, car, dans l'hypothèse très simple où nous nous sommes placés et où il n'y a pas à considérer de forces fictives, on a (fig. 35) :

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} + h$$

h étant la différence de niveau entre la section d'entrée et la section de sortie.

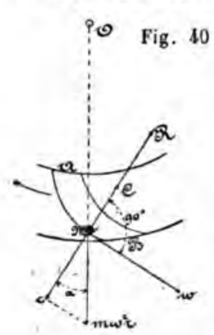
On voit que la pression exerce son influence sur w_1 et, par conséquent, sur le travail recueilli. On sera toujours libre d'augmenter p_0, car il suffit de donner à w_0 une valeur assez faible, résultat qui peut être amené par différents moyens.

En résumé, l'énergie de l'eau, au moment où elle entre dans la turbine, est formée de deux termes complémentaires, dont l'un dépend de la pression et l'autre de la vitesse. Dans les turbines d'*action*, la pression à l'entrée est faible (généralement celle de l'atmosphère), et l'énergie, reçue tout entière sous forme de mouvement, est utilisée par le changement de la vitesse relative projetée.

Dans les turbines à *réaction*, la vitesse de l'eau à l'entrée est plus faible, mais elle s'accélère dans le canal mobile.

Ces conditions de fonctionnement entrainent comme conséquence : des différences de tracés, de proportions ou d'allures, et les solutions qui en résultent conviennent à des cas pratiques déterminés. On ne devra cependant jamais perdre de vue que toutes ces solutions sont équivalentes, pourvu que la perte d'énergie par choc ou par frottement soit évitée, et que la force vive conservée par l'eau qui s'échappe soit la même.

42. *Cas où le canal possède un mouvement de rotation autour d'un axe normal à son plan.* — Lorsque le canal est disposé comme dans les turbines axiales, ce que nous avons dit est entièrement applicable, car la vitesse relative, étant en chaque point perpendiculaire au rayon mené par ce point, les forces fictives n'ont pas de projection suivant les axes choisis ; mais il n'en est pas de même dans les turbines radiales.


Fig. 40

Supposons que le conduit AB (fig. 40), dont les sections d'entrée et de sortie sont comprises entre deux couronnes cylindriques, tourne avec la vitesse ω

autour de l'axe vertical projeté en O. Pour chaque tranche élémentaire, concentrée par exemple au point M, les forces qui feraient parcourir à cette masse m sa trajectoire relative et qui, par conséquent, produiraient l'accélération du mouvement relatif, sont, pour la vitesse w :

1° La force centrifuge, $m\omega^2 r$ égale et contraire à la force d'entrainement du mouvement de rotation uniforme ;

2° La force centrifuge composée:

$$MC = 2 m \omega w$$

située ici dans le plan de la figure, perpendiculairement à la vitesse relative w et dont on trouve la direction en faisant tourner w de 90° en sens contraire du mouvement de rotation.

3° Et enfin, les forces réelles, au nombre desquelles il faut compter les pressions des aubes, qui agissent suivant une direction normale à leur courbure, les pressions des couches voisines qui agissent dans une direction tangentielle et la pesanteur qui reste sans effet sur le mouvement.

La réaction R du conduit, qui ne peut être que normale à la paroi, jointe à la composante Mc de la force centrifuge et à la force centrifuge composée MC doit donc produire, suivant le rayon de courbure de l'aube, une résultante égale à la force centrifuge du mouvement relatif; si ρ désigne le rayon de courbure de l'aube, on aura :

$$R + 2 m \omega w - m \omega^2 r \cos \alpha = m \frac{w^2}{\rho}$$

D'où :

$$R = \frac{m w^2}{\rho} + m \omega^2 r \cos \alpha - 2 m \omega w$$

Comme la force normale R est la seule force réelle, il n'en résultera de réaction motrice pour le conduit que si l'on a :

$$\frac{m w^2}{\rho} + m \omega^2 r \cos \alpha > 2 m \omega w$$

On aurait, dans le cas de la figure 41 (turbine centripète), en tenant compte du sens de la force centrifuge composée :

$$R + m \omega^2 r \cos \alpha - 2 m \omega w = m \frac{w^2}{\rho}$$

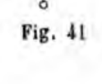


Fig. 41

D'où :

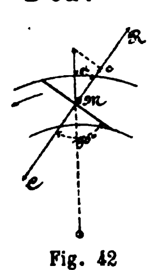


Fig. 42

$$R_1 = m\frac{w^2}{\rho} + 2m\omega w - m\omega^2 r\cos\alpha$$

En particulier, lorsque l'aube est droite (fig. 42)

$$R + m\omega^2 r\cos\alpha - 2m\omega w = o$$

D'où :

$$R = 2m\omega w - m\omega^2 r\cos\alpha$$

La force centrifuge composée est, en général, plus grande que la composante normale de la force centrifuge ; dans la roue Poncelet, on constate qu'à l'entrée elle a pour effet d'augmenter la pression motrice ; son action est nulle à la fin du mouvement ascendant; à la sortie, elle diminue la réaction normale de l'aube et peut même appliquer le liquide contre la face convexe de l'aube précédente, mais théoriquement, il ne pourrait résulter de ce fait aucune perte.

43. — *Effet du frottement de l'eau sur les aubes.* — Dans le canal courbe que nous avons déjà considéré (fig. 43), la réaction reste la même, pourvu que w_1 conserve la même valeur et la même inclinaison, mais elle diminue lorsque les vitesses diminuent, par exemple par l'effet du frottement que l'aube exerce sur le liquide ; sur chaque élément de la paroi, s'applique alors une force tangentielle, qui pour l'eau est $-F$, et pour l'aube $+F$. Appelons toujours ΣX la composante de l'action normale de la paroi sur le liquide, évaluée suivant l'axe Ox ; pour plus de simplicité, supposons que w_o soit verticale

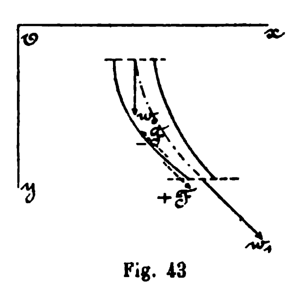


Fig. 43

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma X - \Sigma F_x = \frac{\Pi}{g} Q w_{1x}$$

ou

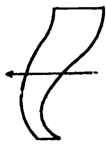
$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma X = \Sigma F_x + \frac{\Pi Q}{g} w_{1x}$$

La paroi reçoit une force égale et de sens contraire à ΣX, mais comme d'autre part, elle est soumise aux forces F, dirigées en sens contraire

du mouvement d'entraînement du canal, l'action motrice n'est en définitive que

$$\Sigma X - \Sigma F_x$$

et elle est donnée par le second membre de l'équation (1) ; on voit qu'à égalité de débit, l'action motrice ne peut être que diminuée par le frottement, puisqu'il a pour effet de réduire la valeur w_1. Il serait donc faux de dire que l'action nuisible du frottement provient de ce qu'il présente une composante opposée au mouvement d'entraînement du canal, et d'en conclure, par exemple, que l'on pourrait donner aux aubes la forme représentée figure 44, en vue d'augmenter les forces motrices, car la direction des forces de frottement sur la paroi n'est pas à considérer ; le frottement diminue toujours l'action motrice d'un poids d'eau donné, parce qu'il a pour effet de réduire w_1.


Fig. 44

§ I

THÉORIE GÉNÉRALE DES TURBINES [1].

44. — Les figures 45 et 46 représentent, dans leurs éléments essentiels, la turbine axiale et la turbine radiale disposées pour fonctionner comme turbines à réaction (le joint entre la partie fixe et la partie mobile est noyé sous le niveau d'aval). Dans les deux figures, la même lettre désigne des éléments similaires, *de* représente les directrices fixes, *ef* les aubes mobiles.

Soient :

H, la hauteur de chute ;

Q, le débit ;

h, la hauteur comprise entre le niveau d'amont et les orifices de sortie de l'appareil injecteur ;

1. Les fondements de cette théorie ont été établis par Poncelet en 1838 ; Weisbach, Redtenbacher et Combes l'ont développée. — Rühlmann, t. I, p. 360 à 394.

h_1, la quantité dont les orifices de sortie de la roue sont noyés sous le bief d'aval ;

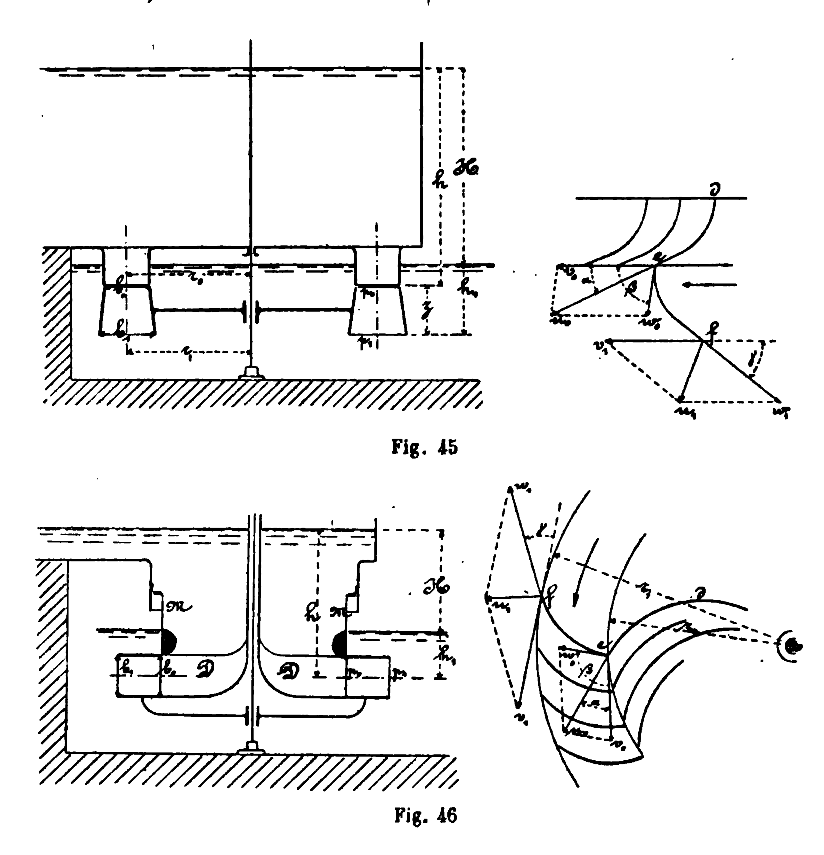


Fig. 45

Fig. 46

z, la hauteur de la turbine, (elle s'annule pour les turbines radiales) ;

p_0, p_1, les pressions, à l'entrée et à la sortie des canaux mobiles ;

b_0, b_1, la largeur des aubes mobiles, à l'entrée et à la sortie ; b_0 est aussi la largeur de l'appareil injecteur ;

r_0, r_1, les rayons moyens à l'entrée et à la sortie de la roue ; dans la plupart des turbines axiales, $r_0 = r_1$;

α, l'angle formé par les directrices avec le plan des orifices ;

β, l'angle formé par l'élément d'entrée des aubes avec le plan des orifices ;

γ, l'angle formé par le dernier élément des aubes avec la vitesse d'entrainement à la sortie ;

u_o, v_o, w_o, les vitesses (absolue, d'entrainement, relative) à l'entrée ;
u_1, v_1, w_1, les vitesses à la sortie ;
ω, la vitesse de rotation ;
p_a, la pression atmosphérique.

Lorsqu'une turbine fonctionne d'une manière satisfaisante, il existe entre ces éléments un certain nombre de conditions que nous allons exprimer :

Pour le mouvement du liquide depuis le niveau d'amont jusqu'à la sortie de l'appareil injecteur, l'équation de Bernoulli donne :

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{p_o}{\Pi} = \frac{u_o^2}{2g}$$

A l'entrée sur l'aube, en e, on a, par le triangle des vitesses :

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad w_o^2 = u_o^2 + v_o^2 - 2\, u_o v_o \cos \alpha$$

La vitesse w_{ι}, ainsi calculée, n'est entièrement conservée sur le premier élément de l'aube que lorsque celle-ci est tangente à la direction de la vitesse relative, le choc à l'entrée est alors évité, et comme cette condition est inséparable de celle du maximum de rendement, nous la supposons réalisée, l'angle β devra être déterminé en conséquence.

Sous l'influence des forces du mouvement absolu, ainsi que des forces fictives à introduire pour tenir compte de la rotation du système de comparaison [1], la vitesse relative w_o devient w_1; nous obtiendrons l'équation du mouvement relatif sur l'aube, en écrivant que la moitié de l'accroissement, pendant le temps dt, de la force vive d'un filet liquide contenu dans la turbine, est égale à la somme des travaux, pendant le même temps : de la pesanteur, des pressions à l'entrée et à la sortie, et de la force centrifuge, qui est ici la force fictive à considérer.

La moitié de l'accroissement de la force vive, évaluée dans le mouvement relatif, sera, pendant le temps dt, pour le filet dont le débit serait q par seconde :

$$\frac{1}{2} \frac{\Pi}{g} q \, dt \; (w_1^2 - w_o^2)$$

1. Parmi les forces du mouvement absolu, nous ne devrons considérer, dans l'application du théorème des forces vives, que la pesanteur, attendu que, si on néglige le frottement, la réaction des aubes est normale à la vitesse relative; parmi les forces fictives, nous ne devrons tenir compte que de la force centrifuge, puisque la force centrifuge composée est normale à la vitesse relative.



La somme algébrique des travaux de la pesanteur, ainsi que des pressions à l'entrée et à la sortie, est :

$$\Pi\, q\, dt \left(z + \frac{p_0 - p_1}{\Pi}\right)$$

Le travail de la force centrifuge sur tout le filet, pendant le temps dt, a pour expression :

$$\frac{\Pi}{g} q\, dt \int_{r_0}^{r_1} \omega^2\, r dr = \frac{\Pi}{2g} q\, dt\, (v_1^2 - v_0^2)$$

En simplifiant, on obtient finalement l'équation :

$$(3) \ldots \ldots \quad \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + z + \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p_1}{\Pi} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

On a, par le triangle des vitesses à la sortie :

$$u_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2\, v_1\, w_1 \cos \gamma$$

ou

$$(4) \ldots \ldots \quad u_1^2 = (v_1 - w_1)^2 + 4\, v_1 w_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

Lorsqu'on néglige le frottement sur les aubes, la seule force vive perdue dans le parcours de l'eau correspond à la vitesse absolue u_1 avec laquelle elle est abandonnée à l'aval, il ne serait possible d'annuler u_1 qu'en faisant dans l'équation ci-dessus

$$(5) \ldots \ldots \ldots \quad v_1 = w_1$$

et

$$\gamma = 0$$

Mais de ces deux égalités, nous ne retiendrons que l'équation (5), car la condition $\gamma = 0$, si elle était réalisée, rendrait le dégorgement impossible. On doit donc renoncer à recueillir le maximum absolu du travail, et accepter à la sortie une vitesse très faible.

Les auteurs allemands remplacent l'équation (5), qui est celle de la théorie de Poncelet, par la condition un peu différente,

$$v_1 = w_1 \cos \gamma,$$

qui donne à la vitesse absolue de sortie une direction normale à la vitesse d'entraînement ; cette condition ne peut être justifiée immédiatement.

Puisque la vitesse de sortie est très faible [1], la pression s'établit dans le bief d'aval suivant la loi hydrostatique, et l'on a :

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{p_1}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h_1$$

En exprimant que le volume distribué par l'appareil injecteur est le même que celui qui sort de la turbine, et en tenant compte de l'équation (5), il vient :

$$2\pi b_0 r_0 u_0 \sin\alpha = 2\pi b_1 r_1 v_1 \sin\gamma$$

ou

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{u_0 \sin\alpha}{v_1 \sin\gamma} = \frac{b_1 r_1}{b_0 r_0}$$

On a encore, puisque la turbine est un système tournant autour d'un axe

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{v_0}{v_1} = \frac{r_0}{r_1}$$

Les équations (1) (2), (3), (5) et (6), donnent, par leur combinaison, une *condition fondamentale* entre les éléments $u_o v_o$ et α ; en remarquant, du reste, que les éléments h, z, h_1 H sont liés par la relation

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad h + z = H + h_1$$

cette condition s'écrit :

$$(A) \qquad u_0 v_0 \cos\alpha = g H$$

1. On a songé néanmoins à récupérer le travail dû à cette vitesse par l'emploi de diffusoirs, analogues en principe à la cheminée évasée du ventilateur de Guibal. — Meissner, *Die Hydraulik und die hydraulischen Motoren*. — Iena, Costenoble, 1878, t. II, p. 725.



En introduisant, dans l'équation (8), la valeur v_1 tirée de (7), et en substituant v_0 dans l'équation (A), on obtient :

$$(B) \qquad u_0^2 = g \frac{b_1 r_1^2}{b_0 r_0^2} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \cos \alpha} H$$

En éliminant, au contraire u_0 dans la condition fondamentale, il vient :

$$(C) \qquad v_0^2 = g \frac{b_0 r_0^2}{b_1 r_1^2} \frac{tg\, \alpha}{\sin \gamma} H$$

La valeur u_0 de l'équation (B), substituée dans l'équation (1), permet de trouver la pression p_0 qui s'établit entre la partie fixe et la partie mobile de la turbine :

$$(D) \qquad \frac{p_0}{\Pi} = h + \frac{p_a}{\Pi} - \frac{b_1 r_1^2 \sin \gamma}{b_0 r_0^2 \sin 2\alpha} H$$

Pour trouver le rendement U, de la turbine, abstraction faite de tout frottement, il faut prendre le rapport entre le travail recueilli :

$$\Pi Q \left(H - \frac{u_1^2}{2g}\right)$$

et la puissance absolue de la chute, il vient donc :

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U = 1 - \frac{u_1^2}{2g H}$$

en se servant des équations (4), (5) et (C), on obtient

$$(E) \qquad U = 1 - \frac{b_0}{b_1} tg\, \alpha\; tg \frac{\gamma}{2}$$

Le volume débité par la turbine sera :

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad Q = 2\pi\, b_0\, r_0\, u_0 \sin \alpha$$

ou, à cause de (B) :

$$(F) \qquad Q = 2\pi r_1 \sqrt{b_0 b_1 \sin \gamma\, tg\, \alpha}\, \sqrt{gH}$$

(Dans tout ce qui précède, les égalités désignées par les lettres (A), (B), (C), (D), (E), (F), expriment des *résultats*, mais ne traduisent aucune propriété qui ne soit implicitement contenue dans le groupe des 11 équations désignées par des numéros).

L'équation (E) montre que le rendement ne dépend que d'un nombre très restreint d'éléments, parmi lesquels γ peut être choisi à l'avance par des considérations d'ordre pratique ; il nous reste d'ailleurs à exprimer une condition qui a pour effet, comme nous le verrons, de limiter le nombre des valeurs admissibles pour α.

La pression p_o, équation (D), qui s'établit dans une turbine donnée fonctionnant à la vitesse v_o qui convient d'après l'équation (C) à ses proportions et à la hauteur H, est différente, en général, de la pression atmosphérique ; cette pression peut être modifiée par un choix convenable des éléments de construction qui figurent dans le second membre, mais, en aucun cas, on ne peut avoir pour p_o une valeur négative ; ce résultat indiquerait que le fonctionnement ne peut avoir lieu conformément à l'hypothèse qui a conduit aux équations. On tire donc, de l'égalité (D), la condition :

$$\frac{b_1 r_1^2 \sin \gamma}{b_o r_o^2 \sin 2\alpha} \mathrm{H} \leqq h + \frac{p_a}{\Pi} \tag{12}$$

Cette équation montre que l'angle α ne peut avoir des valeurs voisines de 0, ni de 90° ; pour cette raison, $tg\,\alpha$ conserve une valeur notable. Les turbines d'action et les turbines à réaction diffèrent par la valeur de la pression p_o qui s'établit entre la partie fixe et la roue.

45. — Les équations (1) à (12) et les résultats (A) à (F), utiles à considérer pour établir certaines propriétés générales, renferment trop d'éléments pour être d'un emploi commode ; dans l'établissement des turbines, on détermine de proche en proche, et par une marche très naturelle, une partie des longueurs et des angles qui figurent dans les formules ; nous rencontrerons des exemples d'applications dans l'analyse qui va suivre des diverses variétés de turbines comprises dans la classification du n° 38.

Nous ne devrons jamais perdre de vue que, pour toute turbine fonctionnant d'une manière satisfaisante, il faut, d'abord, que l'équation fondamentale (A), soit satisfaite :

$$u_o v_o \cos \alpha = g\mathrm{H} \tag{A}$$



En outre, il faut que l'aube soit tangente à la vitesse relative w_o, ce qui conduit, par le triangle des vitesses à l'entrée, à l'équation :

$$(13) \qquad v_o = u_o \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$$

L'élimination de v_o, puis de u_o, entre ces deux équations, fournit les deux égalités suivantes :

$$(A') \qquad u_o = \sqrt{gH \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)\cos \alpha}}$$

$$(A'') \qquad v_o = \sqrt{gH \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)}$$

On voit que, pour des valeurs de α et β choisies à l'avance, les relations (A') et (A'') permettent de déterminer immédiatement les vitesses u_o et v_o qui doivent être réalisées.

§ II.

TURBINES AXIALES FONCTIONNANT COMME TURBINES D'ACTION, OU DANS LESQUELLES LE DEGRÉ DE RÉACTION EST FAIBLE

46. — *Turbines à joint noyé.* — Ces turbines appartiennent au type représenté (fig. 45) ; comme le joint qui existe entre l'appareil injecteur et la roue ne saurait être étanche, et que des rentrées d'eau, en amenant dans la turbine des vitesses différentes de celles que l'on a prévues, produiraient des pertes d'effet utile, on doit faire en sorte que la pression p_o soit égale ou supérieure à celle qui règne dans le bief, à la même hauteur ; comme, dans ce dernier cas, on a une turbine à réaction, nous n'examinerons ici que le premier, c'est-à-dire celui où l'on a :

$$\frac{p_o}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - H$$

condition qui, introduite dans l'équation (1) donne :

$$u_o = \sqrt{2gH}$$

ce qui entraine, eu égard à l'équation (A') :

$$\beta = 2\alpha$$

Il est facile de voir que toute valeur de β inférieure à 2α, serait inadmissible, car en diminuant β dans l'équation (A"), on agit dans le même sens sur v_0; d'après la relation (A), on augmenterait donc u_0, c'est-à-dire qu'on diminuerait p_0 [équation (1)].

Réciproquement, toute valeur de β plus grande que 2α, en diminuant u_0, augmenterait p_0, ce qui nous conduirait à une turbine à réaction.

On doit donc admettre $\beta = 2\alpha$, ce qui donne :

$$v_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gH}{2}}$$

L'équation (A") indique, d'une manière générale, que v_0 varie dans le même sens que β; la turbine considérée, dans laquelle β a reçu sa valeur limite inférieure, est donc celle dont la marche est la plus lente.

D'ailleurs, l'équation fondamentale (A), dans laquelle H et α sont supposés constants, est celle d'une hyperbole équilatère (1) et peut traduire graphiquement (fig. 47) la loi de variation simultanée de u_0 et v_0.

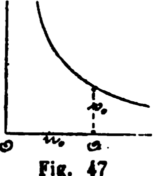


Fig. 47

En portant en abscisse une quantité

$$OA = \sqrt{2gH}$$

on trouvera l'ordonnée v_0.

Il est facile de voir, d'après les valeurs trouvées, que les éléments u_0, v_0, α, sont reliés par la construction indiquée fig. 48 ; ayant porté, suivant la tangente à la directrice, la valeur

$$EP = u_0$$

on élève, au point milieu M, la perpendiculaire MN, on obtient :

$$v_0 = EN$$

1. Cette remarque est due à M. C. Bach (ouvrage cité). Nous empruntons à cet auteur la marche suivie dans cet exposé, et qui consiste à augmenter progressivement β pour trouver des turbines fonctionnant de plus en plus par réaction.

NP est, par conséquent, la vitesse relative en grandeur et direction, ce qui permet de tracer le premier élément de l'aube.

Pour le cas qui nous occupe, on a :

$$r_0 = r_1$$

et

$$v_0 = v_1$$

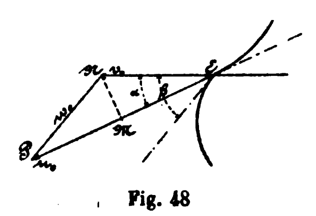
En tenant compte des valeurs de u_0 et v_0, on obtient par l'équation (7) :

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\gamma}$$

et le rendement devient :

$$U = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos^2\alpha}$$

Dans le cas particulier où $\gamma = \alpha$, on constate que les quantités b_1 et b_0 sont dans le même rapport que les vitesses u_0 et v_0 (fig. 48) ; on peut en conclure que l'évasement des couronnes est très prononcé, surtout lorsque l'angle α est faible.


Fig. 48

On adopte d'ordinaire :

$$\alpha = \gamma = 15 \text{ à } 25°$$

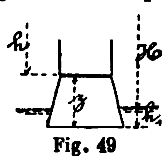
d'où :

$$\beta = 30 \text{ à } 50°$$

et

$$b_1 = 1{,}93\,b_0 \text{ à } 1{,}81\,b_0$$

Lorsque le joint est à fleur d'eau, toute la théorie ci-dessus est applicable, on a alors $h = H$, et la pression dans le joint est égale à la pression atmosphérique ; la turbine fonctionne donc rigoureusement comme turbine d'action, tandis que lorsque le joint est noyé, elle comporte toujours un degré très faible de réaction, puisque la pression dans le joint est supérieure à la pression atmosphérique.


Fig. 49

47. — *Turbine partiellement noyée.* — Le joint est au-dessus du niveau d'aval (fig. 49), on doit avoir :

$$p_0 = p_a$$

et par conséquent [éq. (1)]:

$$u_0 = \sqrt{2gh}$$

On pourrait vérifier que l'on n'a plus ici rigoureusement :

$$\beta = 2\alpha$$

On tire de l'équation fondamentale :

$$v_0 = \frac{1}{\cos\alpha} \frac{gH}{\sqrt{2gh}}$$

et l'équation (7) donne :

$$\frac{b_1}{b_0} = 2 \frac{h}{H} \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sin\gamma}$$

L'équation (E) fournit, pour le rendement :

$$U = 1 - \frac{H}{h} \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos^2\alpha}$$

Cette valeur est inférieure à celle déjà trouvée pour la turbine à joint noyé (46) ; nous voyons qu'il convient, par conséquent, de placer le joint soit au niveau d'aval, soit en dessous de ce niveau.

48. — *Détermination des dimensions, tracé des directrices.* — Pour passer de la théorie exposée aux conditions réelles, il y a lieu de tenir compte :

1° des pertes de charge depuis le niveau d'amont jusqu'aux orifices de l'appareil injecteur ;

2° de la perte d'eau par le joint, perte qui toutefois est très réduite ou annulée dans les turbines d'action ;

3° de la perte de charge dans les canaux de la turbine.

Cette étude [1] présente beaucoup d'éléments incertains, nous adopterons une solution simplifiée, qui consiste à réduire, au moyen d'un cer-

1. Ces diverses pertes ont été analysées minutieusement par Weisbach et par Redtenbacher; elles sont toujours prises en considération par les auteurs modernes V. Meissner, Bach (ouvrages cités) et Herrmann. — *Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen*. – Berlin, Leonhard Simion. — 1887.



tain coefficient, la hauteur motrice H; nous tiendrons compte ainsi des pertes qui se produisent jusqu'à l'entrée de l'eau dans la partie mobile.

Ce coefficient peut être calculé à peu près exactement dans des cas spéciaux, par exemple lorsque l'eau est amenée par de longues conduites cylindriques, comme dans les turbines établies sur de hautes chutes; mais, pour les applications ordinaires, on peut affecter simplement la hauteur H d'un coefficient plus petit que 1 dans toutes les formules exprimant le débit; il n'y a pas lieu d'introduire un coefficient de contraction, attendu que l'eau sort de l'appareil injecteur et passe dans la turbine en filets sensiblement parallèles, mais il faut tenir compte de l'obstruction produite par l'épaisseur des aubes.

Nous négligerons le frottement sur les aubes, qui a nécessairement pour effet d'abaisser le rendement théorique, mais l'expression de ce rendement, très utile pour comparer entre elles les diverses dispositions qui se présentent, n'a aucune portée pratique; il faut toujours, dans le calcul des dimensions, opérer assez largement pour que la turbine écoule le volume d'eau sur lequel on peut compter, et se ménager, par un vannage bien disposé, le moyen de régler exactement le débit; si la turbine, lorsque le vannage est entièrement découvert, écoulait un volume d'eau inférieur à Q, il n'y aurait d'autre remède à cette situation que le surélèvement du niveau d'amont.

Voici, d'après ces principes, la marche qu'il convient de suivre pour établir une turbine d'action du genre axial.

Les données sont : les éléments de la chute Q, H, et quelquefois, mais avec une certaine élasticité, le nombre de tours par minute; on doit éviter d'adopter des roues de trop grand diamètre, car il y a tout avantage à les couler d'une seule pièce si l'on veut éviter les difficultés de la jonction entre les segments.

Soient :

$$Q = 2^{m^3},00$$

$$H = 2^{m},50$$

Cette hauteur sera réduite dans toutes les formules, et remplacée par la hauteur fictive $H_1 = 0,81$ H.

Le coefficient de réduction affectant la vitesse sera $\sqrt{0,81}$ ou 0,9 et l'on aura :

$$u_0 = 0,9\sqrt{2gH} = 6^m,30$$

Soit $\alpha = 25°$, et adoptons pour l'écartement e des aubes, compté d'axe en axe, sur la circonférence moyenne :

$$e = \frac{1}{2} b_0$$

On choisit, d'ordinaire, pour le rapport $\frac{b_0}{r_0}$ la valeur :

$$\frac{b_0}{r_0} = 0,2 \text{ à } 0,4$$

Le coefficient le plus faible convient aux volumes réduits et aux fortes hauteurs de chute ; pour des hauteurs modérées, il conduirait à un rayon trop grand, c'est affaire d'appréciation de déterminer, dans chaque cas, la valeur la plus convenable.

La hauteur z de la couronne est choisie de manière à donner à l'aube une courbure modérée, elle diffère peu en général de la largeur b_0,

$$z = b_0$$

La hauteur des directrices est 0,8 z.
Soit ici :

$$\frac{b_0}{r_0} = 0,3$$

le nombre des aubes sera :

$$n = \frac{2\pi r_0}{e} = 42$$

Leur épaisseur, lorsqu'elles sont en tôle, est de 5 à 8 millimètres ; en adoptant 6 millimètres, on trouvera, pour la section de l'appareil injecteur :

$$(2\pi r_0 \sin\alpha - 42 \times 0,006)\, b_0$$

La section, multipliée par la vitesse u_0, doit donner le débit Q ; on trouve donc, pour r_0 :

$$r_0 = 0{,}68 \text{ environ}$$

$$b_0 = 0{,}204$$

$$e = \frac{2\pi r_0}{42} = 0{,}1017$$

Pour la turbine, on adopte un nombre d'aubes différent de celui des directrices, afin d'éviter la discontinuité qui résulterait de la coïncidence simultanée de toutes les cloisons fixes et mobiles et qui se reproduirait 42 fois pendant chaque révolution ; on adoptera donc 41 aubes, et leur écartement d'axe en axe sera :

$$e' = \frac{2\pi r_0}{41}$$

Soit $\gamma = \alpha = 25°$, on aura

$$b_1 = 2b_0 \cos \alpha = 0.370$$

Pour tracer les directrices, on adopte un profil rectiligne sur la longueur AB (fig. 50), le point B étant le pied de la perpendiculaire abaissée

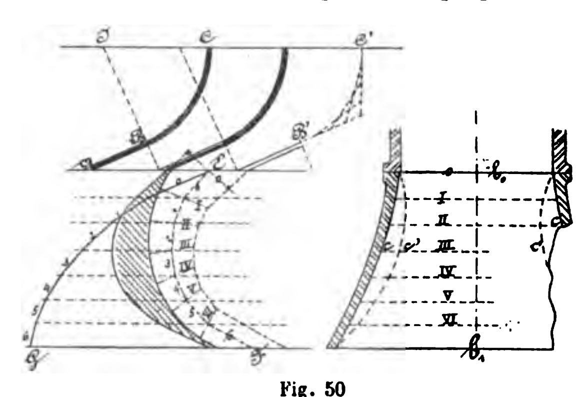


Fig. 50

de l'extrémité de la directrice suivante ; on donne à BC un contour en arc de cercle dont le centre I est choisi dans le plan renfermant les arêtes supérieures des directrices ; on peut aussi adopter le contour parabolique B'C'.

49. — *Tracé des aubes.* — Le tracé des aubes reste en partie indéterminé, car, pourvu que le changement de section des canaux mobiles reste continu, on peut accepter toute forme compatible avec les largeurs b_0 et b_1 ainsi qu'avec les angles β et γ.

M. Vallet [1] profite de cette indétermination pour s'imposer la loi de variation de la vitesse absolue entre E et G, et celle de la vitesse relative entre E et F; ainsi, pour la turbine considérée, on a:

$$w_1 = v_1$$

$$w_0 = v_0$$

et, puisque $v_1 = v_0$:

$$w_0 = w_1$$

la vitesse relative de sortie est donc égale à la vitesse relative à l'entrée, et l'on peut adopter, pour les canaux, des sections telles que toutes les vitesses intermédiaires soient égales à w_0 ou w_1; quant à la vitesse absolue sur la trajectoire EG, encore inconnue, elle diminue de u_0 à u_1, en cédant à la turbine la quantité d'énergie.

$$\frac{\Pi Q}{2g}(u_0^2 - u_1^2)$$

M. Vallet fait en sorte que, pour des zones d'égale hauteur, l'énergie cédée soit la même; si on a partagé la hauteur en n zones, la variation du carré de la vitesse absolue doit être, pour chacune d'elles:

$$\frac{u_0^2 - u_1^2}{n}$$

ce qui permet de trouver les vitesses successives u' u'', etc... en posant:

$$u_0^2 - u'^2 = u'^2 - u''^2 = \; . \; . \; . \; . = \frac{u_0^2 - u_1^2}{n}$$

En prenant des points de subdivision suffisamment nombreux, on peut appliquer à chaque zone la vitesse absolue trouvée pour le point précédent.

Pour le cas particulier qui nous occupe, on établit facilement le mode

1. Lucien Vallet. — *Principes de la Construction des Turbines.* — Paris, J. Dejey et Ce, 1875.



de construction suivant : il s'agit, par exemple, de trouver l'élément 2 de la trajectoire relative partant du point II ; on construit le triangle des vitesses MNP (fig. 51), dans lequel NM représente la vitesse d'entrainement v (qui est la même pour toutes les zones) ; MP est la vitesse relative constante, elle est donc connue en grandeur ; enfin, NP est la vitesse absolue, calculée d'après le procédé indiqué plus haut, pour la 3e zone, à laquelle nous appliquons la vitesse trouvée pour le point II ; les trois côtés du triangle étant connus, et la direction NM étant horizontale, on voit que les éléments 2 des trajectoires peuvent être tracés. En opérant de proche en proche à partir du point E, on obtiendra les contours EF, EG du chemin relatif et du chemin absolu d'un filet, à la condition que les points soient suffisamment rapprochés.

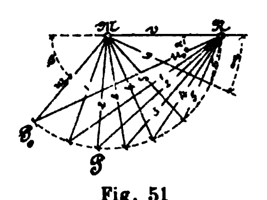


Fig. 51

Pour achever le tracé des canaux, on détermine le profil *cc* des couronnes, (fig. 50), en leur donnant un évasement continu depuis la section d'entrée b_0, jusqu'à la section de sortie b_1, dont la largeur a été calculée ; la section transversale, normale à la vitesse relative, doit être constante. On déduit, de cette condition, les largeurs I, II, etc... mesurées normalement à la trajectoire relative ; il est donc facile de tracer le contour de la veine liquide, et par conséquent, les faces concave et convexe de chacune des aubes. En opérant ainsi, on obtiendra en même temps la section transversale des cloisons, dont l'épaisseur est variable.

On aurait pu donner, au profil intérieur des couronnes, la forme *c'*, et obtenir pour les cloisons une épaisseur constante, mais ce mode de construction n'est pas à recommander ; pour éviter les remous, il faut en effet éviter toute variation rapide des *éléments* de la section.

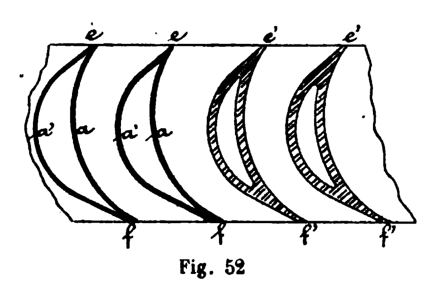


Fig. 52

Les aubes peuvent être massives et venues de fonte en même temps que les couronnes comme l'indique la figure 50. Lorsqu'elles sont en tôle, on les forme de deux épaisseurs *aa'*, mises en place dans le moule avant la coulée (fig. 52) ; on peut aussi réaliser des aubes en fonte *e'f'*, en y ménageant des creux [1],

1. Les aubes à doubles parois ont été imaginées par Hanel en 1858. — Rühlmann (ouvrage cité), tome I, p. 387.

On rencontre des turbines dans lesquelles, tout en adoptant pour les couronnes un profil à évasement continu, on réalise les aubes au moyen de cloisons en tôle $e''f''$ (fig. 53), noyées dans le moule avant la coulée; ce système est le plus facile à exécuter, mais il présente des inconvénients, car: ou bien la masse xyz participe au mouvement relatif (en ralentissant d'abord w, puis en lui restituant sa valeur primitive), ou bien elle est inerte, et absorbe, par ses tourbillonnements, une certaine quantité de force vive; dans les deux cas, le fonctionnement est moins satisfaisant.

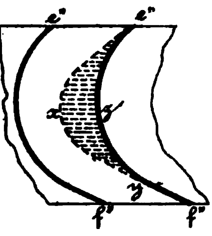


Fig. 53

On remarquera qu'il n'y a guère lieu de tenir compte de l'obstruction des aubes dans la turbine, car leur nombre diffère toujours très peu de celui des directrices; la réduction proportionnelle de section qu'elles apportent à la sortie est la même, à épaisseur normale égale, que celle produite dans l'appareil injecteur par les cloisons fixes, attendu que l'on a

$$\gamma = \alpha$$

Pour faciliter l'insertion de la veine dans la partie mobile, et corriger de légers défauts de centrage, on doit avoir soin, dans l'exécution, principalement lorsqu'il s'agit de grandes turbines, de donner un peu plus de largeur (quelques millimètres), à l'entrée de la partie mobile qu'à la sortie de l'appareil injecteur.

§ III

TURBINES DE JONVAL, OU DE HENSCHEL [1], FONCTIONNANT COMME TURBINES D'ACTION.

50. — Ces turbines sont établies en un point intermédiaire de la chute, sans toutefois qu'une partie de celle-ci soit perdue, car l'eau sortant de

1. D'après les recherches de Rühlmann (ouvrage cité), p. 378-379, Henschel aurait produit sa turbine en 1837; celle de Jonval, identique, en principe, ne daterait que de 1841. On a réalisé de très grandes turbines d'après ce type; on peut citer, parmi les plus remarquables, celles établies à la perte du Rhône, à Bellegarde.

la partie mobile descend, sous le niveau d'aval, dans un gros conduit fermé, ce qui permet à cette partie de la colonne d'agir par aspiration; la disposition en question réduit la longueur de l'arbre et facilite la visite de la turbine, qui peut être mise à sec par désamorçage.

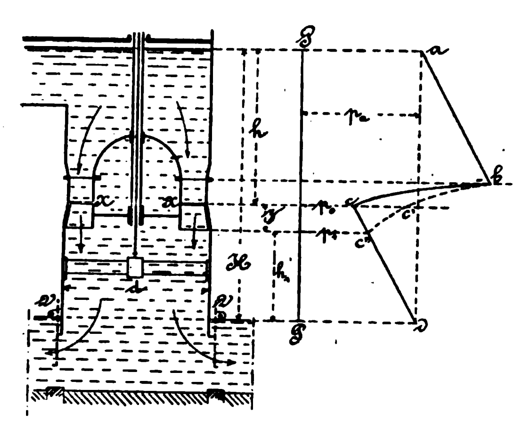


Fig. 54

La théorie exposée au paragraphe II est entièrement applicable ici; on devra remarquer seulement que la quantité désignée par h_1 dans le type général, devient négative, et que la hauteur mesurant la pression dans la partie centrale, au niveau de la section d'entrée XX (fig. 54), est

$$\frac{p_a}{\Pi} - (z + h_1)$$

car, par suite du mouvement très lent de la colonne d'aval, la pression suit la loi hydrostatique.

Pour que la pression dans le joint soit égale à celle qui règne au même niveau dans la chambre intérieure, on doit avoir:

$$\frac{p_o}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - (z + h_1)$$

ou

$$\frac{p_o}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \text{H}$$

attendu que

$$z + h_1 = \text{H} - h$$

L'équation (1) devient donc, comme pour les turbines à joint noyé:

$$\frac{u_0^2}{2g} = H$$

En remarquant que $v_1 = v_0$, puisqu'il s'agit d'une turbine axiale, et en tenant compte des valeurs de p_0 et p_1, l'équation (3) donne:

$$w_1 = w_0$$

Toutes les relations des turbines établies sous le niveau d'aval sont donc applicables à celle du type Jonval. La figure 55 indique la disposition générale d'une grande turbine; l'axe peut aussi être placé horizontalement (fig. 56) (¹).

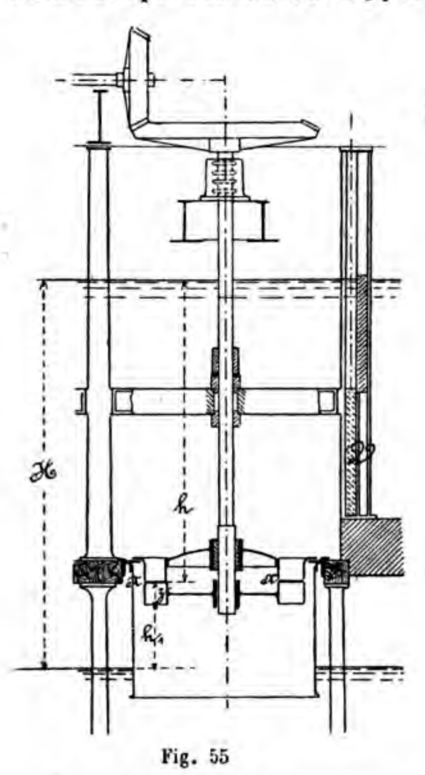


Fig. 55

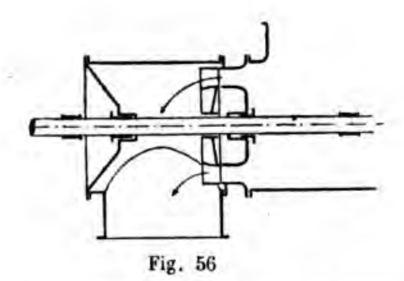


Fig. 56

51. — *Limite de la hauteur* $h_1 + z$. — La hauteur $h_1 + z$ a pour limite théorique la colonne d'eau barométrique, mais doit être maintenue pratiquement en dessous de 10 mètres, à cause de l'air tenu en disso-

1. On peut, en ce cas, annuler la poussée horizontale sur l'arbre en plaçant sur le même axe deux turbines identiques, mais dans lesquelles le mouvement de l'eau est dirigé en sens contraire. (Ce dispositif, connu depuis longtemps, est encore employé aujourd'hui, et notamment par H. Queva et Cie, à Erfurt).
Voir dans *Praktische M. C.*, 1881, p. 161, une turbine Jonval, à arbre horizontal, établie sur une chute de 12m,500.

lution dans l'eau, dont le dégagement est favorisé par la réduction de pression, et à cause des rentrées, qu'il est difficile d'éviter d'une manière absolue. Bach donne comme limite pratique :

$$h_1 \leq \frac{1}{0.11 + 0.055d}$$

d est le diamètre de la colonne d'aval.

52. — *Loi des pressions.* — On peut représenter graphiquement la loi des pressions qui s'établit pendant le fonctionnement d'une turbine Jonval. Soit PP (fig. 54), l'axe à partir duquel ces pressions sont comptées horizontalement pour chaque niveau; portons en abscisse la pression atmosphérique p_a constante, nous obtenons en Pa la pression sur la surface d'amont, et en Pd la pression sur la nappe d'aval, au niveau du canal de fuite. Dans la colonne d'amont, la pression varie suivant la loi hydrostatique ab, jusqu'au moment où les directrices, en étranglant la section, augmentent la vitesse; la pression diminue alors suivant la loi bc (qu'on pourrait déterminer), la pression dans le joint est donnée par p_o.

Dans la colonne d'aval, la pression varie d'après la loi hydrostatique depuis le point d, c'est-à-dire qu'elle est donnée par la loi dc'' (parallèle à ab), jusqu'à la sortie des canaux mobiles; lorsque ceux-ci sont tracés de manière à maintenir constante la vitesse relative, la loi des pressions, dans la partie mobile, est la ligne droite $c''c$, formant le prolongement de dc''.

N. B. — Les turbines Jonval sont ordinairement à réaction (§ VI).

§ IV

TURBINES A LIBRE DÉVIATION, DE GIRARD.

53. — Dans les turbines d'action proprement dites, le tracé des aubes est fait de manière à ce que la pression au joint diffère très peu de la pression extérieure (la pression atmosphérique pour le cas d'une turbine partiellement noyée); mais la veine, partout en contact avec les parois, est forcée, dans son mouvement, à prendre la forme du conduit; si, de

plus, les conditions de fonctionnement étaient changées, il en serait de même de la pression dans le joint. MM. C. Callon et D. Girard ont eu l'idée de donner aux canaux mobiles une section assez grande pour que l'eau ne soit en contact qu'avec la face concave de l'aube, et d'assurer la communication entre l'espace non occupé et le milieu extérieur ; dans ces conditions la pression qui s'établit est connue avec certitude, et il ne peut y avoir ni crachements d'eau, ni rentrées d'air. Mais il est évident que la turbine *ne peut être noyée*, car l'eau inerte viendrait remplir l'espace resté libre dans les canaux; il est évident aussi que la turbine ne peut être établie au-dessus de l'eau (1) sans qu'il en résulte une perte de chute ; nous devrons donc supposer que l'orifice de sortie des canaux mobiles se trouve au niveau d'aval.

On peut poser ici immédiatement :

$$\frac{u_0^2}{2g} = H - z$$

$$w_0^2 = v_0^2 + u_0^2 - 2u_0 v_0 \cos \alpha$$

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + z$$

La condition du maximum de rendement :

$$w_1 = v_1$$

et l'égalité

$$v_1 = v_0$$

combinées avec les équations précédentes, donnent la relation fondamentale

$$u_0 v_0 \cos \alpha = gH$$

Mais, u_0 étant connu :

$$u_0 = \sqrt{2g(H - z)}$$

On en tire immédiatement v_0 :

$$v_0 = \frac{gH}{\cos \alpha \sqrt{2g(H - z)}}$$

1. A moins de recourir à la disposition hydropneumatique (54).

On a, du reste, par l'équation (13) :

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} = \frac{v_0}{u_0} = \frac{H}{2(H - z)\cos\alpha}$$

On voit que β n'est plus ici égal à 2α; on peut du reste calculer w_0 au moyen de l'équation (2), et constater que :

$$w_0 < v_0$$

ce qui montre que :

$$\beta > 2\alpha$$

On trouve facilement u :

$$u_1 = 2v_0 \sin\frac{\gamma}{2}$$

et, en tenant compte de la valeur de v_0 :

$$\frac{u_1^2}{2g} = \frac{2g\,H^2}{H - z}\,\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\alpha}$$

Le rendement devient :

$$U = 1 - \frac{u_1^2}{2gH} = 1 - \frac{H}{H - z}\,\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\alpha}$$

Cette expression est la même que celle déjà trouvée au numéro 47 pour les turbines partiellement noyées, dans lesquelles on aurait :

$$h = H - z$$

c'est-à-dire dont le dégorgement se ferait au niveau d'aval.

Il semble donc que la turbine à libre déviation soit un peu inférieure aux turbines d'action ayant le joint à fleur d'eau; mais le frottement dans l'eau de la partie mobile compense probablement, pour celle-ci, ce léger avantage (premier fascicule, n° 33); on peut donc considérer la turbine Girard comme théoriquement équivalente à la turbine ordinaire, car z est toujours assez faible en comparaison de H.

Pour assurer la liberté de la veine (ou sa libre déviation), il faut per-

mettre l'épanouissement transversal par un évasement prononcé des couronnes; on adopte :

$$b_1 = 2 \text{ à } 3\, b_0$$

$$\frac{b_0}{r_0} = 0{,}1 \text{ à } 0{,}25$$

Bach indique la relation :

$$b_0 = \frac{2r_0}{8 + 0{,}2\,\mathrm{H}} \text{ à } \frac{2r_0}{13 + 0{,}2\,\mathrm{H}}$$

On prend

$$z = \frac{2r_0}{10}$$

et

$$n = 50 \text{ à } 75$$

e descend parfois jusqu'à $0^m,04$.

Pour établir la pression atmosphérique sur la veine, qui ordinairement remplit les orifices à la sortie, on emploie l'un des moyens représentés figures 57 et 58, dus à Girard, ou les dispositifs de Lehmann [1] qui ont, paraît-il, l'avantage de permettre le fonctionnement sous eau.

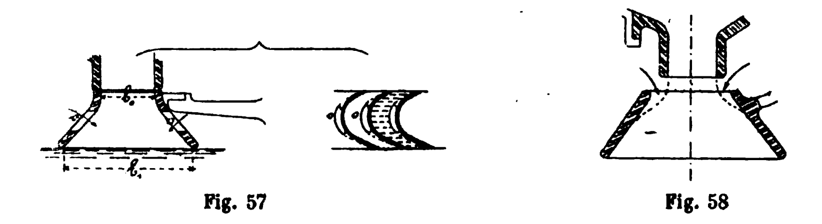


Fig. 57 Fig. 58

Le fonctionnement à libre déviation ne s'applique évidemment pas au système Jonval, attendu que, d'abord, la pression atmosphérique ne pourrait être établie à la hauteur où se trouve la turbine sans désamorcer la colonne d'aval, ce qui ferait perdre la hauteur h_1, et que, en second lieu, les canaux ne pourraient non plus être mis sans inconvénient en communication avec la chambre intérieure qui règne au niveau du joint, puisque cette chambre est remplie d'eau.

1. C. Bach. — Ouvrage cité, p. 92 à 95, - *Praktische M. C.*, 1881, p. 8.

Dans les turbines de Girard, le grand évasement des couronnes laisse à la force centrifuge une certaine action sur la veine, et l'on ne peut poser en toute rigueur $r_1 = r_0$; la couronne est quelquefois, pour cette raison, déviée à l'extérieur, c'est-à-dire qu'elle n'est pas symétrique par rapport au cylindre moyen.

§ V.

TURBINES HYDROPNEUMATIQUES DE GIRARD [1].

54. — Les dispositions que nous allons décrire permettent d'installer la turbine sous le niveau d'aval, tout en conservant le fonctionnement dans l'air, et par conséquent la libre déviation.

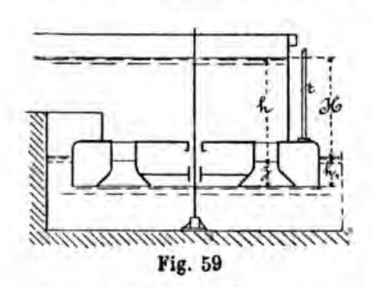


Fig. 59

Dans la figure 59, la roue est installée sous une cloche dont le bord inférieur se trouve à la hauteur des orifices de sortie ; on maintient sous la cloche, au moyen d'une pompe, une pression d'air capable d'équilibrer la hauteur h_1 ; soit p' la pression absolue de l'air ; en admettant que la roue soit à libre déviation, on a :

$$\frac{u_0^2}{2g} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{p'}{\Pi}$$

et comme

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h_1$$

il vient :

$$\frac{u_0^2}{2g} = h - h_1$$

Or :

$$h - h_1 = \mathrm{H} - z$$

1. Meissner. — Ouvrage cité, t. II ; pl. 23, fig. 1 ; pl. 25, fig. 5.

on trouve donc :

$$\frac{u_0^2}{2g} = H - z$$

comme pour les turbines à libre déviation qui dégorgent au niveau d'aval.

On peut imaginer une disposition inverse de la précédente : la turbine est placée plus haut que le niveau d'aval (fig. 60); une dépression convenable, entretenue dans la chambre, fait remonter le niveau jusqu'aux orifices de sortie. On a dans ce cas :

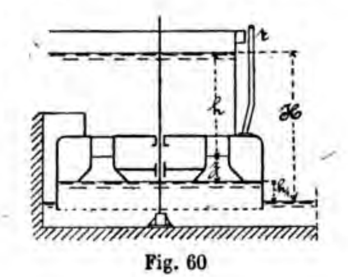


Fig. 60

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - h_1$$

et, en remarquant que :

$$h + z + h_1 = H$$

on retombe facilement sur la même conclusion que pour le premier cas.

Cette dernière disposition peut être rapprochée du système Henschel-Jonval, mais la chambre intérieure renferme ici une quantité d'air bien déterminée, qui, dans la turbine du § III, ne pourrait s'y trouver qu'accidentellement, en altérant du reste les conditions du fonctionnement, pour peu que le niveau de l'eau descendit en dessous du joint.

§ VI.

TURBINES AXIALES A RÉACTION.

Ces turbines diffèrent de celles examinées jusqu'ici, en ce que l'eau, au moment où elle est admise sur la roue, n'a pas reçu toute la vitesse qui correspond à la chute; l'excès de la pression dans le joint sur la pression à la sortie, produit une augmentation de la vitesse relative à l'intérieur des canaux mobiles, au lieu que, dans les turbines d'action,

la vitesse est simplement déviée (41). D'après les considérations exposées au n° 46, les turbines à réaction sont caractérisées par :

$$\beta > 2\alpha$$

mais il convient d'examiner plus particulièrement les tracés qui sont en usage.

A. — Cas où $\beta = 90°$.

55. — Les formules (A') et (A") (n° 45) donnent :

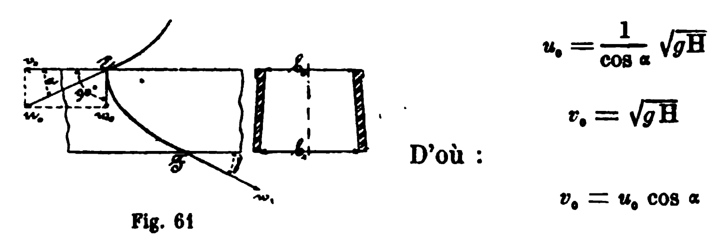


Fig. 61

$$u_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{gH}$$

$$v_0 = \sqrt{gH}$$

D'où :

$$v_0 = u_0 \cos\alpha$$

ce qui était du reste évident d'après la valeur de β (fig. 61).

Ces valeurs, comparées à celles qui ont été trouvées pour les turbines d'action (46), indiquent une *diminution* de la vitesse absolue d'entrée dans le rapport de $\cos\alpha\sqrt{2}$, et une *augmentation* de v_0 dans le même rapport, d'où l'on conclut, qu'à chute égale, ***les turbines à réaction ont une marche plus rapide que les turbines d'action.***

En remarquant que

$$v_1 = v_0 = u_0 \cos\alpha$$

et que

$$r_0 = r_1$$

l'équation (7) de la théorie générale devient :

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$$

et le rendement est :

$$U = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

On a généralement :

$$\gamma = \alpha$$

et, par conséquent,

$$b_1 = \frac{b_0}{\cos\alpha}$$

α est toujours un angle très aigu, b_1 est donc peu supérieur à b_0, c'est-à-dire que les couronnes sont très peu évasées.

On a, par la comparaison des vitesses relatives à l'entrée et à la sortie :

$$w_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} w_0$$

La vitesse w_1 est donc ici beaucoup plus grande que w_0, ce qui devait être, puisque la pression p_0 produit une augmentation de la vitesse relative; on a du reste par l'équation (1), en remplaçant u_0 par sa valeur :

$$\frac{p_0}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{H}{2\cos^2\alpha}$$

Soit, par exemple, $\alpha = 20°$, et supposons le joint à fleur d'eau (fig. 61), on a alors $h = H$, et :

$$\frac{p_0}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + 0.43\,H$$

La loi des pressions est représentée, depuis le niveau d'amont jusqu'à la sortie de l'appareil injecteur, par la ligne *abc* (fig. 62), dont la portion *ab* suit la loi hydrostatique, et dont le point *c* est obtenu en menant :

$$c'c = 0.43\,\Pi H$$

(*bc* est supposé rectiligne, ce qui n'arrivera pas en général).

Fig. 62

La loi des pressions dans la turbine doit aboutir au point *d*, connu par la quantité dont la roue est noyée; la forme de la ligne *cd* dépend du tracé des aubes : nous l'avons supposée rectiligne.

La loi des pressions pour la turbine d'action serait *abc'd*.

56. — *Tracé des directrices et des aubes.* — Le tracé des directrices ne présente rien de particulier, il est le même que pour les turbines

d'action; pour les aubes, on peut employer le procédé déjà indiqué de M. Vallet; on calcule les valeurs

$$u_0^2 \text{ et } u_1^2$$

$$w_0^2 \text{ et } w_1^2$$

on partage la hauteur z en n zones égales (fig. 63), et l'on s'impose la condition que, pour chacune d'elles, le carré de la vitesse absolue u varie de

$$\frac{v_0^2 - u_1^2}{n}$$

et celui de la vitesse relative w, varie de (1)

$$\frac{w_1^2 - w_0^2}{n}$$

On en déduit, pour des points aussi rapprochés que l'on veut, la vitesse relative et la vitesse absolue; la vitesse d'entraînement v, connue en grandeur et direction, qui forme le troisième côté de tous les triangles

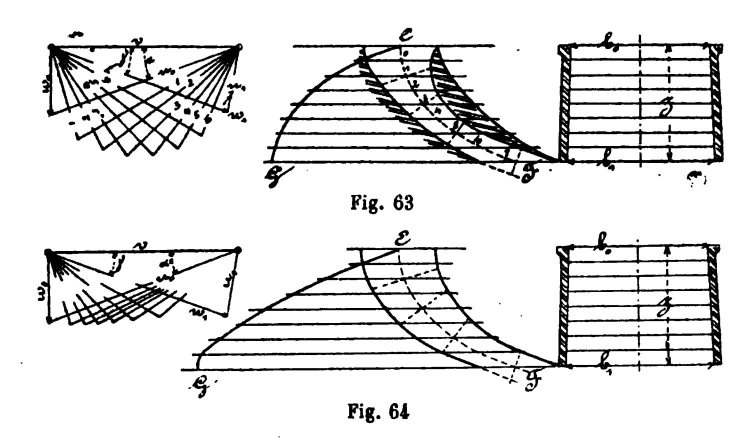


Fig. 63

Fig. 64

des vitesses, permet de déterminer les directions de u et w. En commençant par le point d'entrée, on détermine la trajectoire relative, EF, et si l'on veut, la trajectoire absolue EG, du filet liquide.

1. Lorsque cette dernière condition est réalisée, on peut démontrer facilement que la pression varie effectivement suivant la loi représentée par la ligne droite *cd*.

La trajectoire relative est l'axe du canal, dont le profil est déterminé *a priori* par la section transversale des couronnes, les largeurs b_0 et b_1 de celles-ci étant connues. Le procédé à employer pour déterminer les dimensions normales à la vitesse relative est le même qu'au numéro 49, il permet de trouver l'épaisseur des cloisons, qui, dans ce cas, sont en fonte, du même jet que les couronnes.

Si l'on veut faire usage d'aubes en tôle à épaisseur constante, et que l'on s'impose en même temps le profil des couronnes, on doit renoncer à faire varier la force vive relative et la force vive absolue proportionnellement à la hauteur ; on peut, dans ce cas, se donner la trajectoire relative EF (fig. 64), à partir de laquelle on porte horizontalement la demi-largeur constante du canal; on peut calculer, d'après les sections, les vitesses relatives dans chaque zone ; comme leurs directions sont connues, on peut achever les triangles qui déterminent les vitesses absolues en grandeur et direction, et tracer la trajectoire absolue EG.

57. — *Turbines sans évasement.* — On peut avoir

$$b_1 = b_0$$

car il suffit, en se reportant à l'équation qui lie ces quantités, de faire

$$\sin \gamma = tg\alpha$$

γ est alors un peu supérieur à α.

Si, de plus, les aubes sont en tôle, on voit que la section horizontale du canal est constante, la composante verticale de w est donc constante

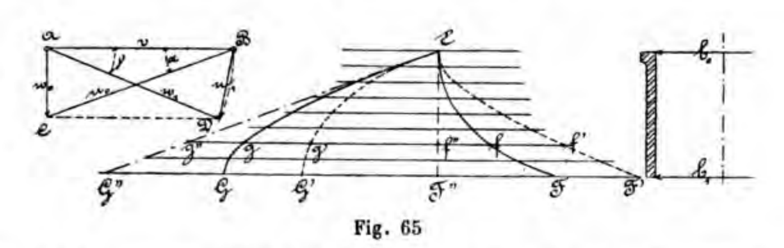


Fig. 65

et égale à w_0; on en déduit la construction suivante (fig. 65), qui permet de trouver la vitesse absolue: on porte w_0 dont on calcule la valeur, sur la verticale AC, par C on mène une ligne horizontale; du point A, avec le rayon AB, on décrit l'arc BD jusqu'à son intersection avec l'horizontale

passant par le point C. AD est la vitesse relative de sortie, puisqu'elle est égale à v, et que sa projection sur la verticale est w_0. La vitesse absolue u_1 est donc donnée par le côté BD.

On pourrait encore tracer l'aube en s'imposant la condition que l'une des forces vives (la force vive du mouvement absolu, par exemple) varie proportionnellement à la hauteur; on calcule alors la série des valeurs de u, et on en déduit facilement celle des valeurs de w, attendu que tous les sommets des triangles des vitesses sont sur la ligne CD. On trace alors les trajectoires EF et EG; EF est en même temps la forme de l'aube. Si l'on s'impose la condition que la force vive du mouvement relatif doit varier proportionnellement à la hauteur, on obtient, pour les trajectoires, les lignes pointillées EF', EG'; mais ce tracé ne conviendrait pas, la courbure du canal étant trop prononcée à l'entrée.

58. — Lorsque l'une des trajectoires EF, est donnée, on peut en déduire facilement EG, il suffit de porter sur la même horizontale, à partir de EG'' qui représente la vitesse u_0 prolongée, la quantité $g''g$ égale à $f''f$, on trouve ainsi autant de points que l'on veut de la courbe EG, et l'on a, en particulier, dans le plan inférieur de la turbine:

$$G''G = F''F$$

Cette propriété résulte de ce que la projection verticale de la vitesse relative est constante; la masse élémentaire, partie du point E, parcourt donc dans le sens vertical un chemin Ef'' proportionnel au temps, le chemin parcouru dans le sens horizontal est aussi proportionnel au temps, puisque la vitesse d'entraînement est constante; les chemins parcourus projetés suivant les directions considérées sont proportionnels à w_0 et v, ou, ce qui revient au même, à Ef'' et $f''g''$, qui sont dans le même rapport que ces deux quantités, etc...

B. — Cas où $\beta = 90° + \frac{\alpha}{2}$

59. — Pour cette valeur particulière de β (fig. 66), on a:

$$\sin \beta = \sin (\beta - \alpha) = \cos \frac{\alpha}{2}$$



et les équations A et A' fournissent :

$$u_0 = v_0 = \sqrt{\frac{gH}{\cos\alpha}}$$

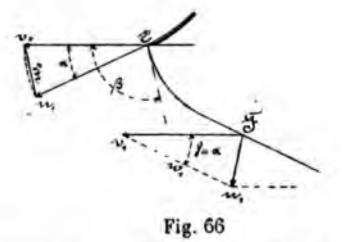


Fig. 66

On trouve, par l'équation (1)

$$\frac{p_0}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{H}{2\cos\alpha}$$

Supposons que le joint soit à fleur d'eau ($h = H$), et prenons $\alpha = 20°$.

$$\frac{p_0}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + 0.47\,H$$

L'augmentation de β produit, comme on pouvait s'y attendre, un excès de pression de plus en plus prononcé à la sortie des directrices.

L'égalité des débits à la sortie de l'appareil injecteur et à la sortie de la turbine donne :

$$b_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\, b_0$$

Comme on a généralement $\alpha = \gamma$, ces turbines n'ont pas d'évasement.

N. B. — La turbine Jonval-Henschel fonctionne ordinairement à réaction, elle admet les valeurs $\beta = 90°$ ou $\beta = 90° + \frac{\alpha}{2}$; le diagramme de la pression est alors figuré par la ligne *abc'c''d* (fig. 54).

§ VII

TURBINES RADIALES CENTRIFUGES FONCTIONNANT COMME TURBINES D'ACTION, OU DANS LESQUELLES LE DEGRÉ DE RÉACTION EST FAIBLE.

60. — *Turbines à joint noyé.* — Les équations du n° 45 sont applicables aux turbines radiales, et peuvent servir de base au calcul de leurs dimensions. Si nous supposons que la turbine appartienne au type général représenté figure 46, la pression p_1 varie, pour les divers filets horizontaux, suivant la loi hydrostatique ; il en est de même de p_0, puisque

les filets se meuvent en couches horizontales ; on peut donc poser, pour la turbine fonctionnant avec le minimum de réaction

$$\frac{p_0 - p_1}{\Pi} = 0$$

Les équations (1) et (6), combinées, donnent alors :

$$u_0 = \sqrt{2gH}$$

et, par l'équation fondamentale (A) :

$$v_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gH}{2}}$$

Ces valeurs sont précisément celles trouvées au n° 46, et ne peuvent être réalisées que si l'on a, dans l'équation (A') :

$$\beta = 2\alpha$$

Les équations (7) et (8) fournissent, en remplaçant les vitesses en fonction de u_0 et v_0, dont les valeurs sont connues :

$$\frac{b_1}{b_0} = 2\frac{r_0^2}{r_1^2}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\alpha$$

Pour

$$\alpha = \gamma = 20^\circ$$

et

$$r_0 = 0{,}73\, r_1$$

on trouve

$$b_1 = b_0$$

c'est à dire que l'évasement des couronnes est nul, contrairement à ce que nous avons trouvé pour les turbines axiales du § II.

Pour augmenter le rapport $\frac{b_1}{b_0}$, il faut diminuer l'angle γ, et le rendement U augmente [équation (E)] ; γ descend parfois jusqu'à 10 ou 12°.

Les turbines radiales sont peu représentées parmi les turbines d'action proprement dites, mais elles sont souvent employées comme turbines à libre déviation à arbre horizontal et injection partielle (83).

§ VIII.

TURBINES CENTRIFUGES A LIBRE DÉVIATION.

61. — Girard et les constructeurs qui ont appliqué ses principes ont généralement réservé l'injection axiale aux turbines à arbre vertical, et ont adopté, à peu d'exceptions près, le fonctionnement radial pour les roues partielles à arbre horizontal, appelées aussi roues tangentielles [1].

Les turbines à libre déviation, à cause de leurs canaux incomplètement remplis, ne peuvent être noyées; c'est l'une des raisons pour lesquelles elles ne sont pas à arbre vertical, puisque dans ce cas (fig. 67), une partie de la chute est employée à accélérer le mouvement des filets déjà sortis de la turbine; dans les turbines axiales, cette accélération se produit sur l'aube même et n'est pas perdue, il en est de même dans les roues tangentielles.

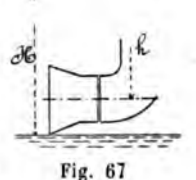


Fig. 67

On a pour toute turbine à libre déviation:

$$p_0 = p_1 = p_a$$

et, dans le cas qui nous occupe, où l'eau n'est reçue que sur quelques aubes situées très près de la verticale passant par l'axe,

$$z = r_1 - r_0$$

l'équation (3) devient:

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + r_1 - r_0 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

et puisque $w_1 = v_1$

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - (r_1 - r_0)$$

On a d'ailleurs

$$\frac{u_0^2}{2g} = \mathrm{H} - (r_1 - r_0)$$

1. C. Bach. — Ouvrage cité, pl. II, fig. 7 et 8. — D'après Rühlmann, t. I, p. 389, cette disposition serait due a Schwammkrug. — On trouve dans Meissner, ouvrage cité, et notamment pl. 22-43-67-79, de nombreux exemples de roues tangentielles.

ces deux dernières égalités, combinées avec l'équation (2), de condition à l'entrée, donnent la relation fondamentale:

$$u_0 \, v_0 \cos \alpha = g \mathrm{H}$$

On peut donc calculer u_0 et v_0; on constate facilement, comme dans les turbines axiales à libre déviation (53) que

$$w_0 < v_0$$

ce qui entraine

$$\beta > 2\,\alpha$$

62. — Les règles déjà données à plusieurs reprises pour le tracé des aubes, sont applicables aux turbines radiales; mais, pour les turbines à libre déviation, la vitesse relative qui s'établit ne résulte pas de la section (puisque celle-ci n'est pas remplie), il faut donner au canal une

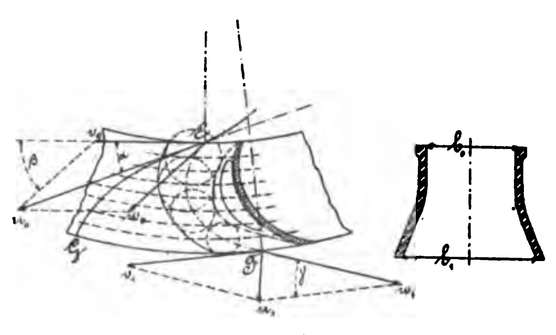


Fig. 68

ouverture suffisante pour que la veine puisse s'épanouir librement. On peut calculer la vitesse relative w correspondant à un rayon r quelconque, car il suffit de remplacer r_1 par r et v_1 par v dans l'équation qui a servi à calculer la vitesse relative de sortie, on a alors:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{w_0{}^2}{2g} + r - r_0 + \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0{}^2}{2g}$$

v est la vitesse d'entrainement à la distance r du centre.

En substituant dans cette équation la valeur trouvée pour w_0, on a:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - (r_1 - r)$$

On peut, au moyen de cette équation, calculer la série des valeurs de w pour des valeurs de r rapprochées; on trace la trajectoire EF (fig. 68), tangente à la direction w_0, et coupant la circonférence extérieure sous l'angle γ; on calcule la largeur b_1 en supposant que les orifices soient remplis à la sortie, et on trace, *au juger*, le profil des couronnes; on calcule ensuite, d'après les vitesses relatives trouvées, l'épaisseur normale de la veine en chaque point; on peut représenter ainsi l'espace occupé par le liquide, et en déduire la forme de la surface concave de l'aube, ainsi que le contour des vides à ménager dans les couronnes pour permettre à la pression atmosphérique de s'établir.

§ IX

TURBINES CENTRIFUGES A RÉACTION.

63. — Ces turbines sont caractérisées par

$$\beta > 2\alpha$$

Nous pourrions, comme au § VI, considérer séparément différents cas; mais la marche à suivre est absolument la même que pour les turbines axiales; nous prendrons donc, comme exemple unique, celui où l'angle β est égal à 90°

Les équations de la théorie générale donnent immédiatement:

$$u_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{g\,\mathrm{H}}$$

$$v_0 = \sqrt{g\,\mathrm{H}}$$

d'où

$$v_0 = u_0 \cos\alpha$$

La pression dans le joint est:

$$\frac{p_0}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{\mathrm{H}}{2\cos^2\alpha}$$

La largeur des aubes à la sortie résulte de l'égalité des débits (éq. 7)

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma\cos\alpha}$$

Pour $b_1 = b_0$, les couronnes sont sans évasement, et l'on trouve

$$\sin \gamma = \frac{r_0^2}{r_1^2} \operatorname{tg} \alpha$$

Meissner [1] donne, pour les rapports des rayons, et pour l'angle α, les valeurs suivantes:

1°) Pour de grands volumes d'eau, la chute étant faible, α varie de 20 à 24°,

$$r_0 = 0{,}75\, r_1 \text{ en moyenne.}$$

2°) Pour des volumes moyens et des chutes moyennes, α varie de 16 à 20°,

$$r_0 = 0{,}74\, r_1 \text{ en moyenne.}$$

3°) Pour de faibles volumes, la chute étant élevée, α varie de 15 à 18°, et

$$r_0 = 0{,}72\, r_1 \text{ en moyenne.}$$

En partant de ces valeurs, on peut trouver celles de γ, mais, afin de réduire l'obstruction possible des canaux à la sortie, on est obligé d'augmenter les angles, et de prendre respectivement, pour les trois cas cidessus

$$\gamma = 12 \text{ à } 18^\circ$$
$$11 \text{ à } 16^\circ$$
$$10 \text{ à } 12^\circ$$

§ X.

TURBINES A ALIMENTATION EXTÉRIEURE [2].

64. — Ces turbines s'appellent aussi turbines centripètes, ou turbines de *Francis*, du nom de l'ingénieur Américain qui les a imaginées en 1849. Nous supposerons que le fonctionnement ait lieu par réaction; soit, par exemple,

$$\beta = 90^\circ$$

1. Ouvrage cité, p. 738.
2. Zeuner a le premier appelé l'attention sur ces turbines, et signalé leur supériorité sur le système Fourneyron. — *Civil Ingenieur*, 1855.

Les formules générales continuent à être applicables, pourvu que r_0 désigne le rayon à l'entrée ou rayon extérieur, et r_1 le rayon à la sortie, ou rayon intérieur (fig. 69); on a

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \cos \alpha}$$

Soit

$$r_1 = 0{,}75\, r_0$$

il vient

$$\frac{b_1}{b_0} = 1{,}78 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \cos \alpha}$$

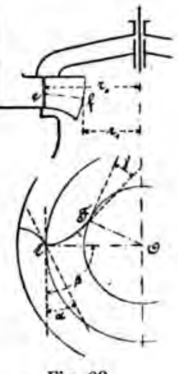
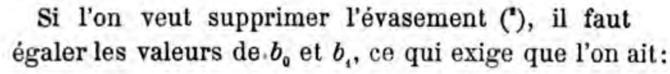


Fig. 69

Les couronnes comportent donc un évasement vers le centre [1], leur axe médian, *ef*, est dévié vers le bas.

Si l'on veut supprimer l'évasement [2], il faut égaler les valeurs de b_0 et b_1, ce qui exige que l'on ait:



$$\sin \gamma = 1{,}78 \operatorname{tg} \alpha$$

ou, pour

$$\alpha = 15^\circ,\ \gamma = 29^\circ \text{ environ}$$
$$\alpha = 20^\circ,\ \gamma = 40^\circ \quad \text{»}$$

Le rendement est

$$U = 1 - 2 \frac{r_1^2}{r_0^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

Pour la même valeur de γ, U est supérieur à ce qu'il serait pour une turbine centrifuge, attendu que l'on a

$$r_1 \lesseqgtr r_0$$

suivant qu'il s'agit de l'un ou de l'autre mode d'alimentation; ce résultat pouvait être prévu, car la vitesse relative d'entrée, qui pour $\beta = 90^\circ$ est, dans les deux cas:

$$w_0 = u_0 \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{gH}$$

1. C. Bach. — Ouvrage cité, pl. I, fig. 2.
2. Meissner. — Ouvrage cité, pl. 16-17-18. — *Praktische M. C.*, 1882, p. 89.

est accélérée jusqu'à la sortie par la hauteur motrice :

$$\frac{p_0}{\Pi} - \frac{p_1}{\Pi} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Or, dans la turbine centrifuge,

$$v_1 > v_0$$

et, par conséquent, la hauteur motrice est plus grande que celle qui est due aux pressions seules, tandis que le contraire a lieu pour la turbine centripète. Pour une valeur de γ donnée, la hauteur perdue à la sortie $\frac{u_1^2}{2g}$ étant proportionnelle au carré de la vitesse relative, puisque

$$u_1 = 2\ w_1 \sin \frac{\gamma_1}{2}$$

la valeur du rendement doit être supérieure pour la turbine centripète.

65. — *Observation sur la courbure des aubes.* — Les relations existant entre β et α sont générales, et caractérisent le degré de réaction, qu'il s'agisse de turbines axiales, centrifuges ou centripètes. Il peut être intéressant de comparer les rendements théoriques (U) de ces trois espèces de turbines, pour une même valeur $\beta = 90°$, ainsi que les formes des aubes ; or, on a, dans les trois cas :

$$U = 1 - 2 \frac{r_1^2}{r_0^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Admettons :

$r_1 = \frac{r_0}{0{,}75}$ pour la turbine centrifuge,

$r_1 = 0{,}75\ r_0$ — centripète,

et

$r_1 = r_0$ — axiale.

Soit $\gamma = 15°$ pour la turbine axiale, et proposons-nous de réaliser des rendements égaux pour les trois machines ; il est facile de trouver que

Pour la turbine centrifuge $\gamma = 10°$
— centripète $\gamma = 20°$

La figure 70 donne, superposés l'un à l'autre, les trois tracés qui satisfont à ces conditions. L'angle de contingence de chacune des trois aubes varie en augmentant dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{Turbine centripète :} & \beta - \gamma - \text{E O'' F''} & = 70^\circ - \text{E O'' F''} \\ \text{— axiale} & \beta - \gamma & = 75^\circ \\ \text{— centrifuge} & \beta - \gamma + \text{E O' F'} & = 80^\circ + \text{E O' F'} \end{array}$$

Cette différence de courbure exerce nécessairement une influence sur les résistances passives, et modifie les conclusions que l'on pourrait tirer de l'expression théorique du rendement ; les aubes de la turbine Fourneyron sont à la fois plus longues et plus courbées que celles de la turbine Francis qui donnerait le même rendement théorique, on peut y voir l'une des raisons pour lesquelles la turbine Fourneyron s'est moins développée que les deux autres catégories : la turbine axiale, sur le continent, et la turbine Francis, aux Etats-Unis.

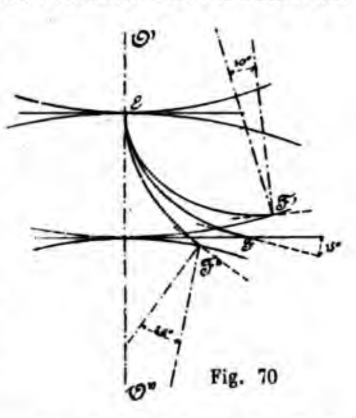


Fig. 70

Les expériences de Lehmann confirment ces prévisions [1] elles ont donné, pour les pertes, évaluées en fractions de la hauteur de chute :

	TURBINE		
	Centrifuge	Axiale	Centripète
Résistances hydrauliques.	0,14	0,12	0,10
Perte de force vive à la sortie. . . .	0,07	0,03	0,06
Frottements.	0,02	0,03	0,02
Totaux. . .	0,23	0,18	0,18

1. Voir le dispositif des expériences au frein dans *Praktische M. C.*, 1881, p. 293. Voir aussi les recherches de grand intérêt publiées par *Ed. Haenel, Civil Ingenieur*, 1878, p. 101. — (Ueber Girard Turbinen der Campmühle in Varzin).

La turbine centripète peut avoir des aubes droites, ou à double courbure ([1]); il suffit de suivre, pour s'en assurer, les modifications que subit l'aube EF" (fig. 70), lorsque β diminue et que γ augmente. Ce fait n'est du reste nullement en contradiction avec le principe établi au n° 39, car d'abord le mouvement d'entraînement n'est pas rectiligne et uniforme, et les forces fictives jouent un certain rôle, en outre, la vitesse relative de sortie n'est pas égale à la vitesse relative à l'entrée ([2]).

§ XI.

TURBINES SANS DIRECTRICES.

66. — *Turbine Cadiat* ([3]). — Cette turbine n'a pas de directrices dans l'appareil injecteur ; on peut supposer que la vitesse u_0 est dirigée suivant le rayon (fig. 71) et l'angle α est droit.

Fig. 71

L'équation 12 (n° 44) montre que la pression à l'entrée ne peut conserver une valeur positive, et l'équation (A') donne d'ailleurs :

$$u_0 = \infty$$

La condition du maximum d'effet conduit donc à une impossibilité ; on doit admettre, ou que l'eau n'entre pas sans choc dans la roue, ou que la vitesse w_1 diffère de v_1 ; acceptons cette dernière hypothèse et cherchons la vitesse v_0 ainsi que la valeur de l'angle β'. On doit avoir, pour éviter le choc à l'entrée :

$$u_0 = \frac{v_0}{\text{tg } \beta'}$$

1. Turbine Mahler. — Meissner, pl. 54 et 98.
2. La turbine Girard peut être à alimentation extérieure; voir n° 77. Des turbines de ce genre, fonctionnant sous une chute de 170 mètres, avec un débit de 50 litres par seconde, ont été installées à Juncal (Chili) pour commander des dynamos à la vitesse de 700 tours par minute sans aucune transmission intermédiaire. — Engineering, 1891, 1er sem., page 481. (The Transandine Railway).
3. Armengaud. — *Publication industrielle*, t. II, pl. 34.

la pression dans le joint sera donnée par :

$$\frac{p_o}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{u_0^2}{2g}$$

Pour que la pression dans le joint soit égale à la pression extérieure,

$$\frac{p_a}{\Pi} + h_1$$

il faut que

$$\frac{u_0^2}{2g} = h - h_1 = \mathrm{H}$$

d'où on tire l'équation qui donnera v_o :

$$\frac{v_0^2}{2g} = \mathrm{H}\ \mathrm{tg}^2 \beta'$$

A chaque valeur β' correspond une vitesse v_o.

Cherchons la vitesse absolue de sortie, elle est la résultante de w_1 et de la vitesse d'entraînement :

Mais on a par l'équation (3), puisque $z = o$ et que $p_1 = p_o$:

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

ou :

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1}{\sin^2 \beta'} + \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1\right)$$

et, en remplaçant $\frac{v_o^2}{2g}$ par sa valeur :

$$\frac{w_1^2}{2g} = \mathrm{H}\ \mathrm{tg}^2 \beta' \left[\frac{1}{\sin^2 \beta'} + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1\right]$$

En remplaçant v_1 en fonction de v_o, donc de β', et en substituant la valeur de w_1 dans l'expression de u_1^2, on trouve :

$$\frac{u_1^2}{2g} = \mathrm{H}\ \mathrm{tg}^2 \beta' \left[2\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \beta'} - 1 - 2\frac{r_1}{r_0} \cos \gamma \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta'} + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1}\right]$$

On pourrait chercher, pour différentes valeurs de $\frac{r_1}{r_0}$ et de γ, la va-

leur de β' qui réduit au minimum la hauteur perdue $\frac{u_1^2}{2g}$, mais cette recherche est compliquée; l'expression ci-dessus, de la hauteur perdue, permet d'effectuer des calculs numériques, et de trouver, par exemple, le rendement pour un rapport donné des rayons, et un certain angle γ choisi à l'avance.

Soit:

$$\gamma = 20°$$

et

$$r_1 = r_0 \sqrt{2}, \text{ ou} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 = 2$$

On trouve pour le rendement U, et pour les rapports $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_1}{u_0}$ et $\frac{b_1}{b_0}$, les valeurs ci-après, calculées pour divers angles β':

β'	$\frac{v_0}{u_0}$	U	$\frac{w_1}{u_0}$	$\frac{b_1}{b_0}$
10°	0.176	0.364	1.026	2.02
20	0.364	0.558	1.125	1.84
30	0.577	0.648	1.290	1.60
45	1.000	0.603	1.732	1.20

On découvre facilement, à l'inspection des chiffres de ce tableau, que la turbine, en fonctionnant par action, donnerait son rendement maximum pour une valeur de β' comprise entre 30 et 45°, abstraction faite des pertes de charge, dont l'effet est ici d'autant plus grand que la vitesse relative prend une valeur considérable. La turbine Cadiat, créée dans un but de simplification, n'a pu se répandre à cause de l'infériorité de son rendement [1].

67. — *Turbine Écossaise.* — Cette machine (fig. 72) ne diffère pas,

1. La turbine à hélice, établie autrefois à Saint-Maur par M. Plataret, représente, dans le genre axial, ce que la turbine Cadiat est pour le genre radial, et présente les mêmes défauts.

en principe, de la précédente, mais la section de sortie est à celle d'entrée dans un rapport déterminé, (généralement $\frac{2}{3}$), et

$$r_0 = \frac{1}{3} r_1$$

Fig. 72

On a donc ici :

$$v_0^2 = \frac{1}{9} v_1^2$$

et

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{9}{4} \frac{w_0^2}{2g}$$

En supposant que la turbine fonctionne noyée, mais, avec le joint à fleur d'eau, la pression p_o qui s'établit à l'entrée des canaux est donné par l'équation :

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + \frac{p_o}{\Pi} - \frac{p_a}{\Pi} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

La partie centrale, qui est fixe, ayant un faible diamètre, s'engage dans la partie mobile ; on peut, à la rigueur, admettre pour p_o une valeur différente de la pression atmosphérique, si l'appareil est construit avec précision ; en substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de w_1 et v_1 en fonction de w_o et v_o, il vient :

$$\frac{5}{4} \frac{w_0^2}{2g} = 8 \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\Pi}$$

et, comme il ne doit pas y avoir de choc à l'entrée, et que la direction de la vitesse u_o est celle du rayon OE, on a :

$$w_0 = \frac{v_0}{\sin \beta'}$$

Il vient donc :

$$\left(\frac{5}{4 \sin^2 \beta'} - 8\right) \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_o - p_a}{\Pi}$$

On trouverait, pour $p_o = p_a$:

$$\sin^2 \beta' = \frac{5}{32}$$

d'où

$$\beta' = 23^0 \text{ environ}$$

Pour toute valeur supérieure à celle-ci, la pression à l'entrée serait inférieure à la pression atmosphérique ; on a, du reste :

$$u_0 = \frac{v_0}{\operatorname{tg} \beta'}$$

et

$$\frac{u_0^2}{2g} = \frac{p_a}{\Pi} - \frac{p_o}{\Pi} + \mathrm{H}$$

Lorsqu'on se donne β', on peut, au moyen de ces valeurs supplémentaires, déterminer p_o, ainsi que les vitesses, et tracer l'axe EF de chacun des canaux.

On attribue généralement à la turbine Ecossaise un rendement pratique maximum de $\frac{2}{3}$

68. — *Roue de Segner, tourniquet hydraulique* [1]. — L'ancienne roue de Segner ainsi que le levier hydraulique de de Mannoury d'Ectot, se rattachent encore aux turbines sans directrices. Pour simplifier l'exposé, nous supposons d'abord qu'il s'agisse d'un tube court AB (fig. 73), tournant autour d'un axe vertical, et recevant l'eau d'un vase immobile dans lequel la surface libre est très grande. La section du tube est supposée constante et égale à celle de l'orifice ; lorsqu'on néglige la perte due au choc qui se produit au moment de la jonction de la colonne qui descend en filets parallèles, et de la partie tournante, l'équation (3) donne, en faisant :

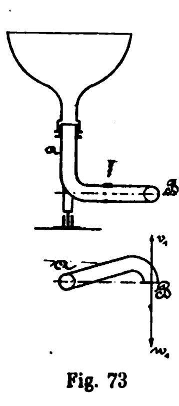


Fig. 73

$$r_o = o$$

et en prenant, à la surface libre :

$$w_0 = o$$

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + \mathrm{H}$$

1. Ce petit appareil, en usage dans les cabinets de physique, ne diffère de la roue de Segner que par la variation brusque dans la grandeur et la direction de la vitesse, au moment où l'eau arrive à l'orifice. Le tourniquet a été employé récemment pour de très hautes pressions. — *Industrie moderne*, mars 1890.

ou

$$w_1^2 = v_1^2 + 2gH$$

Le rendement est, abstraction faite de tous frottements ou pertes de charge [1], puisque

$$u_1 = w_1 - v_1 :$$

$$U = 1 - \frac{(w_1 - v_1)^2}{2gH}$$

On peut construire w_1^2 en portant sur les deux côtés d'un angle droit, (fig. 74) :



Fig. 74

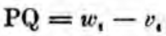
$$MP = \sqrt{2gH}$$

$$MN = v_1$$

On a

$$PN = w_1$$

et



$$PQ = w_1 - v_1$$

1. Pour tenir compte de la vitesse perdue à l'entrée A de la partie mobile, remarquons que le tuyau étant cylindrique, la vitesse relative des filets, dans la partie tournante, est égale à la vitesse absolue dans la partie fixe ; soit w cette vitesse, et considérons le filet situé à la distance ρ de l'axe (fig. 75), soit v la vitesse d'entraînement, la vitesse relative qui tend à s'établir à l'entrée de la partie mobile est w', mais celle qui s'établit réellement ne peut être que w. Il y a donc, pour le filet, une perte de force vive due à la composante v ou $\omega\rho$, perte qui, pour la section élémentaire

$$\rho \, d\alpha \, d\rho$$

serait, par unité de temps :

$$\frac{\Pi}{g} \rho \, d\alpha \, d\rho \, w \, \omega^2 \rho^2$$

et, pour toute la section de rayon a :

$$\omega^2 \frac{\Pi}{g} w \int_o^{2\pi} d\alpha \int_o^a \rho^3 \, d\rho$$

Fig. 75

ou

$$\frac{\Pi Q}{g} \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

La hauteur motrice perdue est donc

$$\frac{\omega^2 a^2}{4g}$$

Bien que ω puisse être très grand, cette hauteur est négligeable pour de grandes chutes, car a est alors assez petit.

Lorsque l'on suppose que l'entrée, au lieu de s'opérer par un coude, est accompagnée d'un changement de vitesse brusque à la périphérie, la perte de charge augmente, mais conserve encore toutefois une valeur relative très modérée.

Cette valeur diminue jusqu'à o lorsque v_1 augmente indéfiniment, et le rendement tend alors vers l'unité; il s'annulerait, au contraire, pour

$$(w_1 - v_1)^2 = 2g\,\mathrm{H}$$

ou pour

$$v_1 = o$$

La pression p_0 qui s'établit à la naissance des branches est donnée par

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} + \frac{p_o}{\Pi} - \frac{p_a}{\mathrm{H}} + \frac{v_1^2}{2g}$$

w est la vitesse relative en un point quelconque du tuyau, on a donc:

$$w = w_1$$

$$\frac{p_o}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - \frac{v_1^2}{2g}$$

Comme p_0 ne peut être négatif, on devra avoir au maximum:

$$\frac{v_1^2}{2g} = 10^{\mathrm{m}},33$$

ce qui limite la vitesse v_1, et, par conséquent, le rendement.

Soit, par exemple:

$$\mathrm{H} = 20^{\mathrm{m}},00$$

On a:

$$\frac{w_1^2}{2g} = 10.33 + 20.00 = 30.33$$

et

$$\mathrm{U} = 0.73$$

Pour $\mathrm{H} = 100^{\mathrm{m}},00$, on trouverait

$$\mathrm{U} = 0.47$$

Lorsque la chute augmente, on est donc obligé, pour conserver la continuité du mouvement du liquide, d'accepter un autre dispositif, qui consiste à élargir les branches à l'entrée (fig. 76).

Fig. 76

On a alors, pour une section quelconque s, w étant la

vitesse relative dans cette section, p la pression, v la vitesse d'entrainement, et s_1 la section de sortie:

$$\frac{w_1^2}{2g}=\frac{w^2}{2g}+\frac{p}{\Pi}-\frac{p_a}{\Pi}+\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}$$

et, puisque

$$v=\frac{r}{r_1}v_1$$

et

$$w=\frac{s_1}{s}w_1$$

$$\frac{p}{\Pi}=\frac{p_a}{\Pi}+\frac{w_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{s_1}{s}\right)^2\right]-\frac{v_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right]$$

On voit que la pression p augmente avec s et r; pour une distance donnée, l'élargissement doit donc être d'autant plus prononcé, que cette section est plus rapprochée de l'axe.

Pour réaliser la pression atmosphérique à l'entrée, il faudrait poser $p=p$ et $r=o$, on trouve:

$$\frac{w_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{s_1}{s}\right)^2\right]=\frac{v_1^2}{2g}$$

ou en tenant compte de la relation trouvée entre v_1 w_1 et H:

$$\left(\frac{s_1}{s}\right)^2=\frac{H}{H+\frac{v_1^2}{2g}}$$

Soit, par exemple,

$$H=100^m,00$$

et prenons

$$\frac{v_1^2}{2g}=50$$

on trouve

$$s^2=1.5\,s_1^2$$

ou

$$s=1.22\,s_1$$

On a, dans ce cas,

$$U=0,73$$

Pour

$$\frac{v_1^2}{2g}=100$$

on aurait

$$s^2 = 2 s_1^2$$

ou

$$s = 1.41\, s_1$$

et

$$U = 0.83$$

On voit qu'il est facile, en donnant aux branches une section légèrement décroissante vers la sortie, de relever la pression de manière à la maintenir supérieure à 0 et même à la pression atmosphérique.

Le débit, d'où dépend directement la puissance de l'appareil, n'est fonction ici que de la section de sortie s_1 et de la vitesse w_1; celle-ci, de son côté, ne dépend que de la hauteur de chute et de la vitesse v_1 qu'on laisse prendre à l'appareil.

Le travail moteur recueilli par seconde a pour expression:

$$T_m = U \Pi w_1 s_1 H$$

On peut remplacer U et w_1 en fonction de v_1; si l'on observe, de plus, que le travail développé *par tour* varie en raison inverse de v_1, on trouve que la puissance du tourniquet augmente au fur et à mesure que sa vitesse s'accélère, mais que le travail par tour diminue, et par conséquent aussi le couple moteur.

69. — Il peut être intéressant de chercher l'état de sollicitation des bras du tourniquet hydraulique; supposons qu'ils affectent une forme rectiligne et soient recourbés à leur extrémité (fig. 77). Admettons aussi que leur section soit constante, (et nécessairement plus grande que l'orifice).

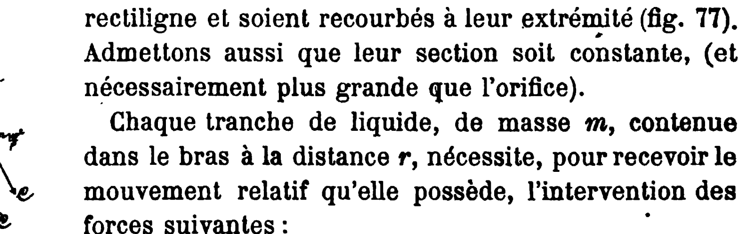


Fig. 77

Chaque tranche de liquide, de masse m, contenue dans le bras à la distance r, nécessite, pour recevoir le mouvement relatif qu'elle possède, l'intervention des forces suivantes :

1°) La force du mouvement absolu, qui ne peut être qu'une réaction normale de la paroi (le poids de l'eau sera consideré comme négligeable) ;

2°) La force centrifuge: $m\omega^2 r$;

3°) La force centrifuge composée $C = 2 m \omega w$.

L'influence des pressions est nulle, puisqu'elles s'exercent sur tout le pourtour du tuyau.

Le mouvement relatif dans les branches est rectiligne, la force C doit donc être équilibrée par la réaction de la paroi, C est ainsi la seule force sollicitante appliquée au bras au point a, et il en est de même dans tous les points situés sur la partie droite ; elle agit du reste comme force résistante, ce que l'on pourrait exprimer en disant que c'est le bras qui fait tourner le liquide.

Dans la partie courbée, au point b, par exemple, les forces projetées sur la normale au tuyau sont :

La composante c de la force centrifuge du mouvement d'entrainement.

La force centrifuge composée : C.

La réaction normale, F, de la paroi.

La résultante de ces trois forces doit produire l'accélération normale du mouvement relatif dans le coude du rayon ρ, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$F + C - m\omega^2 r \cos\alpha = m\frac{w^2}{\rho}$$

où

$$F = m\frac{w^2}{\rho} + m\omega^2 r \cos\alpha - C$$

F est la réaction produite sur l'eau ; l'action de l'eau sur la paroi est une force égale et contraire, et donne nécessairement une composante dans le sens du mouvement.

Il est évident qu'en retranchant du travail moteur de la force F, le travail résistant dû à la force C qui s'exerce sur la partie droite des branches, on devrait retrouver l'expression du travail communiqué au tourniquet [1].

§ XII.

PROPORTIONNALITÉ DES TURBINES.

70. — Quel que soit le genre de turbine que l'on considère, les quatre équations fondamentales établies au n° 45 sont applicables ; elles montrent que, pour un même tracé d'aubes, et de directrices, les vitesses u_0

1. Weisbach. — Ouvrage cité, 2e partie, § 274, fait quelques remarques intéressantes sur les roues à réaction.

et v_0 sont proportionnelles à la racine carrée de la hauteur de chute ; il en est de même, par conséquent, de la vitesse relative w_0. Pour les turbines axiales, on a du reste $w_1 = v_1 = v_0$, et la proportionnalité indiquée s'étend à toutes les vitesses ; dans les turbines radiales, cette propriété reste encore vraie, à la condition que le rapport $\frac{r_0}{r_1}$ conserve la même valeur.

Pour des turbines semblables, le débit varie, pour une même chute, comme le carré du rapport de similitude (équation F) ; si, en outre, la chute est différente, le débit varie comme le carré du rapport de similitude et comme la racine de la hauteur de chute.

On reconnait donc d'abord, qu'ayant étudié un type de turbine adapté à un volume Q, et à une hauteur H déterminés, on peut en déduire l'appareil du même système qui convient au volume Q' et à la hauteur H', car il suffira, en adoptant les mêmes angles :

1°) de modifier les dimensions linéaires dans un rapport $\frac{a}{a'}$, choisi de telle manière que l'on ait

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a^2 \sqrt{H}}{a'^2 \sqrt{H'}}$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{a'} = \sqrt{\frac{Q}{Q'} \sqrt{\frac{H'}{H}}}$$

2°) de modifier les vitesses dans le rapport $\sqrt{\frac{H}{H'}}$.

Les dimensions ne seraient pas modifiées si l'on avait

$$\frac{a}{a'} = 1$$

ou

$$\frac{Q}{Q'} = \sqrt{\frac{H}{H'}}$$

Le rendement d'une turbine déterminée, établie sur une chute de hauteur variable, ne change pas lorsque le débit varie proportionnellement à la racine de la hauteur de chute, pourvu que la vitesse varie dans ce même rapport. Il ne faut pas toutefois s'exagérer l'impor-

tance de cette propriété, car cette variation simultanée de Q et H serait fortuite, et d'ailleurs, les opérateurs à commander exigent, pour la plupart, une vitesse constante.

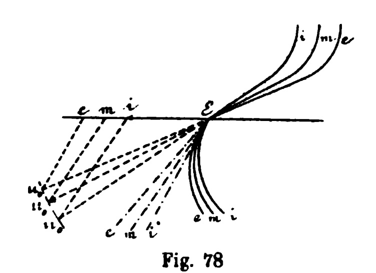
71. — *Eléments qui font varier la vitesse angulaire. — Turbines partielles. — Turbines à couronnes multiples.* — Les vitesses de l'eau, de même que la vitesse d'entraînement, ont, pour un système donné de turbine, une valeur bien déterminée, et qui ne convient qu'à cette hauteur de chute [1]; mais la vitesse de rotation est liée à celle d'entraînement par une relation dans laquelle entre le rayon, et celui-ci peut être augmenté ou diminué pour ainsi dire à volonté, à la condition que l'on diminue ou que l'on augmente la largeur des couronnes dans le rapport inverse ; on peut obtenir ainsi, sur une chute donnée, des turbines qui effectuent un nombre de tours plus ou moins grand; cependant, lorsque la chute est très élevée, ou que l'on veut réaliser un nombre de tours très faible, on ne pourrait atteindre le rayon compatible avec la vitesse angulaire qu'en diminuant beaucoup la largeur b_0 des couronnes ; on préfère alors conserver à cette largeur une valeur convenable, en adoptant les turbines à injection partielle, dont les roues tangentielles de Girard sont le type le plus complet (83).

Il peut arriver, à l'inverse de ce qui vient d'être dit, que le rayon compatible avec la vitesse angulaire à réaliser conduise à une valeur très grande de b_0; c'est surtout dans le cas où la chute est faible et le débit considérable, que ces proportions sont inévitables; elles présentent cependant un inconvénient grave pour les turbines axiales, car nous avons raisonné, dans le tracé des directrices et des aubes, comme si ces surfaces avaient, en chaque point du rayon, la même section que celle du cylindre moyen; en réalité, ces surfaces sont des conoïdes engendrés par un rayon s'appuyant sur l'axe de rotation et les courbes tracées dans le cylindre moyen; on voit que les angles α, β, γ, varient d'un point à l'autre du rayon, d'autant plus que le rapport $\frac{b_0}{r_0}$ est plus grand; comme ce rapport ne descend guère en dessous de 0,2, et qu'il atteint parfois 0,3 (48), cette variation est toujours sensible, sauf en ce qui con-

1. Il y a, à cette condition, un correctif important démontré par la pratique : c'est que la vitesse peut osciller, dans d'assez larges limites, sans altérer beaucoup le rendement.



cerne β, qui est assez voisin de l'angle droit et peut même lui être égal ; la figure 78 donne, pour une turbine d'action dans laquelle


Fig. 78

$$\alpha = 28^\circ$$
$$\beta = 56^\circ$$
$$\frac{b_0}{r_0} = 0.4$$

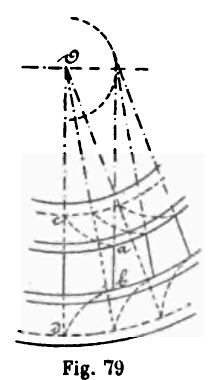
les sections *i*E*i*, *m*E*m*, *e*E*e*, faites à la couronne intérieure, au cylindre moyen, et à la couronne extérieure ; la condition

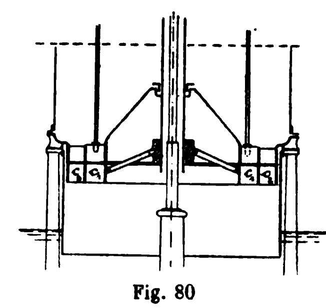
$$\beta = 2\alpha$$

qui est remplie au milieu de l'aube, ne l'est plus dans les sections extrêmes, et la vitesse relative iu_0, eu_0 n'est plus rigoureusement tangente à l'aube.

Lorsqu'il s'agit de turbines à réaction, les défauts ci-dessus sont plus accentués, car, à la couronne extérieure, α diminue tandis que β augmente; l'inverse se produit à la couronne intérieure.

On peut remédier à cet inconvénient en modifiant la forme des aubes, dont l'arête d'entrée *ab* (fig. 79), au lieu de passer par le centre, est tan-


Fig. 79


Fig. 80

gente à une circonférence de rayon convenablement choisi ([1]). On peut aussi recourir à une turbine à deux ou même à trois couronnes (fig. 80), surtout lorsque le débit ou la puissance doivent varier notablement.

1. V. *Reiche* fait remarquer que cette modification ne présente pas de difficulté pratique sérieuse, attendu que les cloisons en tôle sont toujours embouties dans une matrice, quelle que soit leur forme, et que les cloisons venues de fonte demandent toujours, dans le travail du moulage, une boite à noyaux.

§ XIII.

RÉGLAGE DES TURBINES

72. — L'égalité du travail moteur et du travail résistant pendant la période peut être obtenue par les divers modes de réglage que nous allons brièvement examiner.

La turbine étant supposée établie pour donner, sous la chute et avec le débit normaux, son meilleur rendement, de nombreux cas peuvent se présenter suivant que la *hauteur*, le *débit* et le *travail résistant*, augmentent, sont constants, ou diminuent. Il y a, au total, 27 combinaisons possibles de ces éléments, en y comprenant celle où ils sont constants.

Pratiquement, il est inutile de traiter la question dans toute sa généralité, car on s'attache presque toujours à avoir une chute constante, réglée par le seuil d'un déversoir, s'il s'agit de basses chutes, ou par le niveau de la prise d'eau, lorsqu'il s'agit de hautes pressions et de conduites fermées; certains cas doivent être écartés, celui, par exemple, où la hauteur et le débit diminuant, le travail résistant viendrait à augmenter.

Ce qui arrive le plus généralement, c'est que la turbine, établie pour écouler le débit maximum à hauteur constante, est momentanément moins chargée que ne le comporte ce débit *maximum* : il s'agit, en ce cas, de maintenir sa vitesse uniforme; ou bien encore, la charge, en se modifiant, nécessite une dépense d'eau variable, le niveau d'amont est maintenu sensiblement constant au moyen d'un bief de grande surface, et l'on s'attache à réduire autant que possible la dépense totale, qui sans cela, pourrait faire baisser le niveau dans le bief.

Dans les deux cas, il faut, en maintenant la vitesse de régime de la turbine, faire varier la dépense : on peut y arriver au moyen de différents appareils régleurs (1).

1. Il peut arriver aussi qu'on cherche à tirer d'un débit variable tout le travail possible. — *Engineering*, 1883, 1er sem., p. 79.

73. — *Vannage ordinaire.* **—** En agissant sur la vanne de prise d'eau V (fig. 55), ou sur une vanne analogue placée à la sortie [1], (fig. 54) on crée une perte de charge qui réduit virtuellement la hauteur de chute ; le travail recueilli diminue à la fois parce que la produit QH est réduit, et parce que la roue, ne tournant plus dans les conditions du maximum d'effet, utilise moins bien cette puissance absolue.

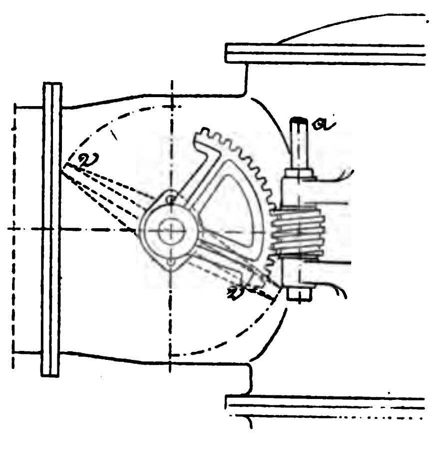
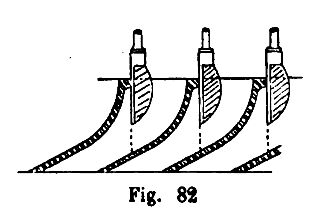


Fig. 81

Ce moyen est défectueux en principe, attendu que, si l'on avait conservé la même chute H, et, par conséquent le même rendement, la dépense eut pu être moindre ; il ne convient qu'au cas où l'eau est abondante. Il peut s'appliquer aux turbines à haute pression, sous forme d'une valve à papillon (fig. 81) ; celle-ci a l'avantage de n'exiger pour la manœuvre que peu d'effort.

74. — *Vannage à obturateurs multiples.* **—** On peut agir sur le débit au moyen de vannettes (fig. 82), qui étranglent l'eau à sa sortie de l'appareil injecteur, comme Fontaine l'a fait dans un grand nombre de ses turbines ; tous les orifices sont étranglés par la manœuvre simultanée des tiges. En toute rigueur, ce mode de réglage ne convient qu'aux turbines à libre déviation, car pour les autres, le nouvel état de choses amène une perturbation complète des vitesses.


Fig. 82

Dans les turbines radiales, le manchon M (fig. 46) qui s'introduit dans le joint et réduit la hauteur des canaux, joue le même rôle que les vannettes séparées dans les turbines axiales.

1. La vanne cylindrique présente l'avantage d'être équilibrée; on peut aussi la placer à l'entrée de la conduite de prise d'eau (voir les turbines récentes d'Assling-Sava, en Autriche, par la maison Ganz et Cie. — *Engineering*, 1891 2e sem., p. 307.)

On reproche à ce système de vannage l'augmentation relative de perte de charge qu'il entraîne dans la roue, puisque le périmètre mouillé varie peu, tandis que la section diminue proportionnellement au débit; en tous cas, il est essentiel de remarquer *qu'on ne peut noyer une turbine réglée de cette manière*, sinon, l'eau d'aval, en remplissant le vide laissé dans les canaux mobiles, éteint la vitesse relative de l'eau, et diminue considérablement l'effet utile.

75. — *Obturation partielle.* — Ce moyen permet de supprimer totalement un certain nombre d'orifices; théoriquement, on peut dire qu'il est parfait, puisque les conditions d'écoulement ne sont pas modifiées dans les canaux qui restent ouverts, et que le débit est proportionnel à la puissance développée. Cependant, dans le cas où la turbine est noyée, les aubes des canaux vides produisent sur l'eau d'aval une impulsion nuisible au travail moteur, mais c'est un inconvénient qu'on est obligé d'accepter.

Dans les turbines axiales de tous genres, on arrive, par la multiplication des couronnes (fig. 80), à satisfaire à des conditions variables de débit; ce système a été appliqué principalement à de grandes turbines Jonval [1].

Dans l'application, on réalise l'obturation partielle au moyen de systèmes très nombreux [2], nous examinerons les plus connus.

Le vannage à secteurs (fig. 83), comprend deux obturateurs S, S, diamétralement opposés; les orifices injecteurs ne s'étendent que sur la moitié de la circonférence, c'est-à-dire que la turbine est forcément à injection partielle. Le vannage à rideaux enroulés (fig. 84), ne présente pas cet inconvénient [3]; les deux cônes r, montés sur un même bras, déposent sur les orifices les diaphragmes flexibles B, B, maintenus par leur arête a. Pour ouvrir ou fermer les orifices, il suffit de manœuvrer le bras dans un sens

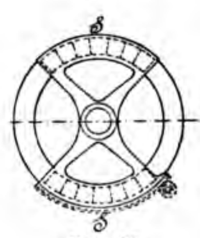


Fig. 83

1. Les turbines établies sur le Rhin, à Schaffhouse, par J. Rieter, sont à couronnes doubles; celles établies par Escher Wyss et Cie, pour la ville de Zurich, sont à couronnes triples; il en est de même de celles récemment installées à Genève pour l'utilisation des forces motrices du Rhône; voir, au sujet de ces belles machines, le rapport de M. *Th. Turettini*. — Genève, librairie H. Georg, 1890.

2. *Publication industrielle* d'Armengaud, t. VIII, pl. 2.

3. Vannage des turbines de la maison Fontaine et Brault. — *Publication industrielle* d'Armengaud, t. XI, pl. 10, et XXIII, pl. 44.

convenable au moyen du secteur denté; les cônes, en enroulant les rideaux, découvrent l'appareil injecteur. Les diaphragmes sont en toile à voile raidie par des lattes rivées.

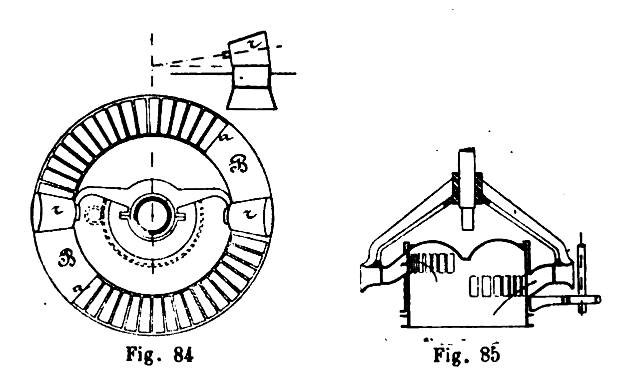


Fig. 84 Fig. 85

Le vannage de Hænel permet également l'injection sur tout le pourtour de la turbine, il comporte différentes variétés ([1]), la figure 85 représente le vannage de la turbine radiale alimentée par dessous ; le manchon mobile, dont le jeu produit l'ouverture ou la fermeture des canaux, est l'appareil injecteur lui-même, dont les compartiments sont déviés par moitié vers le haut et vers le bas; de cette manière ils aboutissent au niveau de la roue tout en se greffant à des hauteurs différentes sur le manchon mobile, on peut donc masquer ou découvrir la *totalité* des orifices. Pour les hautes pressions, ce système présente l'avantage d'être équilibré.

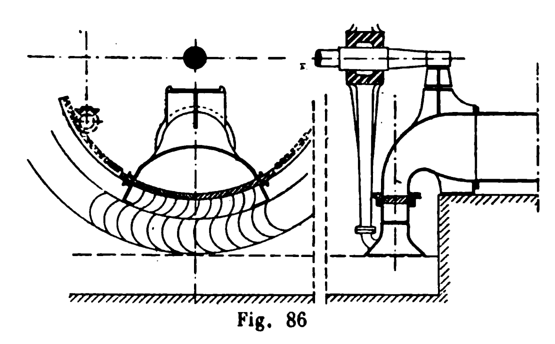


Fig. 86

Le vannage à tiroir (fig. 86) est applicable aux roues tangentielles, ou aux turbines axiales à injection partielle.

1. Meissner. — Pl. 96.

Le vannage à clapets indépendants comporte aussi le système de manœuvre représenté figure 87. Les tiges *t* de chacun des clapets s'engagent, par un galet *g*, dans les rainures d'un tambour mobile T, concentrique à l'arbre de la turbine; ces rainures présentent un profil tel, que les vannettes placées aux extrémités d'un même diamètre s'ouvrent ou se ferment en même temps.

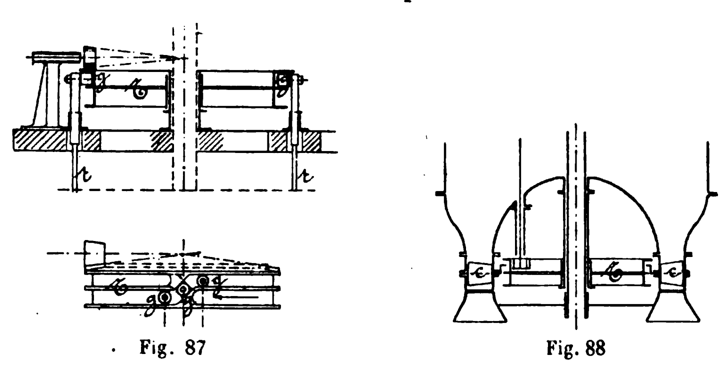


Fig. 87 Fig. 88

Lorsqu'on fait usage de clapets tournants *c* (fig. 88), ceux-ci sont actionnés au moyen de manivelles dont les mannetons s'engagent dans les rainures, le tambour mobile est alors disposé à la hauteur de l'appareil injecteur ([1]).

Le système représenté fig. 89 est applicable aux turbines axiales à faible chute ([2]), parce que l'encuvement permet alors de le loger; il comporte une série de secteurs *s*, glissant dans le sens du rayon et guidés dans ce mouvement par le guide *g* ; ils sont attaqués par les leviers coudés articulés en *o*, lesquels leur renvoient le mouvement au moyen des bielles *b*; une came C,

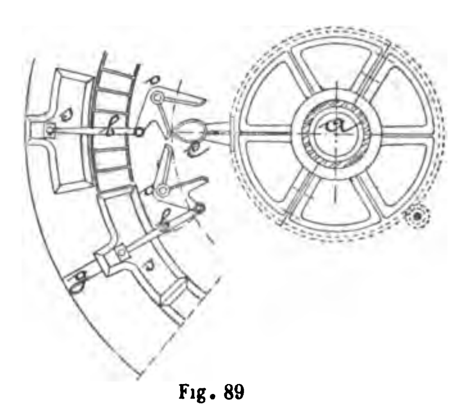


Fig. 89

1. Vannage à admission d'air de Schmidt. — *Praktische Maschinen constructeur*, 1883, p. 182, pl. 38.

2. Pour les turbines à chambre fermée, s'appliquant à de hautes chutes, le système de commande des tiroirs est différent, et comprent une roue à rainures enveloppant la cuve.—*Publication industrielle* d'Armengaud, tome XXX, pl. 28.

tournant autour de l'arbre de la turbine, manœuvre les leviers coudés dans un sens ou dans l'autre. Chaque secteur couvre un certain nombre d'orifices, de sorte que, pour arriver à un réglage parfait, on réserve quelques vannettes verticales à manœuvre indépendante.

§ XIV.

RÉGULATEURS AUTOMATIQUES

76.— Le régulateur à force centrifuge, trop peu puissant pour actionner directement par son manchon l'un quelconque des systèmes précédents (1), doit être combiné, dans la plupart des cas, avec un servo-moteur (2). Le schéma du régulateur adopté depuis longtemps par la maison Rieter et par d'autres constructeurs suisses (3) est représenté figure 90.

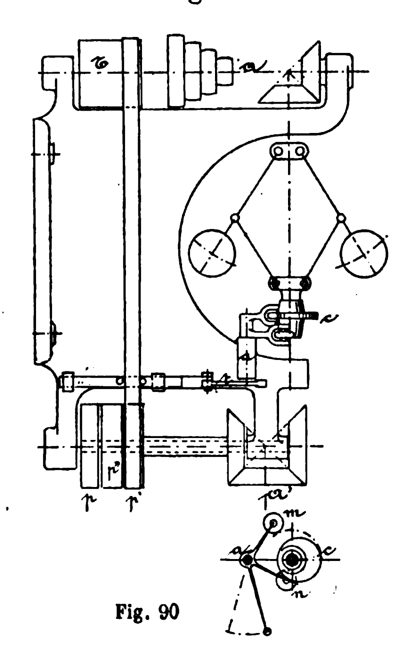


Fig. 90

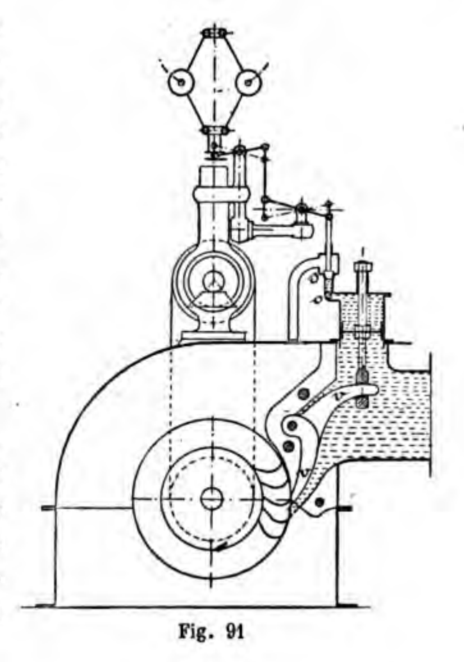
L'arbre A est commandé par la turbine, au moyen d'une transmission qui attaque l'une des poulies d'un cône étagé; son mouvement est renvoyé, par le tambour T, à l'une des poulies p ou p', ou bien à la poulie folle p'', Le manchon du régulateur porte une came c, animée d'un mouvement de rotation continu; cette came attaque le galet m du bras ma ou le galet n du bras na, suivant qu'elle s'élève

1. Premier fascicule.
2. Nous avons vu employer, sur les turbines Jonval d'une filature de Logelbach, près de Colmar, un système qui consiste à faire ouvrir, par le régulateur, une prise d'air sur la colonne d'aval lorsque la vitesse s'accélère; la hauteur motrice est alors réduite; une pompe à air la rétablit lorsque le régulateur ferme la prise d'air atmosphérique. Ce système n'est applicable qu'aux turbines Henschel-Jonval, il agit en réduisant la hauteur motrice, et ne convient que lorsqu'on ne cherche pas à économiser l'eau.
3. Meissner, ouvrage cité. Pl. 52, 53, 56, 57, 59, 60, 73, 74. Le régulateur peut être appliqué aux roues hydrauliques ordinaires. On a eu recours quelquefois au régulateur à compression d'air. *Publication industrielle d'Armengaud*. T. I. Pl. 33 (appareil Molinié).

ou qu'elle s'abaisse; lorsque le manchon du régulateur est vers le milieu de sa course, la came n'est en prise avec aucun des galets, et les laisse en repos. Les bras *ma*, *na*, suivant le déplacement qui leur est communiqué, chassent la courroie sur l'une des poulies *p*, *p'* ou *p''*, et déterminent le mouvement dans un sens convenable, ou l'arrêt de l'arbre A', qui commande l'un quelconque des appareils régleurs faisant l'objet du paragraphe XIII. On voit que, dans ce mécanisme, la transmission fournit à la fois la puissance nécessaire pour mouvoir le vannage, et celle qui déplace la courroie de l'embrayage; le régulateur ne fait que déterminer le *sens* de l'action produite.

La maison H. Quéva et Cie, à Erfurt, emploie un régulateur dû à J. Heyn, dans lequel le manchon soulève l'un ou l'autre des cliquets agissant sur deux roues à rochets mises en relation avec le vannage. L'articulation des cliquets est commandée d'un mouvement alternatif, et détermine la rotation des roues en sens opposé ou leur immobilité (1).

77. — Pour les petits moteurs fonctionnant sous de grandes pressions, la maison Esscher Wyss (2) emploie le régulateur représenté figure 91. La soupape *s* met la face supérieure d'un piston en communication avec la pression atmosphérique; lorsqu'elle est fermée, la pression motrice s'établit au contraire sur le piston, par suite de la communication *o*, qui reste ouverte d'une manière permanente.


Fig. 91

Dans le premier cas, le piston, sollicité sur sa face inférieure par la pression motrice, actionne le clapet *v*, et étrangle l'admission de l'eau, dans le second cas, le piston, sollicité vers le bas, permet au clapet *v* de s'ouvrir.

1. *Régulateur de King*. — *Engineering*, 1833, 1er sem., p. 79.
2. Revue technique de l'Exposition de 1889, 7e partie, p. 52, pl. 17-18.

Un régulateur analogue est employé par H. Quéva et Cie, ainsi que par Ziegler et Bosshard, à Zurich (1).

78. — *Variations de régime des turbines.* — Lorsque, dans une machine à vapeur, le régime est rompu, c'est presque toujours par suite de la variation du couple résistant, le couple moteur conserve une valeur moyenne constante aussi longtemps que le régulateur n'intervient pas ; c'est ce qui rend particulièrement dangereux le défaut de réglage, puisque la machine peut être arrêtée dans le cas où la charge augmente, ou s'emporter lorsqu'elle diminue. Dans les turbines, les choses ne se passent pas ainsi. Si l'on suppose, par exemple, que la charge soit brusquement enlevée, la turbine s'accélère, mais comme elle cesse de fonctionner dans les conditions du maximum d'effet, il se produit un choc à l'entrée des canaux mobiles, et un nouveau régime finit par s'établir pour lequel le travail effectif sur l'arbre s'annule (2). D'ailleurs, les divers systèmes de turbines se comportent différemment à cet égard, suivant que l'accélération est accompagnée d'une augmentation de débit, comme dans le tourniquet hydraulique, ou que le volume débité reste constant, comme dans les turbines à libre déviation de tous genres. On conçoit qu'un retard quelconque apporté dans l'action du régulateur amènera une modification de régime suivie d'oscillations, et que la perturbation sera plus grande et plus prolongée dans le premier cas.

§ XV.

MODE D'ÉTABLISSEMENT DES TURBINES

Au point de vue de leur établissement, les turbines diffèrent surtout par les hauteurs de chute auxquelles elles s'adaptent, et par la position de l'arbre à commander, relativement aux niveaux d'amont et d'aval. En examinant les modes d'installation possibles pour des hauteurs

1. C. Bach.— Ouvrage cité, p.104, pl. II, fig. I à 4, et J. O. Knoke. Die Kraftmaschinen des Kleingewerbes. — Springer, p. 61-66-67.
2. Le tourniquet hydraulique fait exception, puisque son rendement augmente en même temps que la vitesse

croissantes, on rencontre successivement les systèmes que nous allons brièvement décrire (¹).

79. — La disposition en siphon (fig. 92) a été appliquée principalement par Girard, à de très basses chutes, descendant jusqu'à 0ᵐ,70;

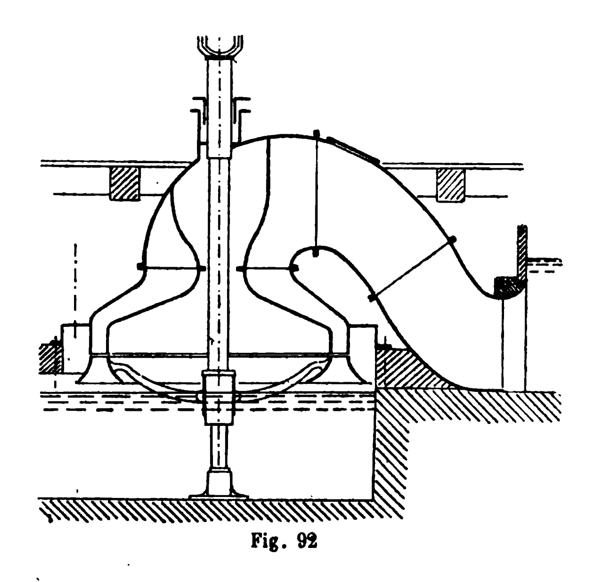


Fig. 92

dans ce cas la turbine axiale ordinaire n'est pas d'un emploi possible, parce que la faible hauteur d'eau qui reste sur l'appareil injecteur a pour effet de produire une dépression de la surface qui rend l'écoulement irrégulier; le siphon prévient la formation de cet entonnoir.

80. — Lorsque la chute augmente, en restant toutefois inférieure à 4 ou 5 mètres, on prend la turbine à chambre d'eau ouverte, et dans le cas où la chute est considérable, on trouve souvent avantage à employer le système Henschel-Jonval, qui permet de raccourcir l'arbre.

81. — Pour des chutes plus élevées (²), on a recours à la turbine à

1. Uhland. — *Praktische Maschinen constructeur*, 1885, p. 281-301-320-364-372, pl. 59, 60, 71, 72, 79, renferme une série d'articles de W. Zuppinger sur l'établissement des moteurs hydrauliques. Voir aussi Meissner, ouvrage cité, ainsi que le Portefeuille de l'École Polytechnique de Carlsruhe, publié sous la direction du professeur *Hart*, Heidelberg, Basserman, 1877.

2. Les moteurs d'Assling-Sava, établis par la maison Ganz et Cie de Buda-Pest, sont de remarquables spécimens de turbines axiales à chambre fermée. — *Engineering*, 1891, 2e sem., p. 307.

chambre d'eau fermée (fig. 93); l'eau est amenée par une conduite en tôle ou en fonte T, T, à une chambre étanche C, que l'arbre traverse de part en part. Le diamètre de la conduite est calculé de manière à ce que la vitesse de l'eau n'y dépasse pas 1 mètre par seconde, auquel cas

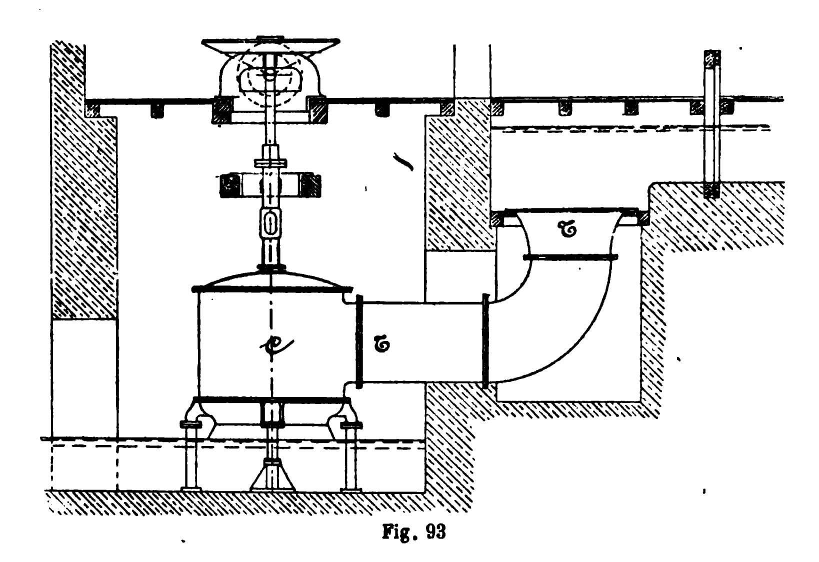


Fig. 93

la perte de charge est fort réduite ($0^m,12$ pour une conduite de 1 mètre de diamètre et de 100 mètres de longueur, d'après la formule de Darcy). Les turbines dont on a fait usage dans les installations mécaniques de percement des grands tunnels ont été établies de cette manière.

Les conduites, quelquefois longues de plusieurs kilomètres, sont placées à fleur de sol, et subissent légèrement les influences de la dilatation; pour les petits diamètres, on prend parfois des joints à dilatation à bourrages, convenablement espacés.

Il peut être nécessaire, pour éviter les coups de bélier lors de la fermeture brusque du vannage, d'établir un tuyau de décharge supplémentaire de plus petit diamètre, dont la valve s'ouvre lorsqu'on ferme le vannage de la turbine.

Lorsque l'eau est prise à des torrents ou à des rivières charriant du gravier, du sable, etc., il faut disposer, près de la prise d'eau, une chambre de dépôt qui peut être facilement nettoyée par des vannes de fond. Une chambre de ce genre à été établie pour les turbines de Gœschenen, à la prise d'eau de la Reuss, à la tête nord du tunnel du Saint-Gothard.

82. — Le cas échéant, on pourra profiter de la propriété que possèdent les turbines Jonval, de pouvoir être établies horizontalement (fig. 56), on évitera ainsi, dans la transmission, l'emploi des roues coniques, presque toujours indispensables dans le cas des arbres verticaux.

83. — Enfin, lorsque la vitesse exigée par les opérateurs est moindre que celle à laquelle conduirait une turbine à injection complète, soit que l'opérateur exige une marche très lente, ou que la chute soit très élevée, on a recours aux turbines partielles (fig. 86) ; celles-ci conviennent particulièrement pour actionner des pompes ou des compresseurs d'air. La maison Rieter [1] a même établi des turbines de ce genre dans lesquelles l'arbre est placé sous une certaine inclinaison, pour actionner un établissement placé sur une hauteur.

Les turbines employées comme moteurs de la petite industrie et actionnées par l'eau des distributions (fig. 91) appartiennent également au type à injection partielle, et peuvent même ne comporter qu'un seul orifice distributeur [2].

84. — Dans presque toutes les turbines à axe vertical, on emploie une disposition d'arbre qui reporte le pivot au-dessus du niveau d'amont, ce qui facilite le graissage, la visite et l'entretien de cette

1. Voici, à titre de renseignement, les données habituellement exigées par cette maison pour faire l'installation d'une turbine :

1° Chute normale effective entre le niveau d'amont et celui d'aval, à l'endroit du moteur;

2° Indiquer si la chute varie lorsque le débit change; le cas échéant, donner les variations des deux niveaux, et la durée annuelle de ces variations;

3° Indiquer la profondeur d'eau dans les canaux d'amont et d'aval à la chute normale;

4° Indiquer le volume maximum qui doit être utilisé par la turbine, ainsi que le volume minimum dans les basses eaux;

5° Le degré de pureté de l'eau, ou la nature des matières charriées;

6° L'industrie à laquelle la turbine est destinée, et le nombre de tours de l'arbre premier moteur. Si l'on indique seulement la force effective désirée de la turbine, donner la chute et le volume disponibles;

7° Pour les hautes chutes, donner la longueur, la chute totale et les coudes de la conduite.

. . . .

8° Donner un plan de situation avec profil longitudinal et coupe transversale du terrain et des canaux; indiquer l'emplacement et la disposition des bâtiments.

2. *Publication industrielle* d'Armengaud, t. XXIV pl. 27.

pièce, ordinairement très chargée et exposée à se gripper [1]. A cette fin, l'arbre A (fig. 94) est creux et présente à son sommet, au-dessus du niveau d'amont ou en tous cas en dehors de la chambre d'injection, un renflement qui se termine par un plateau P, accouplé au plateau P' d'un manchon que porte le prolongement A'. de l'arbre. Le pivot repose sur une tige centrale T, solidement établie dans un sabot monté sur le fond du bief d'aval, en dessous de la turbine; cette tige centrale supporte un godet fixe G, dans lequel repose la lentille fixe L' en acier fondu trempé, ou en fer cémenté; l'extrémité inférieure de l'arbre A' repose sur le support fixe par l'intermédiaire d'une lentille analogue L''' (placée à tenon dans l'arbre) et de la lentille folle en bronze L''. On peut, en agissant sur l'écrou E, relever plus ou moins la turbine lorsque l'usure des lentilles rend cette opération nécessaire pour réduire le jeu entre la partie fixe et la partie mobile. Il est très utile, pour l'établissement du pivot, de faire le calcul de la réaction verticale (39).

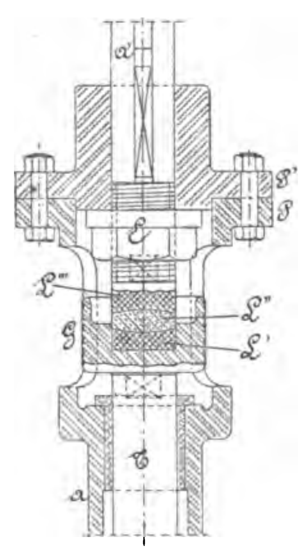


Fig. 94

1. Dans les turbines d'Assling-Sava, de 700 à 900 chevaux de puissance, la charge sur le pivot est de 17,500 kilogrammes; M. Radinger a eu l'idée d'en faire supporter la moitié par un plongeur qui termine l'arbre à sa partie inférieure, plongeur sur lequel s'exerce la pression d'un accumulateur. Le pivot proprement dit, établi au-dessus de l'eau, est graissé par une pompe à huile. — *Engineering*, 1891, 2e sem., p. 307.

CHAPITRE III

Machines dans lesquelles l'eau agit par pression ou Machines à colonne d'eau.

85. — Tous les dispositifs admis dans les pompes agissant par pression peuvent être employés comme moteurs [1], ils se rangent en deux catégories principales : les mécanismes à rotation continue ou toutes les variétés connues de capsulismes, et les machines à mouvement alternatif ; ces dernières seules permettent d'obtenir l'étanchéité voulue de la capacité variable qui constitue le récepteur, les appareils à rotation ont pu être acceptés comme pompes dans le cas d'élévations à faible hauteur, les fuites n'ont alors rien d'exagéré, mais ils n'auraient aucune raison d'être comme moteurs, puisqu'ils seraient, à tous points de vue, inférieurs aux turbines. Comme, d'ailleurs, leurs fuites seraient à craindre dans le cas des grandes hauteurs motrices, il ne nous reste à examiner que les moteurs à piston, les seuls qui aient une grande importance industrielle.

§ I.

MOTEURS A ACTION DIRECTE.

Les machines à piston sont d'origine déjà ancienne [2], elles comportent un mécanisme plus ou moins analogue à celui des moteurs à va-

1. 7e fascicule.
2. Bélidor, dans son *Architecture hydraulique*, édition de 1782, décrit une machine à colonne d'eau de son invention : elle est à cylindre horizontal et actionne une pompe; il décrit aussi la machine de Denisard et de la Dueille. Les machines à colonnes d'eau ont surtout été employées au commencement du siècle, par Reichenbach, qui s'en servit pour refouler la saumure dans une conduite de 120 kilomètres de longueur, s'étendant de Reichenhall à Rosenheim, dans le sud de la Bavière. Huit de ces machines, et quelques roues hydrauliques, produisaient une élévation totale de 960 mètres; l'une d'elles, fonctionnant sous une chute motrice de 110 mètres, élevait l'eau d'un seul jet à 380 mètres de hauteur (Rühlmann).

peur; le fonctionnement comprend une admission d'eau motrice pendant la course directe, et l'échappement pendant la course rétrograde. Les moteurs sont à simple ou à double effet, suivant que le piston présente une ou deux faces actives. L'incompressibilité de l'eau éloigne l'idée de toute action à détente, le distributeur est donc toujours de la plus grande simplicité.

86. — La machine à colonne d'eau à simple effet convient surtout pour actionner des pompes, et présente alors deux dispositions diffé-

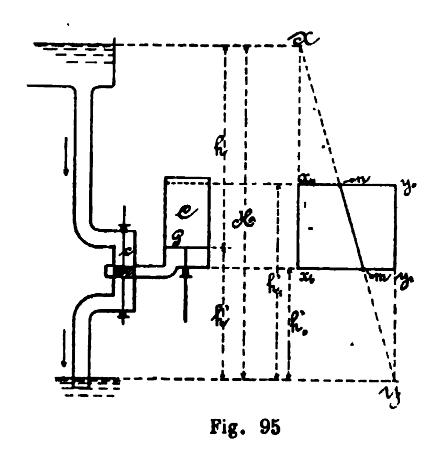


Fig. 95

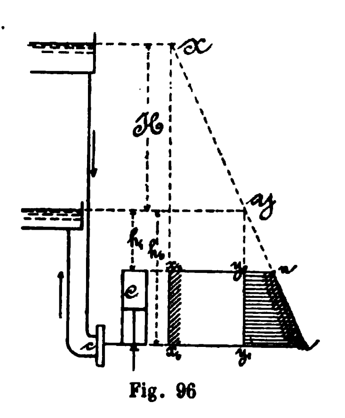


Fig. 96

rentes, représentées figures 95 et 96 ; dans la première, le cylindre est placé en un point intermédiaire de la chute, tandis que, dans la seconde, il est monté sous le niveau d'aval.

La position du cylindre, qui n'a aucune influence sur le travail recueilli, présente de l'intérêt au point de vue de la loi suivant laquelle se développent les efforts moteurs et résistants.

On reconnaît facilement, dans le cas de la figure 95, que l'effort moteur a pour valeur pendant l'ascension du piston :

$$\Pi S h$$

S étant la section du piston, et h la hauteur d'eau sur la face motrice A l'échappement, l'effort moteur est :

$$\Pi S h'$$

h' étant la hauteur de la face inférieure du piston au-dessus du niveau d'aval, à la condition, toutefois que cette hauteur soit toujours inférieure à la colonne d'eau barométrique.

On voit que l'action motrice est partagée d'une certaine manière entre les deux courses; on peut, du reste, la représenter par un diagramme simple en fonction de la position du piston, en portant à partir de de $x_0\, x_1$ les quantités x_0m, x_1n egales à l'action motrice au bas et au sommet de la course, respectivement, et en joignant m et n par une ligne droite [1] ; la ligne $y_1\, y_0$ parallèle à $x_0\, x_1$ et menée à une distance de celle-ci égale à π S H complète le diagramme, dont la signification se comprend à première vue.

Pendant l'ascension du piston, l'action motrice diminue depuis

$$\Pi\ S\ (H - h'_0) \text{ jusqu'à } \Pi\ S\ (H - h'_1)$$

Pendant la descente du piston, l'action motrice diminue depuis

$$\Pi\ S\ h'_1 \text{ jusqu'à } \Pi\ S\ h'_0$$

Le travail de chacune des courses est représenté par les surfaces $x_0\, m\, x_1\, n$ et $n\, y_0\, m\, y_1$.

En plaçant le cylindre à une hauteur différente, on déplace simplement la ligne $m\ n$ sans changer son inclinaison; ainsi, dans le cas de la figure 96, le travail moteur pendant le soulèvement du piston est représenté par $x_0\, m\, x_1\, n$, il est notablement supérieur à celui de la chute, mais le travail de l'échappement est résistant (par conséquent négatif), et égal à la surface $y_0n\, y_1m$.

On possède donc, dans le moteur à simple effet, une latitude précieuse qui n'existerait pas dans la machine à double effet, car on peut, pour ainsi dire, partager le travail moteur d'après les résistances à vaincre, lorsque celles-ci sont inégales ; ainsi, le premier système conviendrait pour actionner, par exemple, une pompe à double effet, sile poids de l'attirail de commande justifiait l'inégalité des travaux entre les deux faces, tandis que le système de la figure 96 ne pourrait servir qu'à actionner une pompe à simple effet, en admettant que le poids mort des tiges soit très considérable, et supérieur à ce qui est nécessaire pour le refoulement.

1. La ligne mn prolongée rencontre les verticales x_0x_1 et y_0y_1 en des points X, Y, qui se trouvent sur les niveaux prolongés.



Cette dernière combinaison est due à Jordan, qui l'a employée en Hanovre; elle se retrouve dans la machine établie vers 1835 à Huelgoat (Finistère), par Juncker, l'une des plus importantes qui aient été construites.

Ces moteurs avaient été imaginés pour actionner des pompes, à une époque où l'on imitait les dispositions des machines d'exhaure à vapeur et à simple effet; plus tard, les moteurs à rotation ayant été substitués à ceux à action directe, les mécanismes de distribution ont pu être notablement simplifiés.

87. — Aux dispositifs déjà examinés, viennent s'en ajouter deux autres, employés par Reichenbach; le premier, (fig. 97), est à double effet, et convient pour produire des efforts égaux dans les deux courses; A est la conduite d'arrivée, E celle de décharge ; le distributeur est formé de deux pistons *pp* qui produisent l'admission ou l'échappement, suivant qu'ils découvrent les lumières du cylindre par leurs arêtes extérieures ou par leurs arêtes intérieures; l'ouverture et la fermeture de l'admission sur une face du piston moteur coïncident toujours avec l'ouverture et la fermeture de l'échappement sur l'autre face.

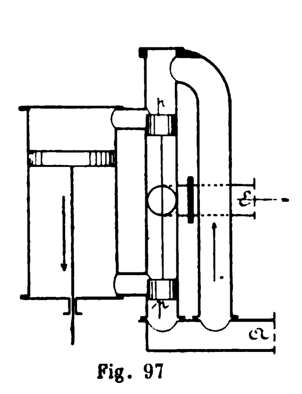


Fig. 97

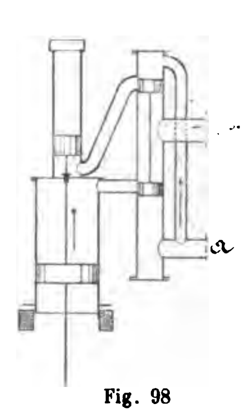


Fig. 98

Dans l'autre disposition (fig. 98), deux pistons de diamètres différents sont conjugués sur la même tige, et chacun d'eux fonctionne à simple effet; il y a, entre les efforts produits dans les deux courses, une inégalité voulue, exigée par la nature de l'opérateur à commander, mais on peut même la faire disparaître.

On reconnaît facilement la possibilité de réaliser bien d'autres combi-

naisons, qu'on peut du reste rattacher à celles des pompes à mouvement alternatif; ainsi, la disposition de la figure 98 équivaut à celle que nous avons caractérisée, dans l'exposé des pompes, (7e Fascicule) par la notation **B**—**b**.

88. — Les distributeurs à piston ont toujours été employés de préférence à ceux par tiroirs, usités dans les machines à vapeur; en effet, les orifices de passage doivent être relativement très grands, même pour des vitesses de piston modérées, car toute perte de charge entraine avec elle une perte proportionnelle de rendement; d'autre part, les pressions motrices sont toujours fort grandes, et bien supérieures souvent, à celles des machines à vapeur ; le manœuvrage des tiroirs exigerait donc un effort très grand, tandis que les pistons distributeurs, équilibrés sur tout le pourtour, ne demandent, pour être déplacés, que l'effort modéré nécessaire pour vaincre le frottement de leur garniture, à la condition qu'on ait le soin de les équilibrer dans le sens de la tige en les groupant convenablement : on reconnaît facilement que les pistons distributeurs, conjugués comme dans les figures 97 et 98, satisfont à cette condition.

89. *Distribution des machines à action directe.* — Dans ces machines, les distributeurs doivent être mis en mouvement lorsque la course va s'achever dans un sens ou dans l'autre, mais il est impossible de les attaquer au moyen d'un heurtoir qui serait placé sur la tige motrice ou sur son prolongement, car leur masse est beaucoup trop considérable pour prendre instantanément une vitesse finie, si ce n'est en donnant lieu à des chocs violents. On a donc recours à une petite machine hydraulique secondaire, dont le distributeur a très peu de masse, et qui constitue une sorte de ***servo-moteur*** commandant la distribution du moteur principal.

Nous décrivons la distribution de la machine de Huelgoat, plus connue que celles de Reichenbach et de Jordan, quoique basée absolument sur les mêmes principes.

Dans la figure 99, C est le cylindre moteur à simple effet,

H, le piston,

T, la tige actionnant l'opérateur, qui est ici une pompe foulante à simple effet placée très bas,

t, une tige de distribution qui se meut avec le piston, et porte les buttoirs b, b_1,

L, la lumière servant alternativement à l'introduction et à l'échappement,

A, la colonne motrice,

E, la colonne de fuite, située en contrebas du niveau d'aval, comme dans la figure 96,

P, le piston distributeur, représenté dans sa position moyenne,

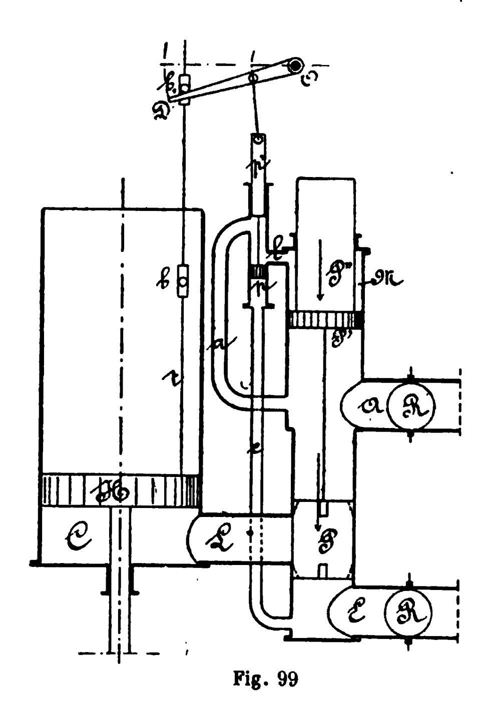


Fig. 99

P', un piston de section plus grande, lié au précédent,

P'', un plongeur, réduisant considérablement la section utile de la face supérieure du piston P',

l, un conduit, destiné à établir, dans l'espace annulaire M, soit la pression de la colonne A, soit celle de la colonne E,

p, le petit piston distributeur, qui, d'après sa position, fait communiquer la lumière *l* avec le tuyau *a* ou avec le tuyau *e*,

p', un piston de même section lié au précédent, et destiné à l'équilibrer,

OD, un levier pivotant autour de son extrémité fixe O, et recevant son mouvement des buttoirs b b_1, lorsque ceux-ci arrivent vers l'extrémité

de leur course. Ce levier est relié, par une bielle, au groupe des petits pistons *p p'*.

On remarquera d'abord que l'ensemble des pistons *p,p'*, présente fort peu de masse, et peut être actionné par choc sans inconvénient ; ces pistons forment en outre, tant par leur poids que par les pressions auxquelles ils sont soumis, un système qui reste en équilibre indifférent ; quant à l'ensemble des pistons P, P', P'', il est disposé de telle manière qu'il s'élève par l'effet des pressions lorsque l'espace M communique avec le canal *e*, tandis qu'il descend lorsque cet espace est en relation avec la colonne A, par l'intermédiaire du petit canal *a*.

Dans la position de la figure, le piston moteur H est arrivé au bas de sa course, le butoir supérieur b_1 a déjà entraîné le levier OD, et, avec lui, les pistons *p p'* ; le piston distributeur P se meut donc vers le bas, et, après avoir fermé la lumière du côté de l'échappement, il est sur le point de l'ouvrir à l'admission, pour fournir la course motrice qui va commencer.

Les bords du piston P sont creusés de cannelures obliques, qui ont pour effet d'étrangler ou d'ouvrir progressivement la lumière L; on évite ainsi la mise en mouvement ou l'arrêt brusques de l'eau motrice, dont l'inertie est considérable.

Malgré cet artifice ingénieux, la vitesse de la machine doit rester très faible ; on la règle au moyen des registres R, R.

Voici quelques données relatives à la marche de ce moteur :

Diamètre du piston	1^{m}030
Course	2 ,300
Diamètre des tuyaux.	380
Hauteur moyenne de la colonne A.	74 ,000
» » » E.	14 ,000
Nombre de coups simples par minute.	5 $^1/_2$
Vitesse moyenne du piston, arrêts déduits . . .	0^{m}20
» » de l'eau dans les colonnes. . .	1 ,46
Travail correspondant à la puissance absolue de la chute.	140 chev.
Travail disponible sur la tige	90 —

Rühlmann [1] donne un tableau fort complet, relatif à un grand nombre

1. Allgemeine Maschinenlehre, t. I.
Voir aussi *Praktische M. C.*, 1872, pl. 32; 1874, pl. 4; 1876, pl. 21; le même recueil renferme le dessin d'une petite machine horizontale à double effet actionnant une pompe, par J. Mikula, 1886. p. 24, pl. 54.

de machines exécutées, et dont la plus ancienne remonte à 1749; d'après ses relevés, le rendement des machines de cette espèce est en moyenne de 0,825, en tenant compte du moteur seulement; mais ce chiffre est obtenu en divisant le rendement en eau élevée par celui de la pompe seule, calculé au moyen d'une formule contestable de Weisbach; il ne mérite pas une entière confiance. A la rigueur, ce chiffre élevé n'a cependant rien qui doive étonner, les seules pertes possibles sont dues aux résistances passives, aux fuites, aux pertes de charge, et à la force vive (presque négligeable) conservée par l'eau à la sortie.

La résistance passive la plus importante provient du frottement du piston moteur, qui dépend des conditions du montage, et non de la pression; l'influence relative de ce frottement diminue au fur et à mesure que la colonne motrice augmente et *vice-versa*.

Les machines à action directe ne conviennent qu'à des opérateurs spéciaux, principalement les pompes, comme nous l'avons dit; on en trouve aussi des exemples dans la commande des ventilateurs à cloches (7e fascicule).

§ II.

MACHINES A ROTATION.

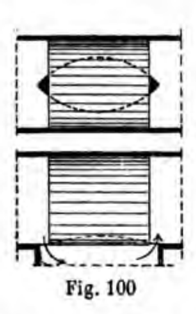
90. — Dans ces moteurs, la course du piston est limitée cinématiquement par les points morts, la distribution ouvre et ferme les lumières à ces instants précis [1]; il ne peut surtout y avoir aucun retard dans l'ouverture des lumières d'échappement, ni aucune avance dans leur fermeture, car l'inertie des organes à rotation aurait pour effet de produire des ruptures.

La distribution est disposée comme dans la figure 97, sauf que le mouvement des pistons distributeurs est commandé par un excentrique calé à angle droit sur la manivelle, et dont l'excentricité est égale à l'épaisseur des pistons ou à la largeur des lumières.

En supposant que cet état de choses ait d'abord été établi avec toute la précision désirable, il ne tarderait pas à être altéré par l'usure des

1. Il y a exception à cette règle pour le moteur Hoppe et pour la machine à poches d'air de Mayer, qui seront examinés plus loin.

articulations, et les inconvénients signalés ci-dessus se produiraient. Pour les éviter, on peut avoir recours, pour les pressions modérées, à un matelas d'air interposé entre l'eau et le piston, comme dans quelques moteurs qui seront examinés plus loin ; mais, pour les pressions élevées, l'air se dissout dans l'eau et est difficile à renouveler. Un autre moyen consisterait à placer aux extrémités du cylindre des soupapes de sûreté, ou, de préférence, des pistons à ressorts ou à contrepoids [1] qui éviteraient les accidents dûs à l'incompressibilité de l'eau ; enfin, un troisième moyen peut être employé [2], qui consiste à donner aux lumières une forme lenticulaire et une longueur plus grande que celle du distributeur (fig. 100). De cette manière, lorsque la machine est au point mort, les deux compartiments du cylindre ne sont pas complètement isolés de la conduite ; il est vrai que cette disposition donne lieu à une perte d'eau, mais on s'efforce de la diminuer en donnant aux parties découvertes de la lumière une section aussi faible que possible. Nous rencontrerons plus loin un quatrième système qui évite toute perte d'eau (108).


Fig. 100

91. — Ces divers moyens, propres à empêcher les ruptures qui proviendraient de défauts dans la distribution, ont une autre utilité, ils peuvent amortir les coups de bélier qui résulteraient d'une variation trop brusque de vitesse dans les conduites de grande longueur. Il est évident que tout ce qui peut réduire les accélérations de l'eau dans les conduites contribue à écarter le danger du coup de bélier, et à ce point de vue, la conjugaison convenable de plusieurs moteurs peut être un excellent moyen ; toutefois l'accouplement des moteurs, bien qu'il réduise le rapport existant entre les débits maximum et minimum de la conduite, ne diminue pas toujours la valeur maximum de l'accélération ; ainsi, dans le cas de deux moteurs conjugués sur manivelles à angle droit, des-

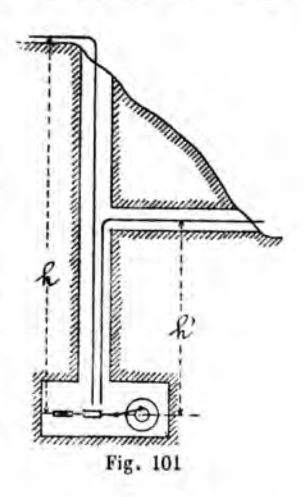


Fig. 101

1. 7e fascicule, nos 53 et 54.
2. Étude sur les machines d'épuisement du puits « Kœnigin Marie » à Clausthal, par Hoppe. — Revue universelle des Mines, 2e série, t. XI, p. 223.

servis par une conduite unique, l'accélération la plus grande est la même que celle qui se produirait dans un moteur à cylindre unique alimenté par la même conduite. L'accouplement de deux moteurs n'est efficace au point de vue des coups de bélier que pour autant qu'on emploie des réservoirs d'air [1]; malheureusement, la solubilité de l'air rend impossible l'usage des réservoirs quand il s'agit de hautes pressions.

On peut citer comme exemple de machine à colonne d'eau à rotation, le moteur de fond établi à Clausthal pour l'épuisement de la mine *Kœnigin Marie.*

La hauteur motrice est produite par des eaux de surface (fig. 101), dont on peut se débarrasser par une galerie latérale d'écoulement; mais pour éviter l'emploi de jeux de pompe et de maîtresses-tiges, on a établi le moteur en contrebas de ce niveau inférieur; voici quelques données relatives à cette machine :

$$h = 593^{m}$$

$$h' = 225^{m}$$

Hauteur motrice : $H = h - h' = 368$ mètres.

Course des pistons.	625^{mm}
Diamètre des pistons	310

Diamètre des pistons distributeurs : 304 millimètres.

L'arbre fait 12 à 16 tours par minute ; pour le plus élevé de ces deux chiffres, la vitesse moyenne des pistons est de 0^{m},333, la vitesse dans les conduites est quatre fois plus considérable.

Le rendement global des machines et des pompes n'a atteint aux expériences que 0,35, lorsque la vitesse était de 12 tours par minute ; il est descendu à 0,15 lorsque cette vitesse n'était que de 3 tours ; il a été établi par les jaugeages que ces chiffres médiocres proviennent des fuites aux distributeurs et surtout aux pistons moteurs ; ces derniers n'ont pas de garnitures, ils sont seulement creusés de sillons annulaires, et l'influence des fuites diminue lorsque la vitesse augmente. Les pertes

1. Cette question est du même ordre que celle qui est traitée avec plus de développement dans le 7e fascicule.

de charge, calculées avec beaucoup de soin par M. Hoppe [1] ne paraissent pas dépasser, depuis l'entrée de l'eau à la surface, jusqu'à la sortie dans la galerie d'écoulement, les 0,08 de la hauteur motrice.

§ III.

ÉTUDE HYDRODYNAMIQUE DES MACHINES A COLONNE D'EAU.

92. — Nous avons décrit, dans les numéros précédents, le fonctionnement des machines à piston, en supposant que les pressions s'y développent suivant la loi hydrostatique, mais il n'en serait ainsi que si la vitesse était très faible ; or les moteurs à rotation *rapide* ont pris une certaine importance industrielle; pour ceux-ci surtout, il y a lieu de se préoccuper très sérieusement des changements de vitesse de la masse liquide en mouvement, qui sont accompagnés de forces d'inertie plus ou moins grandes. Sans être négligeables pour les machines à action directe, ces forces sont beaucoup réduites par le fait que les pistons sont à longue course et se meuvent fort lentement, et que, vers les changements de sens de la vitesse, les lumières sont recouvertes, puis découvertes d'une manière progressive.

D'ailleurs, les pompes à mouvement alternatif soulèvent les mêmes problèmes, et les machines examinées au paragraphe I devraient être reprises en tenant compte du mouvement varié, dont la loi, inconnue *a priori*, peut être découverte en résolvant les équations du mouvement. En cherchant ensuite la valeur de la pression sur les pistons à chaque instant, on s'assurerait si elle ne dépasse pas les limites permises pour la sécurité. En outre, cette pression ne peut évidemment devenir négative, sinon, le mouvement traduit par les équations ne serait pas possible, et, à certains moments, les colonnes liquides quitteraient les pistons du moteur ou de la pompe.

Les moteurs à rotation sont pourvus d'un volant plus ou moins lourd, qui sert à régulariser la vitesse communiquée aux opérateurs, et qui réduit donc, entre des limites assez restreintes, les écarts de la vitesse angulaire de l'arbre. Pour l'étude du mouvement de la colonne d'eau,

1. Revue universelle des Mines, 2e série, t. XI. — Traduction de R. Boulvin.

nous pouvons supposer, sans grande erreur, que la vitesse de rotation est uniforme, le moteur peut alors être séparé de l'opérateur, chacun d'eux est supposé sans influence sur le mouvement du volant.

93. — *Equation du mouvement varié.* — On sait que [1], pour tout tronçon de conduite tel que MN (fig. 102) on a, lorsque le mouvement permanent n'est pas établi :

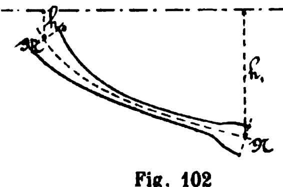


Fig. 102

$$\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s_1}\frac{dv}{dt}ds = h_1 - h_0 + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

h_0 est la hauteur du centre de la section M, sous un plan quelconque de comparaison;

s_0, la distance mesurée sur l'axe, depuis un point initial jusqu'au centre de la section;

p_0, v_0, sont la pression et la vitesse dans la section;

h_1, s_1, p_1, v_1, sont les éléments analogues pour la section finale.

Le cas qui se rencontre le plus fréquemment est celui où la conduite présente une partie cylindrique très longue; les variations de section ne se produisent alors qu'aux extrémités, et l'on peut écrire, sans grande erreur :

$$(1)\qquad \frac{1}{g}(s_1 - s_0)\frac{dv}{dt} = h_1 - h_0 + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g},$$

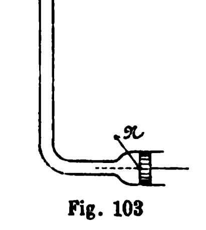
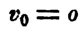


Fig. 103

Dans le cas de la figure 103, on aurait, en outre :



$$v_0 = o$$

v_1 serait la vitesse de l'eau dans la section évasée N.

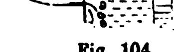


Fig. 104

Il est vrai que cette disposition ne saurait être réalisée à l'entrée du cylindre d'une machine à colonne d'eau, car, en supposant même que

1. Voir, pour la démonstration de cette propriété, le 7e fascicule, n° 25.

la lumière soit placée dans le couvercle du cylindre, on aurait un élargissement brusque, rompant la continuité de la colonne ; on pourrait alors appliquer l'équation jusqu'au point N', (fig. 104) et tenir compte de la perte de charge produite par le choc entre les sections N' et N.

La complication des conduits est toujours assez grande dans le voisinage du cylindre, et les lumières ne sont que partiellement découvertes, si ce n'est pour la position moyenne du piston ([1]), ce qui amène de nouvelles difficultés, et nous nous bornerons à examiner le cas, purement hypothétique, où les choses se passent comme dans la figure 103, c'est-à-dire que nous supposerons que la colonne ne présente, à l'entrée où à la sortie du moteur, que des changements progressifs de section, et que le distributeur découvre instantanément l'orifice du tuyau.

PREMIER CAS

MACHINES A BIELLES LONGUES.

94. — Nous admettrons d'abord que l'obliquité de la bielle est négligeable (pour la machine de Clausthal, cette hypothèse serait permis sans erreur sensible, la bielle ayant une longueur égale à 10 fois le rayon de manivelle). Le système à étudier est alors représenté par la figure 105.

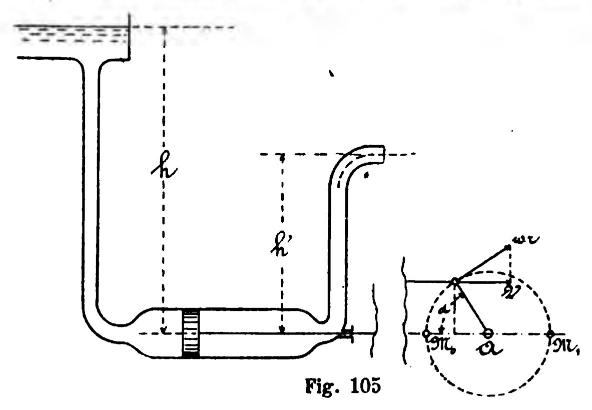


Fig. 105

Soit h, la hauteur comptée depuis le niveau de la prise d'eau jusqu'à l'axe du cylindre ;

1. On peut établir facilement, qu'en négligeant les obliquités de la bielle motrice, ainsi que de la barre d'excentrique commandant les pistons distributeurs, l'ouverture de la lumière est proportionnelle à la vitesse du piston moteur à chaque instant, et qu'ainsi *la vitesse de l'eau dans la lumière est constante.* Cette propriété résulte de ce que, dans les machines à colonne d'eau, l'excentrique doit être calé à angle droit sur la manivelle, mais elle n'est d'aucun secours pour l'étude que nous poursuivons.

ω, la vitesse angulaire de l'arbre A, supposée uniforme :
α, l'angle de la manivelle, compté depuis le point mort M_o ;
r, le rayon de la manivelle ;
V, la vitesse du piston à l'instant considéré, et S, sa section ;
v, la vitesse dans la colonne, au même instant ;
s, la section de la conduite, et
l, sa longueur.
On peut poser immédiatement :

$$V = \omega r \sin \alpha$$

$$\frac{dV}{dt} = \omega^2 r \cos \alpha$$

d'où :

$$v = \frac{S}{s} \omega r \sin \alpha$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S}{s} \omega^2 r \cos \alpha$$

En appliquant l'équation (1) pour la colonne motrice, on devra faire $p_o = p_a$ et $s_1 - s_o = l$; p_1 sera la pression sur la face motrice du piston :

$$\frac{1}{g} l \frac{dv}{dt} = h + \frac{p_a - p}{\Pi} - \frac{V^2}{2g}$$

d'où :

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h - \frac{\omega^2 r^2}{g} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} + l \frac{S}{s} \frac{\cos \alpha}{r} \right)$$

pour que $\frac{p}{\Pi}$ reste positif pendant toute la course directe, il faut que le second membre le soit au moment où le terme négatif atteint sa valeur la plus grande ; les deux valeurs de α qui annulent la dérivée de ce terme répondent à

$$\sin \alpha = o$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{r} \frac{S}{s}$$

La deuxième égalité est inadmissible dans tous les cas pratiques, puisque, en général

$$\frac{l}{r} \frac{S}{s} > 1$$

La valeur $\sin\alpha = o$ correspond bien au maximum du terme négatif lorsque

$$\alpha = o$$

et au minimum, lorsque

$$\alpha = 180^{\circ}$$

C'est donc au point mort M_o qu'on devra avoir

$$\frac{p}{\Pi} > o$$

et l'on sera certain que le liquide suit constamment le piston; on trouve ainsi :

(I) $$\omega^2 r \overline{\overline{<}} \frac{g}{l} \frac{s}{S} \left(h + \frac{p_a}{\Pi}\right)$$

Dans le cas d'une colonne verticale, on a $l = h$, et conséquemment la condition deviendrait :

(I') $$\omega^2 r^2 \overline{\overline{<}} gr \frac{s}{S} \left(1 + \frac{10.33}{h}\right)$$

ωr est la vitesse maximum du piston pendant le tour; il est donc d'autant plus difficile d'atteindre une vitesse élevée, que les tuyaux ont une section moindre, que la course du piston est plus faible et que la hauteur h est grande; toutefois, étant donné que h atteint toujours au moins 30 mètres dans la plupart des cas, on voit que l'augmentation de cette hauteur ne réduit la vitesse possible que dans une mesure assez faible.

Si la colonne motrice n'est pas verticale, on a nécessairement

$$l > h$$

et la vitesse limite est réduite, ce qu'on pouvait du reste prévoir, car l'inertie de la masse augmente sans qu'il en soit de même de la hauteur qui produit son accélération

Représentation graphique de la loi des pressions motrices. — Pour représenter graphiquement la loi des hauteurs motrices sur le piston,

il suffit de décrire, sur la course $M_0 M_1$ (fig. 106) une demi-circonférence, et de mener, à la distance

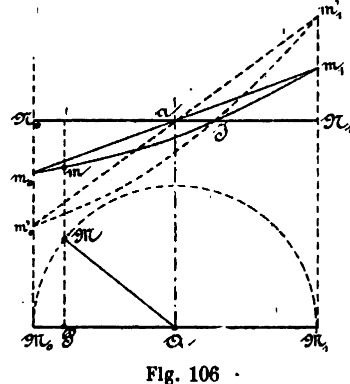


Fig. 106

$$h + \frac{p_a}{\Pi}$$

la parallèle $N_0 N_1$, puis, de construire le terme soustractif :

$$\frac{\omega^2 r^2}{g} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} + l \, \frac{S}{s} \, \frac{\cos \alpha}{r} \right)$$

Lorsque le coefficient $\frac{lS}{sr}$ est grand, on peut négliger $\sin^2\alpha$, et il suffit de calculer une seule valeur $N_0 m_0$, du terme restant, qui, étant proportionnel au cosinus de l'angle α, sera représenté par les ordonnées de la ligne droite $m_0 m_1$, comptées à partir de $N_0 N_1$; la loi des hauteurs $\frac{p}{\Pi}$ sur la face motrice du piston sera donc donnée par le diagramme $M_0 \, m_0 \, m_1 \, M_1$.

Lorsque ω augmente, l'inclinaison de $m_0 m_1$ s'accentue très rapidement, mais cette ligne passe toujours par le point a.

En tenant compte de $\frac{\sin^2 \alpha}{2}$, les points $m_0 m_1$ ne sont pas changés, la loi des hauteurs motrices effectives devient une parabole passant par ces points.

On pourrait aussi examiner l'effet des pertes de charge dues au frottement des tuyaux, ainsi qu'aux coudes de la conduite ; elles retranchent, de la hauteur motrice, une ordonnée proportionnelle au carré de la vitesse de l'eau à chaque instant, c'est-à-dire proportionnelle à :

$$\frac{S^2}{s^2} \, \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha$$

La loi de la hauteur motrice reste donc traduite par une parabole, dont la courbure est plus accusée que celle de la courbe déjà obtenue.

On peut remarquer que la valeur de α qui annule la parenthèse ne dépend pas de la vitesse de rotation ; par conséquent, lorsque celle-ci vient à changer, toutes les paraboles passeront par le point d'intersection, I, de l'une d'elles avec la ligne $N_0 N_1$.

95. — Examinons aussi ce qui se passe du côté de l'échappement. Il y a ici deux cas à considérer.

A. — Lorsque la machine est établie en contrebas du niveau d'écoulement (fig. 105), désignons par h' la hauteur de la colonne à refouler, par l' sa longueur, par p' la pression exercée par le piston à l'instant correspondant à l'angle α, nous aurons, en appliquant l'équation (1) :

$$\frac{l'}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{p' - p_a}{\Pi} - h' + \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$$

ou, à cause des valeurs de V, v et $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h' + \frac{\omega^2 r^2}{g}\left[l'\ \frac{S}{s}\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{2}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)\right]$$

En donnant à α différentes valeurs, on trouvera la pression résistante p', mais il importe surtout que cette pression ne devienne jamais négative, c'est ce qui arriverait dans la seconde moitié de la course, pour laquelle $\cos\alpha$ est négatif, si la vitesse devenait trop considérable; on reconnaît que la position la plus défavorable est l'extrémité de la course, pour laquelle on a :

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} + h' - \omega^2 r\ \frac{l'}{g}\ \frac{S}{s}$$

on devra donc avoir :

(II)
$$\omega^2 r \overline{\overline{<}} \frac{g}{l'}\ \frac{s}{S}\left(\frac{p_a}{\Pi} + h'\right)$$

Dans le cas où la colonne d'échappement est verticale, on a :

$$l' = h'$$

et l'équation devient :

(II')
$$\omega^2 r^2 \overline{\overline{<}} gr\ \frac{s}{S}\left(1 + \frac{10.33}{h'}\right)$$

En rapprochant cette équation de celle (I') déjà trouvée pour la face motrice, et remarquant que l'on a toujours

$$h' < h$$

on voit que la condition (II') sera satisfaite *a fortiori*

B.— Le moteur peut être placé en un point intermédiaire de la chute, la colonne d'échappement agit par aspiration, la hauteur h' est affectée du signe négatif dans l'équation du mouvement, qui devient :

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - h' + \frac{\omega^2 r^2}{g}\left[l' \ \frac{S}{s}\frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\sin^2 \alpha}{2}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)\right]$$

La condition nécessaire pour que la colonne d'échappement ne puisse devancer le piston est alors :

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \omega^2 r \leqq \frac{g}{l'}\frac{s}{S}\left(\frac{p_a}{\Pi} - h'\right)$$

ou bien, lorsque la colonne est verticale :

$$(\mathrm{II'}_1) \qquad \omega^2 r^2 \leqq gr \ \frac{s}{S}\left(\frac{10.33}{h'} - 1\right)$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut évidemment que l'on ait

$$h' < 10.33$$

en outre, la limite supérieure de la vitesse peut être considérablement abaissée, la condition (I') n'est prépondérante que si l'on a :

$$h' < \frac{10.33}{2h + 10.33}\, h$$

Pour des valeurs de h égales à 20 et 100 mètres, respectivement, on trouve que la vitesse limite de la machine n'est pas influencée par la condition d'échappement, pourvu que h' reste inférieure à 4 mètres environ dans le premier cas, à 5 mètres dans le second cas.

96. — *Représentation graphique de la loi des pressions résistantes.*— En suivant la marche exposée au numéro 94, on obtient, pour la pression résistante, au lieu de la pression statique, dont la loi serait représentée par le rectangle $M_0 Q_0 Q_1 M_1$ (fig. 107), une pression variable fournie par les ordonnées de la courbe $l_0 l' l_1$.

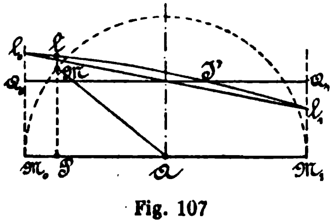


Fig. 107

97. — La superposition des figures 106 et 107 permet de trouver l'effort transmis à la tige; ainsi, pour une position quelconque M, de la manivelle (fig. 108), il sera donné par *lm*, différence des ordonnées P*m* et P*l* des figures 106 et 107. La loi trouvée est d'autant plus irrégulière que la vitesse est plus grande [1].

L'inertie des pièces à mouvement alternatif modifie encore la pression transmise à la tige, sans toutefois affecter le travail, comme nous le verrons au numéro 104.

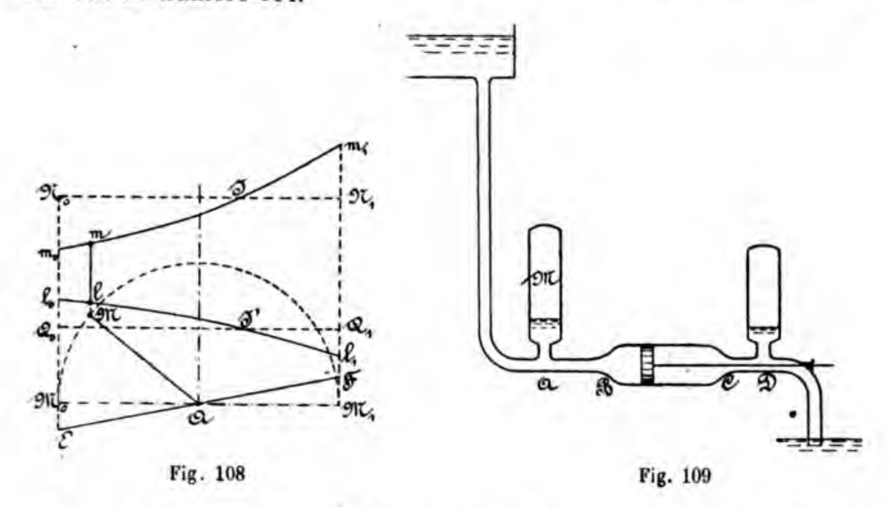


Fig. 108

Fig. 109

98.— *Effet des réservoirs d'air.*— L'effet d'un réservoir de volume indéfini, M, (fig. 109) placé près du moteur sur la conduite d'amenée, serait de produire, dans la colonne d'alimentation, un mouvement uniforme, la partie AB serait seule influencée par les accélérations du piston ; dans ce cas, la condition (I) peut encore être appliquée, pourvu que l désigne la longueur de la branche AB ; la vitesse ωr peut donc augmenter beaucoup. Sur la conduite d'échappement, on devrait faire $l' = CD$. Les conditions (I) et (II) montrent, du reste, qu'il est beaucoup plus difficile d'atteindre une grande vitesse de piston ωr lorsque la course est faible ; le nombre de tours, proportionnel à ω, varie en raison inverse de la racine carrée du rayon de manivelle. Les moteurs de la petite industrie ne peuvent rendre des services qu'à la condition de donner direc-

1. Les variations trouvées pour les pressions motrices et résistantes, calculées pour les machines de Clausthal, rendent compte des résultats de quelques expériences manométriques faites sur cette machine.

tement, sur leur arbre, une vitesse de rotation assez grande; on voit que l'emploi du réservoir d'air s'impose pour ces machines, on ne devrait y renoncer que si la pression devenait très considérable.

DEUXIÈME CAS

MACHINES A CYLINDRE OSCILLANT

99.— *Moteur de Schmid* [1]. — Cette machine est représentée en coupes longitudinale et transversale (fig. 110 et 111). Le cylindre oscille autour d'un axe transversal *aa*, réalisé par deux tourillons maintenus par les brides B, qui, articulées sur le bâti, peuvent être serrées avec

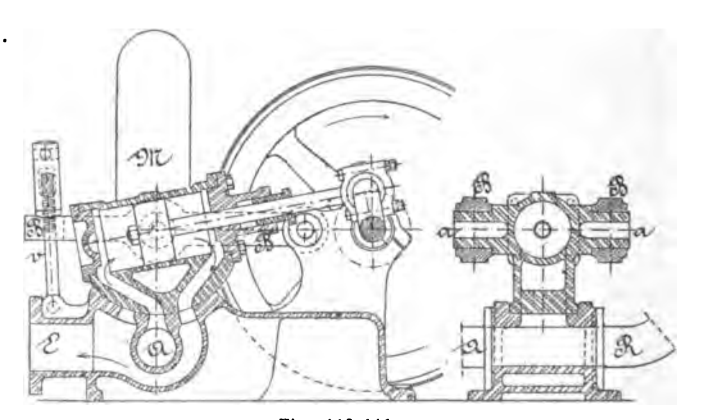


Fig. 110-111

précaution au moyen des vis de pression *v*, dont les écrous appuyent sur l'extrémité des brides. La glace du cylindre, dans laquelle viennent s'ouvrir les lumières de distribution, est une surface cylindrique concentrique à l'axe d'oscillation *aa*, surface qui s'appuie sur le socle creux du bâti ; A est la conduite d'arrivée de l'eau, E le tuyau d'échappement, R est une tubulure portant un réservoir d'air M, toujours en communication avec la chambre d'eau sous pression. Le cylindre est représenté

1. Ce moteur, présenté dans un concours ouvert à Zurich en 1870, dans le but de procurer la force à la petite industrie, s'est beaucoup répandu à cause de sa simplicité; on le construit jusqu'à 300 millimètres de diamètre et 370 millimètres de course de piston. — Knoke, ouvrage cité.

au moment de son inclinaison la plus grande, alors que l'admission et l'échappement se font à plein canal; la distribution s'opère par le mouvement relatif du cylindre sur son socle, et n'exige ni excentrique, ni tiroir spécial; elle ne saurait être influencée par l'usure, puisque le cylindre, revenant toujours à la position horizontale au point mort, c'est-à-dire au moment où doivent commencer l'admission et l'échappement, les canaux se trouveront toujours, à cet instant, exactement interceptés par les pleins de la glace fixe.

100. — Ce moteur donne lieu aux mêmes recherches que les machines à bielle; toutefois, comme il n'est plus permis, dans le calcul de la vitesse et de l'accélération, de négliger l'obliquité, nous commencerons par rechercher la vitesse du piston en supposant constante la vitesse de rotation ω de l'arbre.

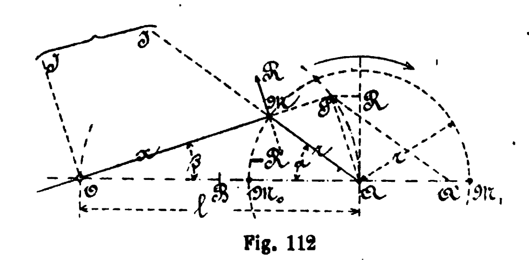


Fig. 112

Soient r, le rayon AM de la manivelle (fig. 112),

L, la distance OA,

x, la quantité variable OM.

Élevons en O la perpendiculaire OI à la direction OM de la tige, et prolongeons AM jusqu'à son point de rencontre avec OI; le point I est le centre instantané qui permet de trouver la vitesse du piston; car, soit V cette vitesse, on a :

$$\frac{V}{\omega r} = \frac{OI}{IM}$$

Abaissons AP perpendiculaire à OM, on a :

$$\frac{OI}{IM} = \frac{AP}{r}$$

D'où

$$V = \omega\, AP$$

Le lieu géométrique de P est la circonférence décrite du point B, milieu de OA, avec le rayon BA.

On a, du reste :

$$AP = L \sin \beta$$
$$x \sin \beta = r \sin \alpha$$
$$x \cos \beta + r \cos \alpha = L$$

d'où :

$$V = \omega r L \frac{\sin \alpha}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2r L \cos \alpha}}$$

La vitesse atteint évidemment sa valeur maximum lorsque $AP = r$; en ce moment, l'accélération est nulle.

Pour éviter de nous servir de l'expression compliquée de l'accélération, nous la construirons graphiquement, il suffit de mener PA' parallèle à MA, on a [1] :

$$\frac{dV}{dt} = \omega^2 \frac{OP}{L} \overline{AA'}$$

Pour la demi-circonférence supérieure, le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche, AA' doit être compté positivement à droite du centre A, et négativement à gauche de ce point; dans la demi-circonférence inférieure, c'est l'inverse qui doit avoir lieu.

Aux points morts, l'accélération prend les valeurs très simples qui suivent :

En M_0. . . . . . $\frac{dV}{dt} = \omega^2 r \frac{L}{L - r}$

En M_1. . . . . . $\frac{dV}{dt} = \omega^2 r \frac{L}{L + r}$

L'équation qui donne la pression sur la face motrice du piston est :

$$\frac{p}{\Pi} = h + \frac{p_a}{\Pi} - \frac{\omega^2}{2g}\left(2\, l\, \frac{S}{s}\, \frac{OP}{L}\, \overline{AA'} + \overline{AP}^2\right)$$

On a, du reste :

$$\overline{AP}^2 = PR \times L$$

1. Cette construction est établie en cherchant quelle est, lors d'un déplacement infiniment petit, la valeur de dV en fonction de l'accroissement de AP et du déplacement du point M.

PR étant la perpendiculaire abaissée du point P sur la verticale menée par le point A.

101.—*Diagramme des pressions motrices.*— Pour tracer ce diagramme, on prend (fig. 113), un certain nombre de positions de la manivelle, que l'on rapporte, par des arcs de cercle décrits du point O, sur la ligne des points morts. On mène l'ordonnée constante

$$\frac{p_a}{\Pi} + h$$

qui détermine la ligne des pressions statiques, N_0 N_1, relativement à l'axe XX, et l'on construit, pour chaque point, les quantités telles que AA', PR, que l'on mesure en tenant compte de l'échelle de la figure ; on calcule l'expression

$$\frac{\omega^2}{2g}\left(2l\,\frac{S}{s}\,\frac{OP}{L}\,\overline{AA'} + L \times \overline{PR}\right)$$

dont on porte la valeur en *nm*. L'ensemble des points *m* permettra de trouver la ligne A_g A_g (admission sur la face de gauche). Les ordonnées

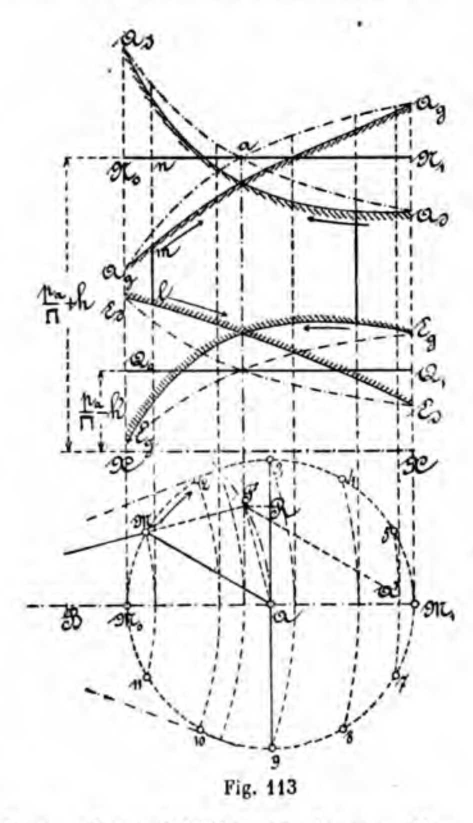


Fig. 113

telles que *nm* sont divisées, par la courbe pointillée, en deux parties représentant, respectivement, les deux termes qui composent l'expression de *nm*; la partie comprise entre les deux courbes représente le dernier terme qui s'annule aux points morts, et prend sa valeur maximum lorsque la vitesse du piston est la plus grande.

102. — Pour l'échappement, on aurait, en plaçant l'axe du cylindre à la hauteur *h'* au-dessus du niveau d'écoulement.

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - h' + \frac{\omega^2}{2g}\left[2l'\,\frac{S}{s}\,\frac{OP}{L}\,\overline{AA'} + \overline{AP}^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)\right]$$

C'est-à-dire que la hauteur résistante s'obtient en ajoutant, à la hauteur statique $\frac{p_a}{\Pi} - h'$, représentée par l'ordonnée de la ligne droite $Q_0 Q_1$, les termes :

$$\frac{\omega^2}{2g} \times 2l' \frac{S}{s} \frac{OP}{L} \overline{AA'}$$

et

$$\frac{\omega^2}{2g} \times \overline{AP}^2 \left(\frac{S^2}{s^2} - 1 \right)$$

Ce dernier est toujours positif, tandis que le premier, positif jusqu'au moment où la vitesse prend sa valeur maximum, est ensuite négatif jusqu'à la fin de sa course.

La contre-pression finale a pour valeur, au point mort M_1 (en tenant compte du signe de l'accélération) :

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - h' - \frac{\omega^2}{g} rl' \frac{S}{s} \frac{L}{L+r}$$

Pour la course rétrograde, au point M_0, on aurait une valeur encore inférieure :

$$\frac{p'}{\Pi} = \frac{p_a}{\Pi} - h' - \frac{\omega^2}{g} rl' \frac{S}{s} \frac{L}{L-r}$$

Pour pouvoir atteindre une vitesse élevée sans que cette pression s'annule, il faudra réduire h' et l' autant que possible.

En considérant simultanément la loi A_g de la hauteur motrice sur la face de gauche du piston, ainsi que la loi E_d (échappement sur la face de droite) de la hauteur résistante sur l'autre face, on voit que, pour la course directe, l'effort sur la tige est représenté, à une échelle convenable, par la portion $l\,m$ d'ordonnée ; pour la course rétrograde, il faut prendre simultanément les courbes A_d (admission-droite) et E_g (échappement-gauche). Le travail moteur pendant les deux courses est donc représenté par les surfaces $A_g\,E_d$, et $A_d\,E_g$, en laissant de côté toute question d'échelle [1].

1. Les courbes d'indicateur, relevées sur chacune des faces du piston, s'obtiendraient en prenant la ligne d'admission en même temps que la ligne d'échappement sur la même face ; on aurait ainsi, pour la face de gauche, le diagramme $A_g\,A_g\,E_g\,E_g$, et, pour la face de droite, la figure $A_d\,A_d\,E_d\,E_d$.

103. — Il faut bien observer que, pas plus dans les moteurs à bielle que dans les machines à cylindre oscillant, l'*inertie* de l'eau n'a pour effet de modifier le travail moteur ; ainsi, dans la figure 106, la surface $N_0\, a\, m_0$, négative, est compensée par la surface $a\, m_1\, N_1$ positive ; dans la figure 113, les courbes en trait pointillé interceptent, de part et d'autre de la ligne des pressions statiques, des surfaces égales. Quant au terme dépendant du carré de la vitesse, il constitue bien une perte, qui, pour l'admission et l'échappement réunis, correspond précisément à la hauteur nécessaire pour créer la vitesse dans les tuyaux ; ce terme est comparable aux pertes de charge, que nous avons négligées.

Il est bien évident aussi, que l'emploi d'un réservoir d'air sur la conduite motrice, placé aussi près que possible du distributeur, a pour effet d'augmenter la vitesse possible, attendu que l devient, dans les équations de condition, la longueur très réduite comprise entre le réservoir d'air et le cylindre ; pour l'échappement, le réservoir d'air devient inutile si la conduite est courte et directe, et, par conséquent, si h' est faible, mais dans le cas contraire, il y a intérêt à le placer.

L'emploi du réservoir d'air facilite notablement le calcul des pertes de charge, car, si nous le supposons assez grand pour que la pression n'y subisse que des variations insensibles, la vitesse de l'eau dans la colonne motrice sera celle du mouvement uniforme, et l'on calcule immédiatement la perte de charge afférente au frottement dans les tuyaux ; il ne reste alors, parmi les quantités négligées, que la perte due aux inflexions et aux variations de section depuis le réservoir jusqu'au piston, et qui ne saurait être bien considérable. Dans le moteur Schmid la vitesse de l'eau dans la conduite atteint 3 à 4 mètres par seconde.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes attaché à régler la vitesse du fonctionnement de manière à conserver toujours sur le piston une pression positive, tant à l'admission qu'au refoulement ; il est visible que, s'il n'en était pas ainsi, le contact serait rompu, à certains moments, entre le liquide et le piston, et il en résulterait un coup de bélier au moment où le vide serait comblé. Nous devons considérer comme possible, toute allure qui répond aux équations de condition trouvées, bien qu'elle puisse donner lieu à une variation très grande de la pression motrice effective transmise à la tige de piston.

104. — ***Forces d'inertie du mécanisme.*** — Au point de vue du couple

moteur à communiquer à l'arbre, il faut tenir compte des forces d'inertie du système massif interposé entre le liquide et le bouton de manivelle, ce qui est extrêmement simple dans le premier cas, *où nous avons supposé négligeable l'obliquité de la bielle;* car, si nous désignons par q le poids du piston, de la tige et de la bielle, la force d'inertie de ces pièces, parallèle à l'axe du mouvement rectiligne, a pour expression

$$-\frac{q}{g}\frac{dV}{dt}$$

ou

$$-\frac{q}{g}\omega^2 r \cos\alpha$$

Cette force peut être traduite en hauteur motrice, et elle est représentée, pour chaque position du piston, par l'ordonnée de la ligne droite EF (fig. 108), obtenue en posant, pour $\alpha = o$:

$$\Pi\, S \times M_0E = -\frac{q}{g}\omega^2 r$$

Ces ordonnées, ajoutées algébriquement à celles analogues à lm, permettront d'obtenir la loi des efforts moteurs transmis au bouton de la manivelle dans la direction horizontale.

Dans la *machine oscillante*, le mouvement des masses résulte, à la fois, de leur translation suivant l'axe du cylindre, et de leur rotation autour de l'axe des tourillons; de plus, la tige du piston, qui doit faire osciller le cylindre, reçoit, de celui-ci, des réactions qui modifient l'effort transmis.

En appelant Ω la vitesse angulaire du mouvement oscillatoire, et faisant :

$$\frac{L}{r} = m$$

on trouve :

$$\Omega = \omega \frac{m \cos\alpha - 1}{1 + m^2 - 2\, m \cos\alpha}$$

et

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\, m\omega^2 \sin\alpha \frac{m^2 - 1}{(1 + m^2 - 2m \cos\alpha)^2}$$

qui s'annule pour $\alpha = 0°$ ou $180°$. Lorsque l'inclinaison du cylindre est maximum,

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}$$

et

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\omega^2}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

(La direction positive, pour Ω, correspond à l'arc pour lequel le bouton de manivelle s'élève).

Connaissant une position du cylindre, on pourra toujours chercher la force — R, (fig. 112), appliquée normalement à la tige, capable de produire l'accélération angulaire $\frac{d\Omega}{dt}$ du cylindre; on en déduira l'effort R, égal, et de signe contraire, représentant l'action de cette pièce sur le bouton de la manivelle.

Pour tenir compte de l'inertie de la tige et du piston, on peut raisonner comme il suit : le mouvement relatif de ces masses est connu, et dirigé suivant OM; or, on peut le produire au moyen des forces du mouvement absolu, auxquelles on joindrait une force égale et opposée à celle qui produit pour chaque point le mouvement d'entrainement, ainsi que la force centrifuge composée.

Les axes auxquels le mouvement est rapporté, étant supposés fixes par rapport au cylindre, la première force fictive se composera de la force centrifuge due à la vitesse Ω autour du point O, et de la force normale à la tige, provenant de ce que le mouvement de rotation des axes n'est pas uniforme. Quant à la force centrifuge composée, normale aussi à la direction de la vitesse relative, on connait les vitesses Ω et V qui permettent de la calculer [1].

Les forces du mouvement absolu ne peuvent être, si on néglige le poids, qu'une force agissant au tourillon O, que nous ne cherchons pas à déterminer, et une force agissant au point M dans une direction inconnue, mais que nous déterminerons en cherchant les composantes de la force suivant la direction de la tige, et suivant la normale.

1. La force centrifuge composée s'annule aux deux points morts, parce que la vitesse relative V est nulle en ces points; elle s'annule aussi avec Ω pour les deux inclinaisons maxima.

D'après la nature du mouvement relatif, nous devrons exprimer l'équilibre entre toutes les forces normales, ce qui nous permettra de déterminer l'une des composantes de la réaction; nous exprimerons d'autre part l'équilibre des forces agissant suivant la tige, en tenant compte de la force d'inertie due à l'accélération relative, et de la force centrifuge, ce qui nous permettra de trouver la composante longitudinale inconnue de la réaction.

105. — Malgré que l'introduction s'y fait à pleine course, les moteurs à colonne d'eau à rotation peuvent donner sur leur arbre un couple moteur très irrégulier, car l'inertie de l'eau, surtout, altère d'une manière désavantageuse les efforts communiqués au bouton de la manivelle.

Pour mettre ce fait en évidence, nous avons tracé, (figure 114), en ne tenant compte que des pressions effectives du liquide et des forces d'inertie longitudinales, qui sont seules importantes, le diagramme $M_0AM_1BM_0$, des moments moteurs pour un tour entier de la machine à cylindre oscillant, en fonction des angles, qui sont portés en abscisses;

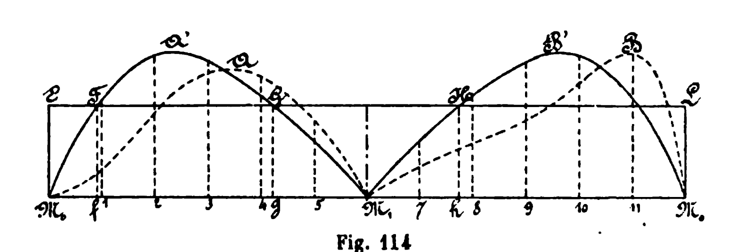


Fig. 114

sur la même figure se trouve représenté, en trait plein, le diagramme de l'effort calculé en ne tenant compte que de la pression statique, et qui serait à peu près réalisé dans une machine à marche très lente. Lorsque l'on connait l'effort sur le piston, il suffit, pour obtenir le moment de rotation autour de l'arbre, de multiplier cet effort par la perpendiculaire AP (fig. 112), qui a déjà servi à déterminer la loi des vitesses du piston. Lorsque l'effort est constant, le moment varie comme cette perpendiculaire elle-même. Le diagramme $M_0A'M_1B'M_0$ représente donc à la fois, ou le couple moteur en fonction de l'angle, ou, en mesurant les ordonnés à une autre échelle, la vitesse du piston en fonction de l'angle, ou encore, si on change la signification et l'échelle des abscisses, la dé-

pense d'eau en fonction du temps. La surface du diagramme représente, ou le travail pour un tour, ou la dépense d'eau pour la même période.

106. — *Dimensions des réservoirs d'air.* — Supposons que le réservoir d'air soit assez grand pour qu'on puisse considérer comme constant l'afflux du liquide immédiatement avant le réservoir; la dépense de la conduite sera constante, et, si on la représente par l'ordonnée M_0E (fig. 114), on devra avoir, d'après la signification donnée au diagramme :

$$M_0\,E\,L\,M_0 = M_0\,A'\,M_1\,B'\,M_0$$

Pendant la révolution, à compter du point f, le débit du moteur dépasse celui de la conduite jusqu'au moment correspondant au point g; l'inverse a lieu de g en h, etc...; l'eau s'emmagasine dans le réservoir, dans le voisinage des points morts, pour en sortir au moment où la vitesse du piston est grande.

Les variations maxima de pression dans le réservoir correspondent à l'entrée du volume représenté par GM_1H; on peut donc dire que la variation de la pression dans le réservoir, rapportée à la pression moyenne, sera dans le rapport du volume qui vient d'être indiqué au volume moyen de l'air contenu dans le réservoir [1].

Dans le moteur Schmid, le volume d'air moyen du réservoir est égal à trois fois environ le volume du cylindre, ce qui, pour la machine à cylindre unique, correspond à une variation de pression assez modérée $\left(\frac{1}{10}\text{ environ}\right)$ dans le réservoir.

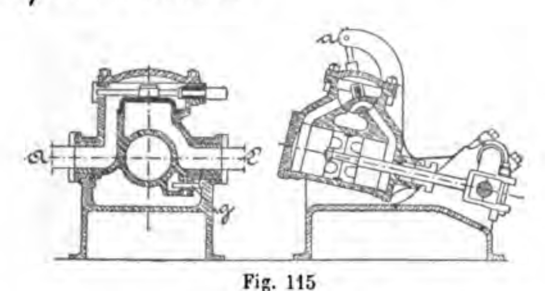


Fig. 115

107. — Le moteur à cylindre oscillant peut donner lieu à bien des systèmes différents; la figure 115 représente en section transversale,

1. La méthode exposée au 7e fascicule, pour le calcul des réservoirs d'air des pompes, est entièrement applicable ici.

et, en section longitudinale par l'axe du cylindre, le moteur ***Mégy;*** celui-cj comporte un tiroir de distribution manœuvré par le mouvement que prend le cylindre relativement au point fixe *a*. Les tourillons A, E, servent à conduire l'eau d'admission et celle d'échappement; par suite de la différence de pression qui règne dans ces deux conduits, le cylindre est soumis à une poussée latérale que l'on équilibre au moyen du galet *g*.

108. — *Machines Armstrong.* — Construits pour de très fortes pressions, ces moteurs ont souvent des pistons de petit diamètre, pour lesquels on substitue avec avantage le plongeur au piston plein, mais le fonctionnement est alors à simple effet; pour obtenir une régularité suffisante du moment, il faut conjuguer deux machines sur des coudes opposés, ou trois machines sur des coudes espacés de 120°. La distribution se fait quelquefois par des tiroirs commandés par un pivot excentré, placé sur l'un des tourillons du cylindre [1]; mais, plus souvent, le tourillon sert lui-même d'organe de distribution; cette disposition convient pour de faibles vitesses de rotation, parce que, dans ce cas, les lumières peuvent avoir une section rétrécie, et il est possible de les pratiquer dans un tourillon de petit diamètre.

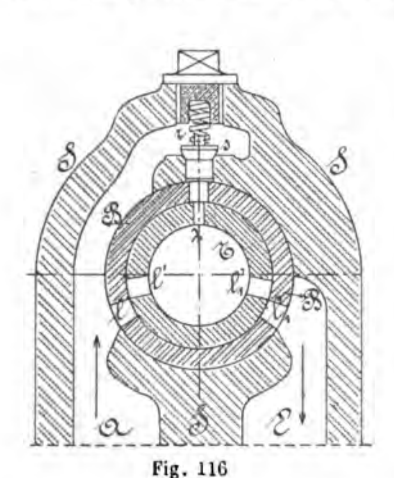


Fig. 116

La figure 116 représente le tourillon d'un moteur à simple effet; le cylindre est supposé à l'un de ses points morts.

S est le support fixe du tourillon; A et E sont les tubulures de prise d'eau et d'échappement;

B est une bague en métal dur, serrée dans la pièce précédente; les lumières l, l_1, y sont pratiquées.

La pièce centrale T est le tourillon du cylindre; l'admission et l'échappement s'opèrent par les lumières l' l'_1, lors de leur coïncidence avec les lumières fixes l, l_1.

La position représentée sur la figure est celle pour laquelle l'admission va s'ouvrir et l'échappement vient de se fermer, ou ***vice versa;***

1. Callon. — Cours de Machines, pl. XXVI.

pour éviter les accidents dus à l'incompressibilité de l'eau (90), une troisième lumière λ, fermée par la soupape *s*, est pratiquée à travers le tourillon; si, pour une cause due au dérangement ou à l'usure, il se produisait un léger retard à l'échappement, la soupape *s* donnerait issue à l'eau emprisonnée dans le cylindre, qui retournerait dans la conduite d'admission.

Il faut remarquer que la soupape ne doit pas être chargée comme le serait une soupape de sûreté ordinaire, puisque la pression de la conduite la maintient fermée. Le ressort *r* ne sert qu'à assurer sa chute lorsqu'elle a fonctionné; la lumière λ, qui est mobile avec le tourillon, ne vient se placer sous la soupape que lorsque le piston est au point mort; la coïncidence serait d'ailleurs inutile pour d'autres positions.

Les figures 117 et 118 sont relatives à une machine à double effet, à piston mixte [1]; sur la face annulaire du piston, s'exerce, d'une manière

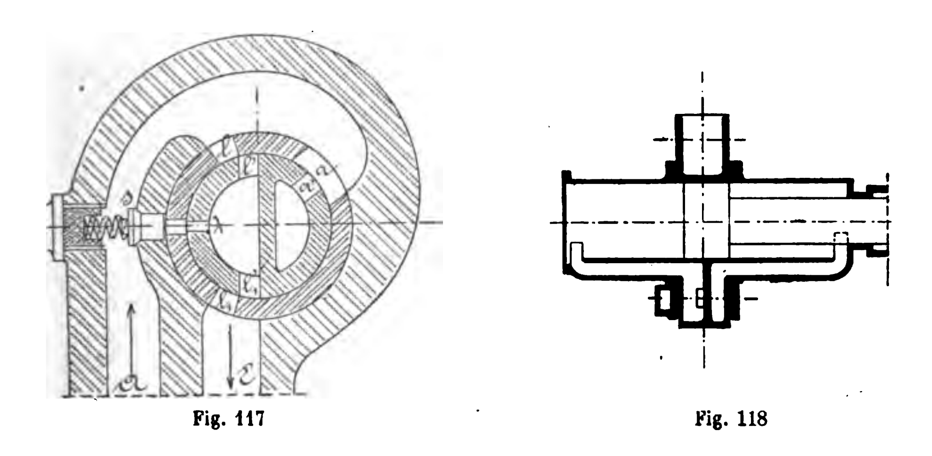


Fig. 117 — Fig. 118

permanente, la pression motrice; sur la face de gauche, au contraire le fluide est distribué comme dans le moteur à simple effet; il en résulte que les efforts s'exerçant dans les deux sens sont égaux, à la condition que la section de la tige soit égale à la moitié de celle du cylindre. Dans la figure 117, on remarque les conduits A et E d'admission et d'échappement, les lumières l' et l'_1 pratiquées dans le tourillon oscillant, pour l'introduction et l'évacuation de l'eau, la lumière λ, servant d'accès à la

1. Ce moteur équivaut, comme mode d'action, à la pompe Armstrong à piston différentiel (7e fascicule).

soupape de choc s, dont la fonction a été déjà expliquée, enfin la lumière mobile a', par laquelle la face annulaire du piston est mise en communication avec l'eau motrice, et qui, grâce à l'élargissement de la lumière a, pratiquée dans la bague fixe, n'est recouverte à aucun moment. Le tourillon est divisé longitudinalement, par une cloison, en deux compartiments isolés.

§ IV.

RÉGLAGE DES MACHINES A COLONNE D'EAU

109. — Le volume dépensé par course est proportionnel à l'espace parcouru par le piston; à pression motrice égale, le travail par tour de ces machines reste constant; comme il est impossible, dans les systèmes étudiés jusqu'ici, d'agir sur la durée de l'admission, qui doit se faire à pleine course, il n'y a d'autre moyen, pour obtenir l'égalité entre les travaux moteurs et résistants par tour, égalité qui caractérise tout mouvement périodique, que de réduire la pression par une perte de charge, ce qui est défectueux en principe, dans tous les cas où l'eau doit être économisée.

Le seul procédé qui échappe à l'inconvénient ci-dessus consiste, lorsque le travail des résistances par tour varie (donc le couple qu'elles forment), de modifier la liaison entre le moteur et l'opérateur; on arrive ainsi, en agissant sur le rapport des vitesses de la puissance et de la résistance, à maintenir l'égalité entre les travaux de ces forces, et à conserver plus ou moins le régime.

Ce principe est appliqué dans quelques appareils de levage; il proportionne la dépense d'eau au travail à effectuer, et laisse au rendement une valeur qui serait constante, si la part proportionnelle des fuites et des frottements était la même; toutefois, le mécanisme doit être automatique, et ne pas exiger l'intervention de l'homme, et, à ce point de vue, le procédé sommaire, qui consiste à employer des pistons multiples emboîtés l'un dans l'autre, de manière à faire varier la section, ne peut être considéré comme une véritable solution du problème.

110. — *Machine de Hastie.* — Le système de M. John Hastie [1], de

1. *Engineering.* — 1878, 2e sem., p. 371; et 1885, 1er sem., p. 477.
Knoke. — Ouvrage cité, p. 51.

Greenock, est employé dans les machines à rotation; celles-ci sont accouplées sur un même bouton de manivelle dans des directions formant un angle droit, de manière à éviter les points morts; le rayon de la manivelle augmente ou diminue automatiquement avec la résistance.

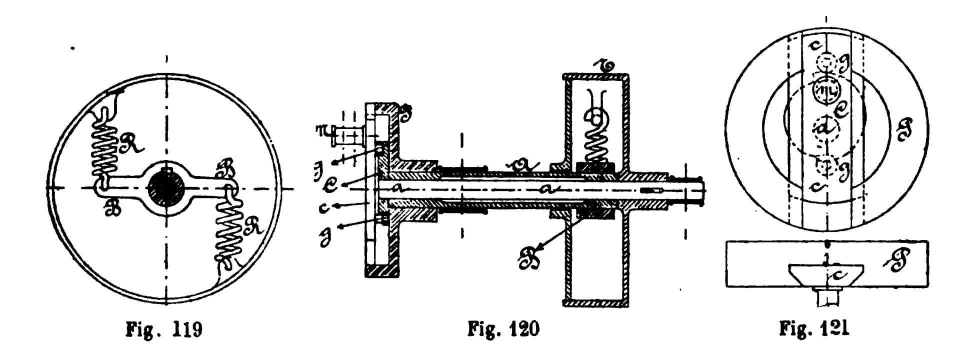


Fig. 119 Fig. 120 Fig. 121

A cette fin, l'arbre A (fig. 119, 120, 121), sur lequel est calé le plateau-manivelle P, est lié à la résistance d'une manière indirecte, par exemple, au moyen des bras B et des ressorts R; toute variation de la résistance est accompagnée d'une rotation relative du tambour T et de l'arbre A; le tambour T, qui porte la courroie motrice, ou actionne la résistance, entraîne un arbre central *a a*, sur lequel il est claveté, et qui, au moyen de la came C, agit sur les galets *g*, *g*, qui déplacent, dans les rainures du plateau-manivelle, le coulisseau *c* qui porte le bouton. La came C présente deux profils, qui agissent, l'un pour écarter du centre le coulisseau lorsque, par une augmentation de la résistance, l'arbre A prend de l'avance sur le petit arbre central *a*, et dont l'autre opère d'une manière inverse.

Pour régler le moteur, il suffit de faire en sorte que, pour une charge nulle, le rayon de manivelle soit suffisant pour faire tourner la machine à vide, et que, pour la charge maximum, ce rayon soit égal à la moitié de la course complète du piston. Entre ces deux positions, la flèche des ressorts étant sensiblement proportionnelle à la charge, la came peut recevoir une forme en spirale. En réalité, le système d'entrainement que nous avons adopté, pour la facilité de l'explication, est remplacé par des organes équivalents, mais qui donnent à la rotation relative des pièces *a*, A une amplitude plus grande. Cette condition est indispensable pour obtenir une came à profil convenable.

D'après une expérience rapportée par M. W.-R. Kinipple, la dépense d'eau du moteur Hastie, pour des travaux variant dans le rapport de 1 à 3, s'est élevée du simple au double, ce qui montre une augmentation de rendement dans le même sens que celle de la charge, et doit tenir, vraisemblablement, à ce que la part des fuites et des frottements est relativement plus grande lorsque la machine effectue peu de travail (1).

111. — *Moteur de Hoppe* (2). — Ce moteur comprend deux cylindres à simple effet, dont les pistons attaquent le même arbre. Le distributeur est un piston *p* (fig. 122), actionné par un excentrique calé à angle droit sur la manivelle; il est représenté au milieu de sa course au moment où il intercepte la lumière par laquelle l'eau d'admission peut se rendre du conduit A dans le cylindre, et qui livre passage aussi à l'eau qui s'échappe vers le conduit E. Le piston distributeur présente exactement la même longueur que la lumière, supposée pour le moment fixe.

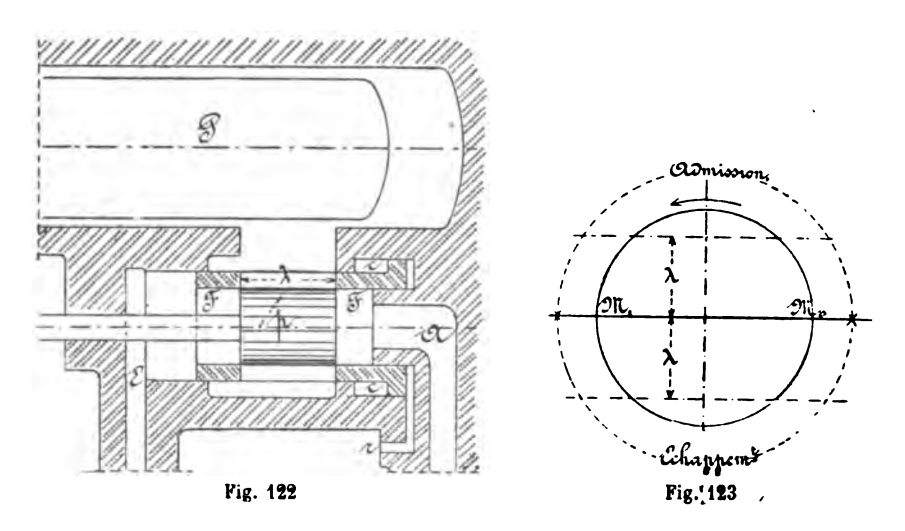


Fig. 122 Fig. 123

Dans ces conditions, si l'on considère comme négligeable l'obliquité de la bielle et de la barre d'excentrique, l'épure de distribution est celle de la figure 123; le mouvement de la manivelle étant compté suivant la

1. Voir une disposition fort ingénieuse de moteur à dépense variable, par M. Arthur Rigg. — *Engineering*, 1888, 1er sem., p. 59.
2. Revue technique de l'Exposition universelle de 1889. — 7e partie, p. 64, pl. 21-22.

direction de la flèche, les déplacements du piston sont mesurés sur la ligne M_0M_1; les écarts du tiroir de part et d'autre de la position moyenne sont fournis (puisque les recouvrements sont nuls), par des ordonnées verticales de la circonférence, évaluées au moyen d'une échelle convenable, et comptées à partir du diamètre M_0M_1; l'excentricité peut être plus grande que la largeur λ des lumières, comme dans l'épure, mais, quoi qu'il en soit, l'admission et l'échappement ont lieu pendant toute la course directe ou rétrograde du piston.

Jusqu'ici, la distribution décrite est celle de toute machine à colonne d'eau à rotation, mais la lumière sur laquelle se meut le distributeur est pratiquée dans un fourreau mobile, F, qui peut se déplacer à volonté vers l'avant; ainsi, dans la figure 124, sans rien changer à la position du piston P, ni, par conséquent, à celle du distributeur *p*, le fourreau a été déplacé, vers l'avant, de la quantité *e;* pour obtenir les phases

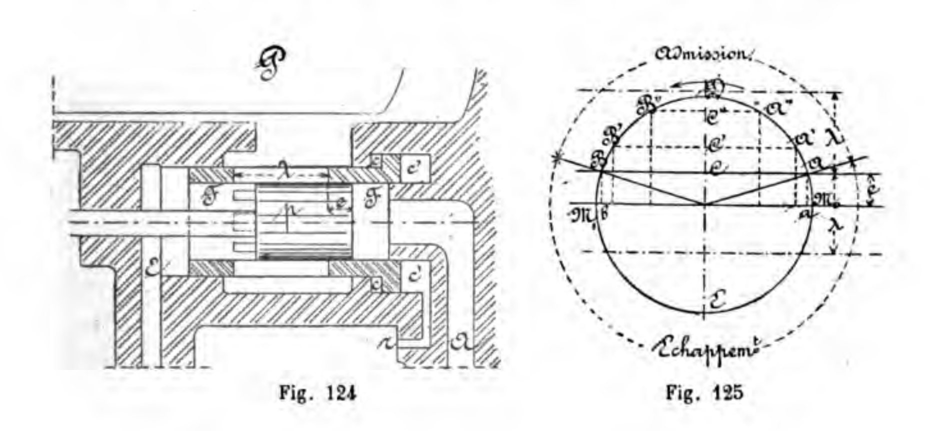


Fig. 124 Fig. 125

de la distribution, nous devrons remarquer, (fig. 125), que ce recouvrement *e* doit être déduit des écarts du distributeur en ce qui concerne l'admission, et ajouté à ces écarts en ce qui concerne l'échappement. L'introduction dans le cylindre correspond, par conséquent, au parcours ADB du bouton de manivelle, tandis que la communication avec l'échappement s'établit pendant tout le parcours BEA.

Dans le cylindre, les phases suivantes se succèdent par conséquent pendant une double course de piston :

Course directe :
- Parcours $M_0 a$: aspiration, dans le cylindre, de l'eau du tuyau d'échappement.
- Parcours ab : introduction de l'eau d'admission.
- Parcours bM_1 : aspiration, dans le cylindre, de l'eau d'échappement.

Course rétrograde : Échappement pendant toute la course $M_1 M_0$.

Le caractère le plus saillant de cette distribution est que l'introduction de l'eau a lieu pendant le parcours *ab* seulement, et non pendant toute la course ; en augmentant *e*, la ligne AB se transporte en A'B', A"B", etc., et la période d'introduction diminue; il est vrai que le passage réservé pour l'admission s'étrangle de plus en plus (le maximum de l'ouverture correspond au moment où le piston est au milieu de sa course et est égal aux ouvertures CD, C'D, C"D etc.); les périodes M_0a, bM_1, pendant lesquelles il y a rentrée d'eau dans le cylindre, prennent aussi de plus en plus d'importance.

La position du fourreau F est réglée automatiquement d'après la vitesse que prend le moteur; pour permettre à un régulateur de puissance modérée d'opérer le déplacement du fourreau, celui-ci forme piston annulaire à son extrémité ; la face de gauche est toujours, par la chambre *c*, en relation avec l'introduction ; la face terminale, au contraire, communique soit avec l'échappement, soit avec l'admission ; à cette fin, un très petit tiroir, *manœuvré par le régulateur*, met le conduit *r* en communication soit avec l'admission, soit avec la décharge ; toutefois, si l'on se bornait à ces organes, le fourreau F serait toujours poussé à fond de course dans un sens ou dans l'autre, par suite de la variation de vitesse la plus légère; aussi le fourreau mobile, au moyen d'une liaison non représentée sur la figure, ramène constamment le petit tiroir à la fermeture.

En un mot le système constitue un *servo-moteur* complet, analogue à ceux qu'on emploie dans les machines auxiliaires de la navigation.

Observation. — Le moteur de Hoppe présente, pour la première fois, cette particularité hardie, que le mouvement des colonnes, au lieu de commencer ou de finir aux points morts, positions pour lesquelles la vitesse est nulle, s'établit et s'arrête au moment où la vitesse présente une valeur finie; l'emploi de grands réservoirs d'air, placés aussi près que possible du cylindre, est indispensable, encore ne peuvent-ils remédier complètement au défaut de principe du moteur, car, si faible que

soit la masse comprise entre ces réservoirs et le piston, aucune force n'est capable de lui communiquer instantanément une vitesse finie.

112. — *Moteur à admission d'air de M. Coque* [1]. — Un petit moteur exposé en 1867 à Paris, ayant, par ses dispositions extérieures, une certaine ressemblance avec une machine à vapeur, présente dans sa distribution les particularités suivantes : l'admission sur chaque face du piston se produit avec un certain retard, par un orifice spécial, qui reste ouvert jusqu'à la fin de la course ; l'échappement se fait par une soupape soulevée pendant toute la course ; au commencement de la course suivante, pendant le retard qui précède l'admission, la soupape d'échappement située du côté de la face motrice se soulève automatiquement pour laisser entrer un peu d'air qui fait coussin au moment de l'introduction, et empêche les chocs de se produire.

Un moteur de ce genre, expérimenté au Conservatoire des Arts et Métiers, sous une chute variant de $3^m,36$ à $12^m,33$, a donné au frein un rendement qui s'est élevé de 0,265 à 0,637 pour une vitesse de 50 tours par minute environ ; le diamètre et la course du piston étaient de 31 et 162 millimètres respectivement ; bien que de puissance insignifiante, ce moteur a donné un résultat très satisfaisant pour la pression très faible sous laquelle il a été expérimenté.

Il semble que l'admission d'air a surtout été employée par M. Coque dans le but d'éviter les coups de bélier, et que la marche à détente, déjà indiquée et peut-être mise en pratique, n'a pas été le principal objectif de l'inventeur.

113. — *Machine de Mayer à admission d'air, fonctionnant par détente.* — Cette machine était exposée à Vienne en 1873, son emploi s'est répandu ; elle est pourvue d'un régulateur à force centrifuge qui agit, comme dans les machines à vapeur, sur la durée de l'introduction.

Le cylindre, représenté en schéma (fig. 126 et 127), est à double effet, et comporte deux chambres à air C, C_1 ; les lumières d'introduction et d'échappement de l'eau sont en l et l_1. Considérons seulement la face d'arrière (ou de gauche) du piston, le mode de fonctionnement normal est le suivant :

L'admission s'ouvre au commencement de la course ; l'air de la cham-

1. Portefeuille des Machines d'Oppermann. — 1867, p. 77, pl. 26.

bre C a déjà été comprimé à la pression d'admission par un refoulement antérieur; la machine se comporte d'abord comme si l'air n'existait pas, et la pression, si l'on ne tient pas compte des forces d'inertie, reste constante pendant l'introduction; l'admission se termine avant la fin de

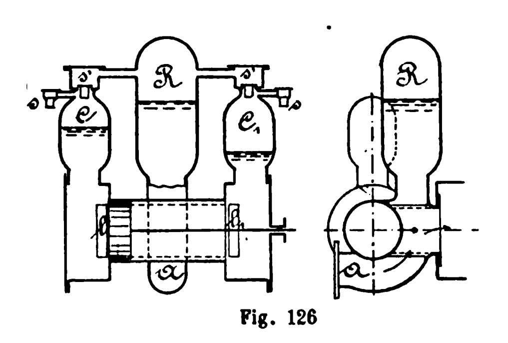


Fig. 126

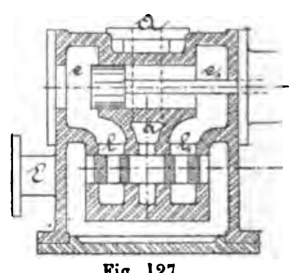


Fig. 127

la course, et, à partir de ce moment, l'air de la chambre C se détend comme s'il était seul; l'eau emprisonnée ayant un volume constant, la dilatation de l'air correspond au volume engendré par le piston, la pression diminue pour devenir, à la fin de la course, égale à la pression d'échappement qui est celle de l'atmosphère ou peu s'en faut. Pendant la course rétrograde, la lumière l s'ouvre, et l'eau s'échappe, mais la fermeture s'opère avant la fin de la course, et le piston comprime l'air de la chambre C, de manière à ramener son volume à ce qu'il était à l'origine. La loi des pressions en fonction du volume ou de l'espace engendré par le piston se traduit par le diagramme de la figure 128; v est le volume de l'air comprimé dans la chambre C à l'origine de la course, AF le volume d'eau admis sous la pression absolue p_0, FE la loi de détente du volume d'air v, EG, le volume engendré par le piston pendant l'échappement de l'eau, GA, la loi de compression de l'air jusqu'au moment où le piston est revenu au point mort.

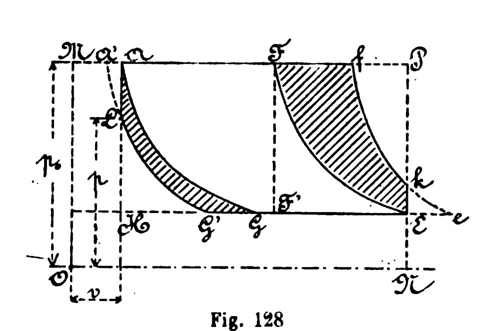


Fig. 128

On peut admettre que l'air détendu ou comprimé au contact de grandes surfaces liquides obéit à la loi de Mariotte; en ce cas, les courbes FE,

AG, sont des arcs identiques; le travail produit sur la face considérée pendant une révolution est représenté par la surface AFEG, ou par AFF'H, qui lui est équivalente. Au point de vue de la quantité d'eau dépensée relativement au travail produit, la machine se comporte comme si elle ne renfermait pas d'air, et présente seulement l'avantage de pouvoir fonctionner sans chocs à une vitesse considérable (1).

Le diagramme idéal AFEG, entraine, comme condition nécessaire :

$$HG = F'E$$

c'est-à-dire que la période de compression doit être égale à celle de détente.

Le système de distribution employé consiste en une coulisse de Stephenson, suspendue au manchon d'un fort régulateur à force centrifuge; la durée de l'échappement augmente et diminue avec celle de l'admission; le tiroir de distribution (fig. 127) diffère peu de celui d'une machine à vapeur; il est équilibré, l'admission se fait par la lumière centrale *a*, et les arêtes intérieures du tiroir; l'échappement s'opère par les arêtes extérieures, et le tuyau d'évacuation E vient se greffer sur la chapelle.

Considérons le cas où l'introduction est supérieure à AF, et se prolonge jusqu'au point *f* (fig. 128); supposons que l'on diminue la quantité d'air contenue dans la chambre C, la courbe de détente est alors *fk*; au moment où l'échappement s'ouvre, l'air se détend jusqu'à la pression atmosphérique, en chassant un volume d'eau égal à E*e*; le volume expulsé jusqu'au moment de la fermeture G' est donc

$$Ee + EG' = G'e$$

Lorsque le régime est établi, si l'on admet que la chambre C soit assez grande pour que l'air ne puisse s'échapper par la lumière à la suite de l'abaissement du niveau, le volume G'*e* doit être égal à celui de l'introduction. La compression finale s'opère suivant la loi G'L; mais lorsque le piston est à l'extrémité de sa course, l'admission s'ouvre, et l'eau ramène brusquement la pression p de la chambre, à la valeur p_o; une certaine quantité d'eau x pénètre donc dans la chambre. On doit avoir du reste, en vertu de la loi de Mariotte :

$$(v - x)\, p_o = (v + HG')\, p_a$$

1. Certains petits moteurs atteignent la vitesse de 400 tours par minute.



D'ailleurs, fe, loi de détente du volume MA', est nécessairement identique à A'G', c'est-à-dire que

$$A'f = G'e$$

ce qui exprime l'égalité, déjà annoncée, entre le volume d'eau dépensé par course et le volume expulsé.

Le travail obtenu pour une face du piston est supérieur à celui du fonctionnement normal, de toute la surface qui, dans le diagramme, est recouverte de hachures, mais la dépense d'eau est augmentée, et les triangles curvilignes ALA', KeE constituent des pertes de travail, attendu que le volume A'f, dans une machine ordinaire, ou dans le fonctionnement normal examiné en premier lieu, doit produire un travail égal à A'feG'.

On pourrait chercher la valeur de MA' qui réduit les pertes au minimum, mais, pratiquement, ce volume reste constant quelle que soit l'introduction; on reconnait alors que les courbes fe, A'G', sont identiques à FE, et par conséquent, à AG. Il conviendrait donc, pour réduire la perte d'eau au minimum, de commencer la compression en G.

Enfin, examinons le cas où l'introduction est plus petite que AF. Le fonctionnement des soupapes s, s', jusqu'ici immobiles, va entrer en ligne de compte; la soupape s s'ouvre de l'extérieur vers l'intérieur lorsque la pression dans la chambre C devient inférieure à la pression atmosphérique; la soupape s', qui s'ouvre de la chambre C dans la boule d'air R établie sur la conduite de prise d'eau, au-dessus de la poche a, se soulève lorsque la pression de la chambre est supérieure à la pression d'admission.

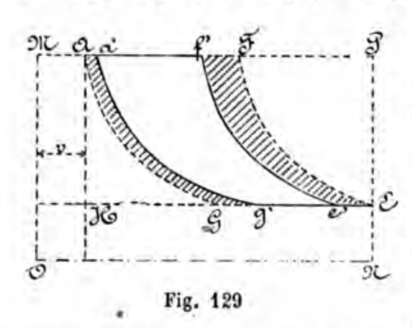


Fig. 129

Soit Af', (fig. 129), la période d'admission déterminée par l'organe de distribution, $f'e'$ la courbe de détente; à partir de la position e', la soupape s s'ouvre et le piston aspire, pendant la course directe, le volume d'air e'E; puis, l'échappement commence, pour s'arrêter en g'; l'air est comprimé et atteint la pression d'admission avant que le piston soit revenu au commencement de sa course; le volume d'air a'A s'échappe alors par la soupape s', il reste finalement

dans la chambre, le volume v à la pression p. Le volume d'eau introduit par course est Af', on doit donc avoir

$$Af' = Eg'$$

$f'e'$, courbe de détente d'un volume d'air v, à la tension p, doit être identique à la courbe AG, on a donc :

$$Af' = Ge'$$

D'où

$$Ge' = Eg'$$

et

$$g'G = Ee'$$

La courbe $g'a'$ est la loi de compression du volume d'air $v + Hg'$, c'est-à-dire du volume de l'air aspiré, augmenté de celui qui, porté à la pression p, occupera le volume v. L'appareil fonctionne donc en partie comme moteur, en partie comme un compresseur d'air qui aspire à chaque course le volume Ee'.

Le travail obtenu est moindre que le travail normal, de toute la surface couverte de hachures ; mais il est inférieur à la puissance absolue du volume d'eau dépensé, laquelle correspondrait au travail $Af'e'G$. Le travail $Aa'g'G$ constitue donc une perte pour le moteur. Il est vrai que le volume d'air Aa', à la pression p, est refoulé au réservoir R, ce qui est utile pour remplacer l'air qui se dissout peu à peu, mais pour un fonctionnement prolongé à faible introduction, cette quantité d'air dépasserait de beaucoup les besoins.

L'introduction n'est variable, dans le moteur Mayer, qu'entre certaines limites qui paraissent suffisantes pour la plupart des applications. La figure 130 donne [1] quelques reproductions de courbes d'indicateur, qui justifient plus ou moins les prévisions théoriques développées plus haut, il faut du reste observer que la coulisse de Stephenson ne permet d'atteindre que d'une manière approximative les conditions énoncées pour la marche aux différentes introductions.

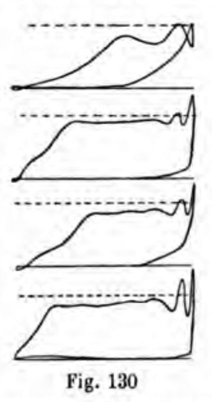


Fig. 130

114. — Les causes principales qui tendent à diminuer le rendement des machines à colonne d'eau sont les fuites aux distributeurs, ainsi

1. D'après Engineering, 1880, 2e sem., p. 209 et 211. — Voir aussi *Knoke*, ouvrage cité, et *Praktische M. C.*, 1875, p. 126; 1882, p. 467

que les fuites et le frottement du piston ; elles acquièrent une importance relative plus grande pour les pistons de faible diamètre, attendu qu'elles sont proportionnelles à des périmètres, tandis que le volume dépensé varie, à vitesse égale de piston, comme le carré d'une dimension. Le frottement, indépendant de la pression, n'est affecté que par l'état de la garniture; il peut devenir très faible. Knoke rapporte qu'au concours de Zurich, le moteur Schmid fonctionnait à vide à 60 révolutions par minute, sous une colonne motrice d'un mètre de hauteur.

TROISIÈME PARTIE

RÉCEPTEURS PNEUMATIQUES

115. — Cette classe de récepteurs comprend les appareils servant à recueillir l'action du vent [1], et présente une certaine analogie avec les moteurs hydrauliques ; pour ces deux genres de machines, la source première du travail est la chaleur solaire, et le fluide ne sert que de véhicule à l'action motrice. Toutefois, les moulins à vent, étant forcément plongés dans le milieu dont on doit recueillir l'action, l'air ne saurait agir par son poids ; les moteurs à colonne d'air n'existent pas davantage ; les machines qui nous occupent appartiennent donc toutes au genre des roues, ou des turbines actionnées par un *courant.*

La faible masse de l'air, comparée à celle de l'eau, fait qu'à vitesse et à volume égaux, la réaction produite par l'air est beaucoup plus faible, et que, pour réaliser des moulins à vent d'une certaine puissance, il est nécessaire d'employer des surfaces d'ailes considérables, même avec des courants aériens rapides. Néanmoins, comme l'emplacement des moulins n'est pas imposé d'une manière absolue, et qu'ils n'exigent aucun ouvrage préalable important, on conçoit qu'ils puissent rendre des services, dans tous les cas où la continuité du travail n'est pas indispensable, et où la puissance est limitée [2].

Les moulins à vent sont à arbre vertical [3], ou à arbre horizontal ou légèrement incliné ; nous n'étudierons que ces derniers, les seuls qui soient réellement répandus.

1. Nous ne rangerons donc pas, dans cette catégorie, les moteurs dépendant des conduites d'air comprimé ou raréfié des distributions de force à distance.
2. D'après Rühlmann, t. I, p. 455, les moulins à vent seraient originaires d'Europe; l'opinion d'après laquelle ils auraient été importés d'Orient, au temps des Croisades, est très contestable.
3. *Praktische Maschinen Construkteur*, 1873, p. 92; 1879, p. 421; pl. 82.

116. — ***Pression exercée par le vent sur une surface frappée obliquement.*** — Pour résoudre cette question, considérons d'abord le cas où une veine de section normale limitée, Ω (fig. 131), rencontre sous un certain angle un plan indéfini ; soit V la vitesse du courant.

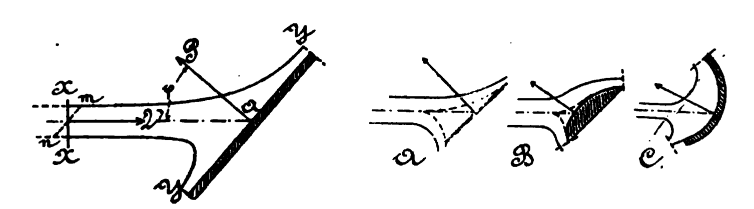


Fig. 131

Appliquons à la portion comprise entre les sections XX,YY, le principe des quantités de mouvement projetées sur la normale au plan. La section XX est choisie en un point où les filets sont parallèles ; la section par le cylindre Y est menée assez loin du point A pour que les filets, lorsqu'ils la traversent, aient une direction sensiblement parallèle au plan.

Toute la masse est soumise à la pression atmosphérique, sauf sur la surface de contact avec le plan ; mais celui-ci recevant cette pression sur la face opposée, l'action de la veine sur le plan peut être décomposée en deux parties, d'abord une force égale et opposée à celle de la pression atmosphérique agissant sur la face postérieure, en second lieu une force égale et contraire à P, qui représente la poussée *effective* sur le plan, et qui ne peut être combattue que par un obstacle contre lequel il s'appuyerait.

On voit que la pression atmosphérique n'exercera aucun effet, et que la réaction du plan, égale à P, est la seule force extérieure dont il y ait lieu de considérer l'impulsion.

On trouve pour l'accroissement, pendant le temps dt, de la quantité de mouvement projetée sur la normale au plan :

$$-\frac{\Pi}{g}\,\Omega\,V dt \times V \cos\varphi$$

et pour l'impulsion projetée de la réaction :

$$-\,P\,dt$$

D'où :

$$P = \frac{\Pi}{g} \Omega V^2 \cos \varphi$$

Soit Ω' la section *mn* de la veine parallèle au plan, on a :

$$\Omega = \Omega' \cos \varphi$$

et

$$P = \frac{\Pi}{g} \Omega' V^2 \cos^2 \varphi$$

Lorsque la veine est normale au plan, $\varphi = o$, $\Omega' = \Omega$ et :

$$P = \frac{\Pi}{g} \Omega V^2$$

Lorsque l'obstacle, au lieu d'être indéfini, présente une surface limitée (fig. 131, A), les filets, au moment où ils arrivent au bord du plan, possèdent encore une certaine quantité de mouvement dans le sens de la normale ; la réaction est moindre que dans le premier cas, et on pourrait l'obtenir en affectant la valeur de P d'un certain coefficient inférieur à l'unité, et dont la valeur dépend de l'étendue du plan, relativement à la section Ω'; on obtiendrait un résultat analogue si la surface était convexe (fig. 131, B).

Par contre, si la surface est concave (fig. 131, C), le fluide acquiert, à la sortie, une quantité de mouvement dont la projection est négative, et la réaction est augmentée d'autant ; on pourra encore obtenir la pression, en affectant P d'un coefficient dont la valeur est ici plus grande que l'unité, et qui dépend de la forme de la surface frappée.

L'aile d'un récepteur exposé au vent ne peut être assimilée à aucun des trois cas précédents, car la section de la veine fluide est illimitée, tandis que la surface rencontrée à une étendue restreinte ; néanmoins, on peut isoler, dans la masse indéfinie de fluide (fig. 132), les filets qui sont déviés par l'obstacle *mn*, et observer que la section XX, de la veine ainsi obtenue, est un multiple

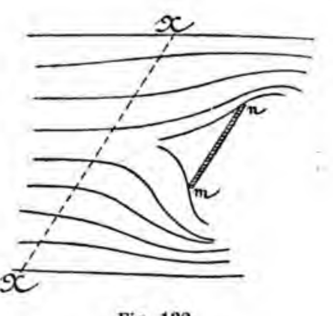


Fig. 132

déterminé de la surface s rencontrée, multiple qui, dans les mêmes circonstances, reprendra toujours la même valeur.

On obtient donc la pression cherchée, en remplaçant, dans la formule plus haut, la section Ω' par la section s du plan, et en l'affectant d'un coefficient K, à déterminer par l'expérience pour un cas analogue; on trouve ainsi :

$$P = K \frac{\Pi}{g} s V^2 \cos^2 \varphi$$

qui, pour $\varphi = o$, prend la forme :

$$P = K \frac{\Pi}{g} s V^2$$

Telle est la formule généralement admise, que l'on écrit souvent :

$$P = 2 K \frac{\Pi}{2g} s V^2$$

La valeur 2K varie suivant l'étendue du plan, évaluée en m^2, entre 1,86 et 3. Pour l'air atmosphérique, à la température $t°$ centigrade et sous la pression barométrique H, en millimètres de mercure, on a :

$$\Pi = 1{,}293 \frac{273}{273 + t} \frac{H}{760}$$

Mais on peut simplement admettre un chiffre rond, à cause de l'incertitude que présente la valeur de K; si l'on fait $\Pi = 1.293$ et

$$2 K = 1{,}86$$

on trouve :

$$P = 0{,}122 \, s \, V^2$$

Hutton prend au lieu de s, la valeur $s^{1,1}$.

M. Ferrel [1] établit la formule suivante, d'accord avec celle proposée par M. Goupil [2].

$$P = 0{,}0622 \, s \, V^2$$

1. *American meteorological Journal*, cité par la *Revue scientifique* du 21 janvier 1888. — Voir aussi la formule de Crosby, dans le 1er fascicule du présent ouvrage, nº 84. — Note.
2. Haton de la Goupillière. — Cours de Machines, p. 556-558.

qui donne des chiffres moitié moindres que celle généralement employée, tandis que la formule du *Board of Trade* anglais donne des pressions doubles. Ces désaccords n'ont rien qui doive étonner, si l'on se reporte à l'origine du coefficient K, qui diffère avec la grandeur absolue et la forme de la surface sur laquelle on opère.

Le tableau des pressions du vent, donné par d'Aubuisson, complété par quelques chiffres, et reproduit dans la plupart des ouvrages pratiques, est le suivant, il répond à la formule :

$$P = 0{,}135\, s\, V^2$$

Tableau des pressions du vent.

V EN MÈTRES par seconde	P EN KILOGRAMMES par mètre carré	OBSERVATIONS
1. . . .	0,13	A peine sensible.
2. . . .	0,54	Légère brise.
4. . . .	2,17 . . .	Vent frais.
6. . . .	4,87	Fait porter les voiles.
7. . . .	6,46	Convenable pour les moulins.
9. . . .	10,97	Bonne brise pour voiliers.
10. . . .	13,54	Très forte brise.
12. . . .	19,50 . .	Fait serrer les hautes voiles.
15. . . .	30,47	Vent très fort.
20. . .	54,16	
24. . . .	78,00	Tempête.
30. . . .	121,88	
45. . . .	274,23	Grand ouragan.

117. — *Cas où le plan, au lieu d'être immobile, est animé d'une certaine vitesse v.* — Le choc est le même que si l'aile était immobile, le courant étant animé de la vitesse relative w (fig. 133) ; car pour un observateur participant au mouvement du plan [1] les choses se passent

1. Une flamme, hissée à la pomme du mât d'un navire, prend la direction de w, qui représente le *vent apparent;* celui-ci se confond avec le vent vrai lorsque le navire est immobile.

comme si la vitesse V avait subi la déviation qui la transforme en la vitesse relative w.

Soit φ' l'angle formé par w avec la normale, la pression sera :

$$p = \mathrm{K}\,\frac{\Pi}{g}\,s\,w^2 \cos^2 \varphi'$$

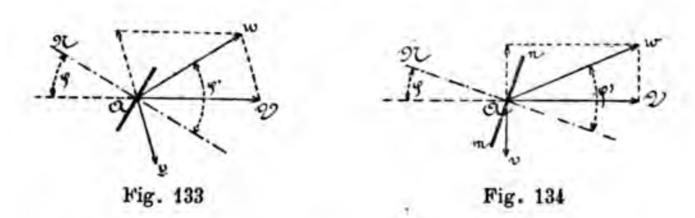


Fig. 133 Fig. 134

118. — *Travail recueilli sur l'élément de l'aile d'un moulin.* — Considérons la section $m\,n$ (fig. 134), faite par un plan mené parallèlement à l'axe de rotation, et perpendiculaire au rayon r passant par le point milieu de la section ; l'élément infiniment petit, de largeur dr, peut être considéré comme un plan ; en conservant toutes les notations qui précèdent, et en appelant b la dimension $m\,n$, et ω la vitesse angulaire, on a :

$$v = \omega\, r$$

et

$$w \cos \varphi' = \mathrm{V} \cos \varphi - \omega\, r \sin \varphi$$

La pression normale sur l'élément bdr est donc :

$$\mathrm{K}\,\frac{\Pi}{g}\,b\,dr\,(\mathrm{V} \cos \varphi - \omega\, r \sin \varphi)^2$$

Pour obtenir le travail dû à cette force, il faut faire le produit de sa projection sur la vitesse d'entraînement, par cette vitesse, ce qui donne, en appelant $d\mathrm{T}$ le travail élémentaire :

$$d\mathrm{T} = \mathrm{K}\,\frac{\Pi}{g}\,b\,dr\,(\mathrm{V} \cos \varphi - \omega r \sin \varphi)^2\, \omega r \sin \varphi$$

Dans cette expression, b est constant ou est une fonction simple et connue du rayon ; si l'on donne de même l'expression de φ en fonction

de r, la surface de l'aile est complètement définie, et l'on peut obtenir la valeur de T par l'intégration ; le travail sera fonction de ω.

119. — On peut aussi se proposer de rechercher quelle doit être, en chaque point du rayon, la valeur de φ pour que, ω étant fixé, le travail recueilli soit maximum. On résout cette question de maximum d'une valeur intégrale sans avoir recours au calcul des variations, puisque la valeur de dT ne contient pas les dérivées de φ par rapport à r, et qu'on peut se borner à faire la recherche pour chaque élément en particulier, on écrira donc :

$$\frac{d\,(d\mathrm{T})}{d\varphi} = 0$$

en considérant r comme constant, ce qui donne :

$$(\mathrm{V}\cos\varphi - \omega r\sin\varphi)\left[(\mathrm{V}\cos\varphi - \omega r\sin\varphi)\cos\varphi - 2\,(\mathrm{V}\sin\varphi + \omega r\cos\varphi)\sin\varphi\right] = 0$$

Nous pouvons diviser par le facteur :

$$\mathrm{V}\cos\varphi - \omega r\sin\varphi$$

lequel est différent de zéro, car, sinon, la vitesse relative w serait tangente à l'élément, et le travail serait nul. En opérant les simplifications, il vient :

$$\mathrm{tg}^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{\omega r}{\mathrm{V}}\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{1}{2} = 0$$

d'où :

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{3}{4}\frac{\omega r}{\mathrm{V}} + \sqrt{\frac{9}{16}\frac{\omega^2 r^2}{\mathrm{V}^2} + \frac{1}{2}}$$

La valeur négative du radical doit être écartée, car en l'interprétant, on serait amené à donner à l'aile une inclinaison qui produirait la rotation en sens contraire de ω.

L'équation ci-dessus est précisément la relation cherchée entre φ et r ; on voit que, pour des valeurs de V et ω données, $tg\,\varphi$ diminue lorsque r augmente, et, par conséquent, l'aile doit présenter une surface gauche, ce que l'on trouve déjà réalisé dans les moulins hollandais les plus anciens.



Mais, pour chaque valeur du rapport $\frac{\omega}{V}$, la forme de la surface gauche diffère, puisque ce rapport affecte la valeur de $tg\,\varphi$, relative au rayon r; il y aurait donc lieu de chercher la valeur de ω qui, pour la vitesse V donnée, rend maximum le travail recueilli sur l'aile (1). Sans nous engager dans cette recherche, remarquons que, si le rapport $\frac{\omega}{V}$ était trouvé, on en tirerait immédiatement la vitesse ω de rotation la plus favorable, et, par l'expression de $tg\,\varphi$, la forme d'aile la plus convenable ; cette forme conviendrait pour toutes les vitesses du vent, à la condition que l'on fît varier ω proportionnellement à V, car on obtiendrait alors une valeur de $tg\,\varphi$ ne dépendant que du rayon.

Smeaton a trouvé, par l'expérience, qu'en laissant tourner entièrement à vide un moulin de construction ordinaire, la vitesse qu'il prend à l'extrémité de l'aile est 4V, et qu'on obtient le maximum d'effet utile en réglant la résistance de manière à réduire cette vitesse à :

$$\frac{2}{3} \times 4\,V = \frac{8}{3}\,V \text{ ou } 2{,}7\,V \text{ environ.}$$

Telle est la valeur de ωr_1, si nous appelons r_1 le rayon à l'extrémité de l'aile. On a donc :

$$\frac{\omega r_1}{V} = \frac{8}{3}$$

d'où :

$$\frac{\omega r}{V} = \frac{8}{3}\frac{r}{r_1}$$

et :

$$\text{tg}\,\varphi = -2\frac{r}{r_1} + \sqrt{4\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

120. — *Puissance du moteur.* — On a, pour le travail recueilli par seconde :

$$T = Kn\frac{\Pi}{g}\int_{r_0}^{r_1} b\,(V\cos\varphi - \omega r\sin\varphi)^2\,\omega r\sin\varphi\,dr$$

n désignant le nombre d'ailes.

1. *Haton de la Goupillière.* — Cours de Machines, t. I, p. 579 à 584.

Ou :

$$T = Kn \frac{\Pi}{g} \int_{r_0}^{r_1} b r_1 \left(\cos \varphi - \frac{\omega r}{V} \sin \varphi \right)^2 \frac{\omega r}{V} V^3 \sin \frac{dr}{r_1}$$

expression dans laquelle $\frac{\omega r}{V}$ peut être remplacée par $2{,}7 \frac{r}{r_1}$, et qui, jointe à celle de $tg\,\varphi$, permettrait de calculer T.

La valeur numérique de K étant assez incertaine, ce calcul serait sans utilité, mais l'expression de T montre que la puissance est proportionnelle à V^3, et à un certain coefficient numérique qui n'est fonction que des dimensions ou de la surface des ailes $n b r_1$ (car b est en général constant), à la condition que l'on adopte en passant d'un moulin à l'autre, la même valeur de $\frac{r_0}{r_1}$; il vient alors :

$$T = \lambda S V^3$$

S désigne la surface globale de toutes les ailes.

Les expériences faites par Smeaton sur de petits modèles ont donné, pour les ailes hollandaises :

$$\lambda = 0{,}05$$

Celles de Coulomb, qui ont été faites sur des moulins à pilons, alors établis près de Lille [1], réduites en mesures métriques, donnent, d'après Navier :

$$\lambda = 0{,}08$$

On a donc, pour la puissance exprimée en chevaux :

$$T_{ch} = 0{,}0004 \ S V^3$$

Il ressort de cette formule que la puissance des moulins décroît très rapidement avec la vitesse.

1. Observations théoriques sur l'effet des moulins à vent et sur la figure de leurs ailes : mémoire annexé à la *Théorie des Machines simples*, de Coulomb. Beaucoup d'auteurs ont rapporté ce coefficient d'une manière inexacte.

121. — *Construction des génératrices des ailes.* — Pour construire l'expression $tg\,\varphi$, il suffit de porter (fig. 135) :

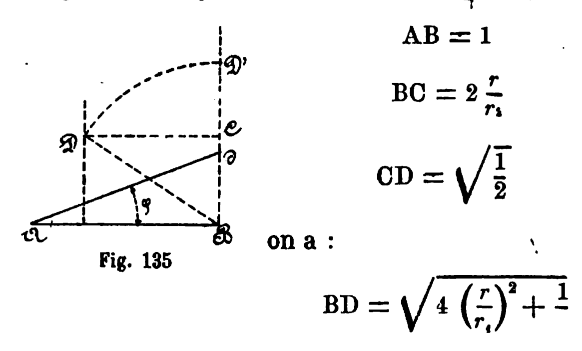


Fig. 135

$$AB = 1$$

$$BC = 2\frac{r}{r_1}$$

$$CD = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

on a :

$$BD = \sqrt{4\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

Du point B, on décrit l'arc DD', on a :

$$tg\,\varphi = CD'$$

donc, on portera $Bd = CD'$, et l'on aura $BAd = \varphi$.

Lorsque le rayon intérieur est égal à $\frac{1}{6}$ du rayon extérieur (très longues ailes de 14 à 15 mètres de rayon) on trouve, pour l'élément le plus rapproché du centre :

$$\varphi = 24°$$

Lorsque ce rapport s'élève à $\frac{1}{4}$ (bras de 10 mètres de rayon), on a :

$$\varphi = 20°$$

Ces données coïncident bien avec une règle pratique donnée par Schwahn dans son *Traité de la Construction des Moulins*, et citée par Rühlmann ; toutefois, au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'extrémité de l'aile, l'angle φ diminue plus rapidement que d'après le tracé, il prend une valeur nulle et même négative pour les dernières traverses ; l'aile se retourne donc légèrement en sens *contraire* du mouvement ; ce mode de construction, quelque singulier qu'il puisse paraître, est celui de tous les moulins répandus à profusion dans les Pays-Bas [1], où ils repré-

1. Une très longue expérience a sanctionné cet usage; peut-être provient-il simplement de ce que l'on compte sur la flexion des traverses qui supportent la toile, et qui concourt, avec la torsion du bras de l'aile, dont l'angle est maximum en ce point, à rétablir une bonne inclinaison lorsque le vent agit sur l'aile.

sentent encore une force motrice énorme, employée à faire mouvoir des roues élévatoires et des vis d'Archimède pour l'assèchement des *polders*, et même à actionner des usines.

122. — *Divers genres de moulins.* — On rencontre, pour les moulins ordinaires, deux genres différents d'installation ; dans la première espèce (fig. 136), toute la construction est en bois, et s'oriente pour prendre la direction du vent ; elle repose, par l'intermédiaire d'un chapeau, sur un poinçon qui forme la pièce centrale du support, installé sur cinq dés en maçonnerie ; une barre B, reliée à la charpente, sert, au moyen d'un treuil qui s'y trouve monté, et qui tire sur un point fixe, à orienter et à fixer le plan des ailes.

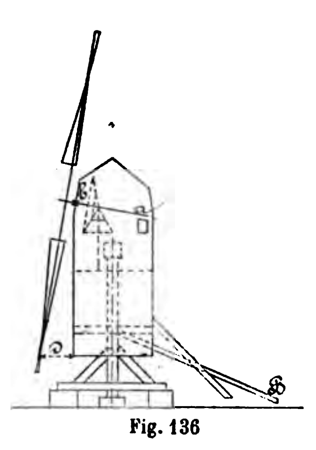


Fig. 136

L'arbre de la roue repose en deux points, *a* et *b*, le poids des ailes est en porte à faux, et le point *b* est très chargé ; l'arbre n'est jamais horizontal, et son inclinaison varie de 10 à 18° sur l'horizon.

Cette inclinaison est motivée par plusieurs causes ; d'abord, à cause du porte à faux, l'usure des tourillons et la fatigue de la charpente tend à diminuer constamment cette inclinaison ; la pente donne à l'arbre une tendance à s'appuyer de *b* vers *a*, on obtient donc facilement la fixité dans le sens longitudinal en plaçant au point *a* une butée qui donne lieu à très peu de frottement ; cette fixité est nécessaire pour la transmission par roues coniques.

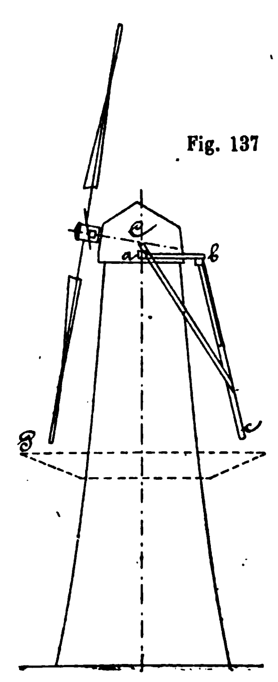


Fig. 137

Enfin, l'inclinaison a encore pour effet d'augmenter la distance *d*, avec un minimum de porte à faux pour l'arbre, ce qui permet à l'aile de travailler en dehors du remous causé par la construction.

Dans le deuxième genre de moulins, également fort anciens, le chapeau C est seul mobile sur une tour fixe en bois ou en maçonnerie (fig. 137);

il s'oriente à bras d'homme, au moyen de la charpente *a b c*, ou à l'aide d'une roue-gouvernail dont le plan est perpendiculaire à celui de la roue, et qui agit, par l'intermédiaire d'un pignon, sur une couronne dentée horizontale, posée sur la maçonnerie.

Les moulins les plus grands comportent quatre ailes de 14 mètres de longueur, dont il reste environ $11^m,70$ de longueur utile; la largeur uniforme des ailes est de 2 mètres; on a donc :

$$S = 93,60$$

Pour

$$V = 7^m,00$$

on a

$$T_{ch} = 13 \text{ environ.}$$

La vitesse au bord de l'aile est

$$\omega r_1 = 2,7\ V = 18^m,90$$

ce qui correspond à 13 tours par minute.

Lorsque la vitesse du vent est réduite à 4 mètres, le travail s'abaisse à 2,5 chevaux environ.

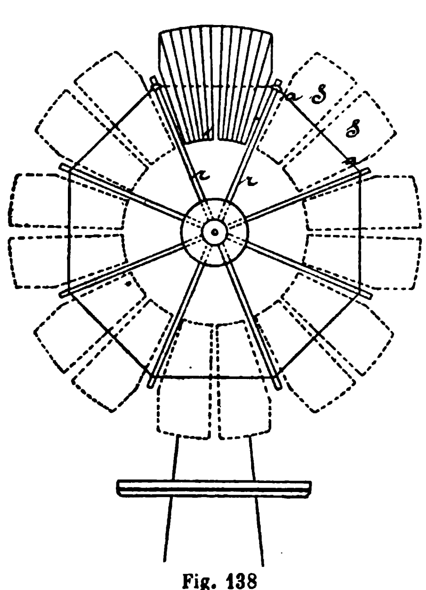


Fig. 138

123. — *Roues américaines.* — Dans ces moulins, connus en Europe depuis l'Exposition de Philadelphie, la surface exposée au vent est formée d'un grand nombre de lattes inclinées, en bois de sapin, ayant la forme d'étroits secteurs, et qui, par leur ensemble, forment un disque presque complet (fig. 138), dont le rayon s'élève jusqu'à 17 mètres. Ces roues sont disposées pour s'orienter automatiquement, et sont munies d'un régulateur, qui diminue la surface exposée au vent, lorsque la vitesse dépasse une certaine limite.

Nous avons trouvé (n° 118) l'expression du travail recueilli sur un petit élément plan situé à la dis-

tance r du centre, et tournant à la vitesse angulaire ω ; proposons-nous de chercher les valeurs de φ et ω les plus convenables pour que le travail soit maximum. Nous aurons, en laissant de côté tout ce qui ne comprend pas ces variables :

$$M = \left(\cos\varphi - \frac{\omega r}{V}\sin\varphi\right)^2 \frac{\omega r}{V}\sin\varphi$$

En désignant $\frac{\omega r}{V}$ par α, et posant successivement

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0$$

et

$$\frac{dM}{d\varphi} = 0$$

On trouve $\varphi = o$ et $\alpha = \infty$.

Ces valeurs sont évidemment inadmissibles, elles montrent que le travail n'est pas susceptible de maximum théorique ; mais, pratiquement, les résistances passives modifient ce résultat ; la seule conclusion à tirer de la théorie est donc que l'on doit faire tourner les roues aussi vite que possible, et adopter pour chaque élément, c'est-à-dire pour la latte entière, puisqu'elle est plane, une inclinaison assez faible.

124. — Cependant, comme l'inclinaison n'est pas nulle, et que la vitesse ne peut être infinie, il est utile de rechercher l'une de ces quantités en fonction de l'autre, supposée connue.

Admettons que chaque latte ait la forme d'un secteur complet, s'étendant jusqu'au centre, sur l'angle θ (celui-ci étant compté en vraie grandeur, et non en projection); adoptons les notations du n° 118, nous aurons :

$$dT = \frac{\Pi}{g}\,\theta\,K\,\omega\,V^2\int_o^{r_1}\left(\cos\varphi - \frac{\omega r}{V}\sin\varphi\right)^2\sin\varphi\,r^2\,dr$$

qu'il faut intégrer en supposant à φ une valeur constante, ce qui donne, en posant :

$$\frac{\omega r_1}{V} = \alpha_1$$

$$T = \frac{\Pi}{g}\,\theta\,K\,\omega\,V^2\,r_1^3\left(\frac{1}{5}\alpha_1^2\sin^3\varphi - \frac{1}{2}\alpha_1\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\right)$$

Supposons que α_1 soit connu, et cherchons l'inclinaison qui donnera le maximum du travail, il faudra poser :

$$\frac{dT}{d\varphi} = 0$$

Il vient :

$$\frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg}^3 \varphi + \left(\frac{3\alpha_1^2}{5} - \frac{2}{3}\right) \operatorname{tg}^2 \varphi - \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{3} = 0$$

Admettons, par exemple, comme pour les moulins ordinaires (hypothèse purement gratuite) :

$$\alpha_1 = \frac{8}{3}$$

On vérifie facilement que la valeur approximative de φ est de 25° (1).

En réalité, les lattes ne s'étendent pas jusqu'au centre, leur longueur n'est que les $\frac{2}{3}$ du rayon extérieur, mais la partie centrale affecte très peu l'expression du travail recueilli, et par conséquent le maximum de ce travail.

A la vérité, rien ne démontre que la valeur de α_1 trouvée par Smeaton par des expériences sur les ailes gauches, convienne également aux secteurs plans, mais, quoiqu'il en soit, la puissance augmente, comme pour les ailes ordinaires, proportionnellement au carré du rayon, et au cube de la vitesse du vent, à la condition que l'on maintienne α constant ; pour s'en assurer, il suffit de transformer légèrement la valeur de T en remplaçant ωr_1 en fonction de V.

A défaut d'expériences, on peut, pour obtenir la puissance en fonction de la vitesse du vent, adopter le même coefficient que pour les moulins à ailes gauches, et l'on a :

$$T_{ch} = 0{,}0004\, S V^3$$

S est la surface projetée de l'ensemble des secteurs, c'est-à-dire de

1. A. Hollenberg. — *Die neueren Windraeder.* — Baumgaertner, 1885, donne pour le moulin Halladay

$$\varphi = 28 \text{ à } 35°$$

la partie annulaire du disque [1]. Les puissances suivantes, assignées par le constructeur Halladay aux roues de divers diamètres, pour un vent de 7 mètres par seconde, sont légèrement supérieures à celles qui résulteraient de la formule.

DIAMÈTRE EXTÉRIEUR EN PIEDS ANGLAIS	8	12	16	20	25	30	40	50
Puissance en chevaux pour V = 7. . . .	0,5	1	2,5	4,5	6	8	18	28

125. — Les constructeurs américains ont appliqué, à leurs moulins à vent, un régulateur destiné à maintenir automatiquement la vitesse entre certaines limites; l'un des systèmes les plus parfaits est le régulateur Halladay; voici comment il est constitué dans son ensemble : les

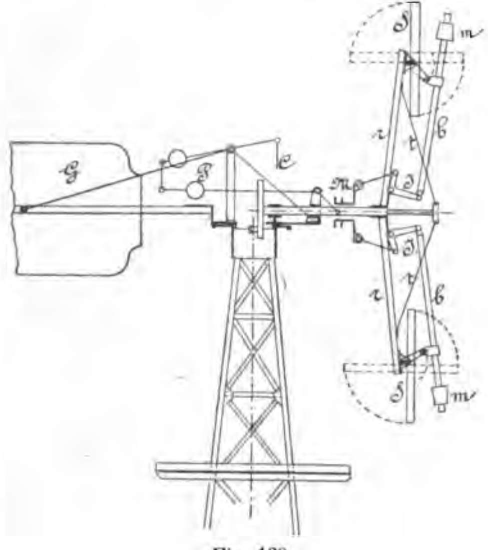


Fig. 139

secteurs S, formés par chaque groupe de lattes, peuvent pivoter autour d'un arbre *aa* (fig. 138 et 139), qui leur sert de support; ces arbres tour-

1. Perels donne, pour les roues américaines, le coefficient 0,0005 au lieu de 0,0004, à cause de la réduction des frottements. — V. Hollenberg, ouvrage cité, p. 3.

nent librement dans les articulations montées à l'extrémité des rayons *r*, mais les pressions sont à peu près équilibrées, et ne donnent aux secteurs aucune tendance à basculer ; chacun d'eux est relié à un bras *b* portant une masse *m* ; la force centrifuge, qui s'exerce sur l'articulation I, est transmise au manchon M sur lequel agit, par l'intermédiaire d'un levier coudé, le contrepoids P ; celui-ci est réglé d'après la vitesse que l'on veut obtenir. Lorsque, la vitesse augmentant, la force centrifuge atteint une certaine valeur, les secteurs S prennent la position représentée en trait pointillé dans la figure 139. Cet appareil n'est autre que l'appareil à boules, modifié d'après les circonstances, et adapté à un arbre horizontal. On peut arrêter la roue en soulevant le contrepoids au moyen de la chaine C.

Dans le système *Eclipse*, de *Corcoran* [1], le régulateur consiste en une palette *g* (fig. 140), qui se trouve dans le même plan que la roue *r* ; l'action du vent sur cette palette est équilibrée en temps ordinaire par un contrepoids ; lorsque la pression augmente, la roue s'efface dans la position *r'*, elle reprend sa position première sous l'action du contrepoids, lorsque le vent diminue.

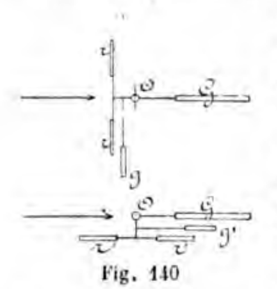


Fig. 140

En général, toutes les roues américaines s'orientent d'elles-mêmes sous l'effet d'un gouvernail G (fig. 139), qui forme contrepoids à la roue, et entraine toute la plate-forme tournante qui supporte les deux parties de l'arbre.

126. — *Remarques sur l'emploi du moulin à vent.* — La vitesse du vent est très variable ; des relevés faits pendant 10 années consécutives à Cuxhaven, à l'embouchure de l'Elbe, ont fourni, sur la vitesse et la fréquence du vent [2], un tableau que nous extrayons du grand ouvrage de Rühlmann :

1. *Hollenberg* décrit les systèmes Éclipse, Excentrique, Ultra Standard, Leffel, Bird, Champion ; cet ouvrage renferme les dessins très détaillés de la roue Halladay, et donne des indications utiles sur la construction des tours de support.

2. Nous n'avons pu réussir à nous procurer ces données pour la Belgique.

VITESSE EN MÈTRES par seconde	0 à 1,43	1,43 à 2,86	2,86 à 4,29	4,29 à 5,72	5,72 à 7,15	7,15 à 8,58	8,58 à 10,01	10,01 à 11,44	11,44 à 12,87	12,87 à 14,30	14,30 à 15,73
Nombre de jours pendant lequel le vent règne annuellement.	21	77	99,1	77	47,8	25,1	11	5,3	1,4	0,4	0,1

On voit que les vitesses supérieures à $5^m,72$ par seconde ne se produisent que pendant 1/4 de l'année, tandis qu'elles sont supérieures, pendant les 3/4 de l'année, à $2^m,86$ par seconde ; pour effectuer un travail déterminé, on est donc obligé de compter sur une vitesse du vent assez faible, et par conséquent d'installer une roue de grand diamètre, sinon on serait exposé à chômer pendant de longs intervalles.

La plus grande difficulté qui se présente dans l'emploi du moulin à vent réside plus dans le changement d'allure que dans la variation du travail recueilli; car, le couple moteur, qui augmente en raison directe de la puissance, et en raison inverse de la vitesse angulaire, varie comme le carré du nombre de tours; admettons, par exemple, que la vitesse soit doublée : si l'on veut recueillir le travail maximum, il faut quadrupler les résistances, et doubler la vitesse des opérateurs. Dans la plupart des cas, on n'augmente pas les résistances utiles à vaincre, et la vitesse s'accroît d'elle-même jusqu'à ce que, par l'augmentation des résistances passives, un nouveau régime s'établisse ; le travail utile effectué n'augmente donc que proportionnellement au nombre de tours, en supposant, bien entendu, que l'opérateur s'en accommode. Si les liaisons entre le moteur et l'opérateur étaient établies pour une vitesse déterminée du vent, lorsque cette vitesse ne serait pas atteinte, le couple moteur n'aurait pas une valeur suffisante pour entraîner la résistance; on est donc obligé d'établir les liaisons pour le minimum utilisable du couple moteur.

Ce fait explique comment, dans les moulins à vent employés à actionner des pompes à piston, le travail en eau élevée ne représente, pour de bonnes valeurs de V (6 à 7 mètres), que le quart environ de la puissance maximum disponible à cette vitesse ; il en serait autrement si, comme on le fait quelquefois, la liaison entre le piston de la pompe et

l'arbre pouvait être modifiée, et si l'on pouvait, par exemple, changer la course de la pompe. En général, on renonce à cette complication, les pompes sont choisies de manière à pouvoir être actionnées lorsque la vitesse du vent descend assez bas ; vient-elle à augmenter, le régime s'accélère, le travail effectué augmente comme la simple puissance du nombre de tours, et le régulateur empêche que le mouvement ne devienne trop rapide.

Les roues américaines sont surtout employées pour les alimentations agricoles, pour desservir les chateaux d'eau de lignes secondaires de chemins de fer, etc. ; elles remplacent d'une manière avantageuse la manœuvre à bras d'hommes, et réduisent la dépense dans le rapport de 3 à 1 au moins (1).

1. En comptant sur 15 °/o du prix d'établissement pour couvrir l'amortissement et les dépenses d'entretien. — *Praktische Maschinen Construkteur*, 1880, p. 398.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Machines servant à recueillir l'action des Moteurs animés.

DEUXIÈME PARTIE

Récepteurs hydrauliques.

CHAPITRE I.

Machines dans lesquelles l'eau agit par son poids.

§ I.

Théorie générale des roues hydrauliques à action de poids.

§ II.

Roue de côté ordinaire.

CHAPITRE II.

Machines dans lesquelles l'eau agit par sa vitesse.

§ I.

Théorie générale des turbines.

§ II.

Turbines axiales d'action, ou à faible réaction.

§ III.

Turbines de Jonval ou de Henschel.

§ IV.

Turbines à libre déviation, de Girard.

§ V.

Turbines hydropneumatiques, de Girard.

§ VI.

Turbines axiales à réaction.

A. — Cas où $\beta = 90°$

§ XIV.

Régulateurs automatiques.

§ XV.

Mode d'établissement des turbines.

CHAPITRE III.

Machines dans lesquelles l'eau agit par pression.

§ I.

Moteurs à action directe.

§ II.

Machines à rotation.

§ III.

Etude hydrodynamique des machines à colonne d'eau.

Premier cas.

Machines à bielle longue.

Deuxième cas.

Machines à cylindre oscillant.

§ IV.

Réglage des machines à colonne d'eau.

TROISIÈME PARTIE

Récepteurs pneumatiques.

Paris. — Imp. E. Bernard & Cie. 71, rue La Condamine

COURS

DE

MECANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PARIS. — IMPRIMERIE E. BERNARD ET Cie
23, Rue des Grands-Augustins, 23.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE SPÉCIALE DU GÉNIE CIVIL DE GAND

PAR

J. BOULVIN

INGÉNIEUR HONORAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME DE FRANCE
INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS MARITIMES DE L'ÉTAT BELGE

3e FASCICULE

THÉORIE DES MACHINES THERMIQUES

AVEC 130 FIGURES DANS LE TEXTE



PARIS

E. BERNARD et Cie, IMPRIMEURS-EDITEURS

53 ter, Quai des Grands-Augustins, 53 ter

1893

AVANT-PROPOS

Les moteurs thermiques et les appareils frigorifiques comprennent, outre les mécanismes qui composent toute machine, des corps spéciaux soumis à certaines opérations physiques ayant pour objet la conversion de la chaleur en travail, ou *vice versa*. Née du besoin d'étudier ces transformations au point de vue d'une meilleure utilisation du combustible dans les machines à vapeur, la Thermodynamique n'a pu que lentement dissiper certaines erreurs autrefois accréditées, et dans lesquelles il était facile de verser.

C'est en portant leur attention sur les manifestations si évidentes de la pression, que les ingénieurs ont d'abord étudié les machines à vapeur; les vues élevées de Sadi Carnot n'ont pas été comprises de ses contemporains; il en avait été ainsi des spéculations de Montgolfier, dont le *Pyro-Bélier*, ou machine à air dilaté, devança d'un demi-siècle le moteur à air chaud de Stirling. Seguin aîné, le célèbre inventeur de la chaudière tubulaire, à laquelle la locomotive de Stephenson dut son succès, émit vers 1830, dans un ouvrage presque oublié aujourd'hui (1), quelques principes très remarquables sur le rôle de la chaleur dans les moteurs; les idées de Seguin étaient déjà basées sur le principe de l'équivalence, qui ne devait être formulé explicitement que plus tard.

Mais, malgré ces traits de clarté, jetés par quelques hommes de génie sur la nature de l'agent dynamique employé dans les machines à vapeur, on a continué à voir dans ces engins des moteurs à pression, que l'on s'est attaché à perfectionner, avant tout, au point de vue organique.

Dans cet ordre d'idées, bien des questions se posaient qui devaient

1. *De l'Influence des Chemins de fer et de l'Art de les tracer et de les construire.*

rester sans réponse ; la nature du fluide, son mode d'action même, pouvaient donner lieu aux plus grandes méprises ; on devait considérer comme désirable la substitution, à la vapeur d'eau, de celle d'un liquide plus volatil possédant une tension élevée ; la machine à piston était sans doute regardée, après Watt, comme la seule à laquelle il convînt de s'arrêter, et on aurait envisagé comme un appareil tout spécial, ne présentant pas la moindre analogie avec le moteur à vapeur, la turbine que M. Parson est parvenu récemment à rendre pratique.

La Thermodynamique donne la solution des problèmes qui se rapportent à l'emploi de la chaleur, sinon d'une manière complète, à cause de leur complication accidentelle, au moins avec l'approximation que comportent les hypothèses admises, soit pour faciliter les calculs, soit pour suppléer au manque de données de la Physique expérimentale. On conçoit, du reste, qu'il serait impossible de faire la moindre recherche ayant pour objet l'utilisation de la chaleur, au moyen des aperçus dans lesquels on se borne, par exemple, à analyser la marche des pressions du fluide qui évolue dans la machine, puisque la pression est un élément intermédiaire, dont l'influence sur le rendement, toujours accessoire et indirecte, peut même disparaître.

Aussi, ne faut-il accepter qu'après mûr examen, les raisonnements élémentaires au moyen desquels on prétend parfois démontrer certains principes fondamentaux de la machine à vapeur, tels que les avantages des pressions élevées, des grandes expansions, etc. Mais il faut éviter aussi les conclusions hâtives que l'on a trop souvent formulées en appliquant, d'une manière superficielle, les théorèmes généraux de la Thermodynamique. Les problèmes qui se posent journellement dans la pratique sont compliqués par des phénomènes accessoires dus à la conductibilité ou à d'autres causes, découvertes ou pressenties par Hirn, Reech, Isherwood, mais encore imparfaitement connues, et touchant aux questions les plus difficiles du mouvement de la chaleur dans les milieux.

On comprend donc qu'il soit encore impossible de trouver *a priori*, dans l'état actuel de la science, les résultats *quantitatifs* nécessaires à l'établissement de toute machine thermique ; le volume et les proportions des cylindres, le choix de la pression initiale et du degré d'introduction, le volume d'eau froide à injecter au condenseur, le taux

de la compression dans l'espace nuisible, la vitesse de rotation, sont déterminés au fond par l'expérience des résultats acquis, plus ou moins codifiés sous une apparence de théorie; la Thermodynamique ne permet pas davantage de déterminer d'avance avec précision quelle sera la consommation d'une machine à vapeur fonctionnant dans des conditions données. Au premier abord, il semble qu'il y ait, entre les questions posées et l'insuffisance des réponses, bien de la place pour les perfectionnements de la théorie; mais, dans toutes les sciences appliquées, les solutions *quantitatives* sont avant tout expérimentales.

Il ne pouvait entrer dans notre intention d'écrire un traité complet de Thermodynamique; il s'en trouve en effet d'excellents, qui s'adressent même spécialement aux techniciens; tels sont ceux de *Zeuner* [1], *Madamet* [2], *Haton de la Goupillière* [3]; d'autres, moins développés au point de vue des applications industrielles, sont tout à fait remarquables par la rigueur mathématique et la généralité de leurs démonstrations [4]; mais ces ouvrages sont, ou trop étendus, ou trop spéciaux pour s'adapter au programme de ce cours. Nous nous sommes donc proposé d'abord d'établir, aussi rapidement que possible, les théories fondamentales rigoureusement nécessaires en vue des applications, et en second lieu, d'étudier les principaux moteurs thermiques et les appareils frigorifiques, en profitant, autant que possible, des méthodes graphiques, avec lesquelles l'ingénieur se familiarise facilement.

C'est dans cet ordre d'idées que nous avons développé le mode de représentation imaginé par M. *Th. Belpaire* [5], mode qui consiste à choisir l'entropie et la température comme variables définissant l'état du corps.

1. G. Zeuner. — *Grundzüge der Mechanischen Wærmetheorie*, 2e édition, traduction française par Arnthal et Cazin. — Gauthier-Villars, 1869.
G. Zeuner. — *Technische Thermodynamik*, 3e édition, augmentée, de l'ouvrage précédent. — Leipzig, Félix, 1887-1890.
2. Madamet. — *La Thermodynamique et ses applications aux machines à vapeur*. — Paris, E. Bernard et Cie, 1889.
Ainsi que l'indique son titre, cet ouvrage est spécial à la machine à vapeur; les questions d'écoulement n'y sont pas traitées, non plus que la théorie des machines à air chaud, des moteurs à gaz et des appareils frigorifiques.
3. M. Haton de la Goupillière. — *Cours de Machines*. t. I. — Paris, Dunod, 1889.
4. J. Bertrand. — *Thermodynamique*. — Gauthier-Villars, 1887.
Poincaré. — *Thermodynamique*. — Paris, Georges Carré, 1891.
5. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1872, V. 34. — Le mémoire de M. Gibbs, à qui le mode de représentation indiqué ci-dessus a été attribué par M. Cotterill, ne date que de 1873.

MM. *Linde* (6), *Schrœter* (7), *Macfarlane Gray* (8) et *Hermann* (9) ont déjà fait un usage fécond de ce nouveau diagramme, et M. *Zeuner* lui a consacré une place importante dans l'édition récente de son remarquable traité; M. *Cotterill* (10) a signalé aussi quelques-unes de ses propriétés.

Nous nous permettons de mentionner, comme susceptible de nombreuses applications à la calorimétrie de la machine à vapeur, les procédés graphiques au moyen desquels nous avons relié la courbe des pressions (ou vulgairement le diagramme d'indicateur) à la ligne de transformation dans le système de coordonnées (T, S).

La table numérique des propriétés de la vapeur d'eau saturée, qui figure à la fin de ce volume, est extraite de l'ouvrage de M. Madamet, qui a bien voulu nous autoriser à la reproduire avec l'assentiment de leur auteur, M. de Montchoisy, ingénieur de la marine.

6. *Theorie der Kælteerzeugungsmaschinen.* — Munich, 1875.
7. *Ueber die Anwendung von Regeneratoren bei Heissluftmaschinen.* Zeitschrift des Vereines D. I., 1883.
8. *The Rationalisation of Regnault's Experiments* on Steam (1889-1890), traduit par M. Gustave Richard. — Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, 1890.
9. *Die Graphische Behandlung der mechanischen Wærmetheorie.* — Berlin, Springer, 1884.
10. *The Steam Engine considered as a Thermodynamic Machine*, 2e édition.—Spon 1890.

On consultera aussi l'intéressante monographie intitulée « *Das Waermediagramm* » (Berlin, Leonbard Simion, 1893), que vient de faire paraître *M. R. Mollier*, privatdocent à l'École de Munich, et dont nous n'avons pu tirer parti pour la rédaction du présent ouvrage.

THÉORIE DES MACHINES THERMIQUES

CHAPITRE PREMIER

Thermodynamique générale.

§ I.

Loi caractéristique existant pour chaque corps.

1. — *Température.* — La notion de température ne pourra se dégager clairement que par la suite ; cependant, on peut la considérer, pour le moment, comme l'un des éléments qui règlent l'échange de chaleur entre deux corps ; ainsi, on dit qu'un corps, A, se trouve à une température supérieure, égale, ou inférieure à celle du corps B, avec lequel il est mis en présence, suivant que le passage de chaleur de A vers B est positif, nul, ou négatif.

Lorsque l'un des corps, B par exemple, présente très peu de masse, l'équilibre de température de ce corps s'établit très rapidement sans qu'il perde ou gagne une quantité de chaleur appréciable, c'est-à-dire qu'on peut faire abstraction du changement d'état du corps A pendant l'échange ; or, si l'on dispose le corps B de manière à ce qu'il accuse d'une manière sensible ses changements de température, il pourra servir de *thermomètre*. Le changement de température peut être accusé par tout changement d'état du corps thermométrique, par exemple : par le changement de volume d'une petite quantité de liquide, etc. Toutefois, l'échelle des températures est arbitraire, et dépend de la relation que l'on admet comme point de départ pour sa construction.

2. — *Relation entre la pression, le volume, et la température. Thermo-*

mètre à air.— Si l'on considère une quantité déterminée (l'unité de poids) d'un gaz quelconque, occupant le volume v à la pression p, et à la température t, les trois quantités p, v, t, sont reliées par une loi que la physique fait connaître, et qui permet de déterminer l'une d'elles lorsque les deux autres sont données. Ainsi, on peut dire que la densité d'un corps dépend de sa température et de sa pression; donc le volume de l'unité de masse, qui détermine la densité, dépend aussi de ces quantités. Il n'y a d'exception à cette loi que pour les corps qui peuvent exister sous plusieurs états. Il résulte immédiatement de ce qui précède que l'on possède pour chaque corps la relation fondamentale :

$$\varphi(p, v, t) = o$$

Lorsque l'on fait varier le volume et la température en maintenant la pression constante et égale à p_0, on a pour les différents états :

$$\varphi(p_0, v, t) = o$$

c'est-à-dire que le volume n'est plus fonction que de la température, et qu'il peut servir à la mesurer. Toutefois l'échelle thermométrique étant purement conventionnelle, on peut se donner la relation qui lie la température au volume, et convenir, par exemple, que la température t, du corps occupant le volume v, est proportionnelle à la dilatation de l'unité de volume depuis un état initial pour lequel le volume était v_0; on aura, en vertu de cette convention :

$$t = \frac{1}{\alpha}\frac{v - v_0}{v_0}$$

Pour $v = v_0$, $t = o$, c'est-à-dire que le zéro du thermomètre correspond à l'état initial. Comme la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \alpha t$$

on voit que, pour un accroissement de t égal à l'unité (ou pour un *degré*) la dilatation de l'unité de volume est égale au coefficient α, qui prend le nom de coefficient de dilatation; la constance de ce coefficient résulte de la convention admise pour la mesure de la température.

L'une quelconque des deux relations ci-dessus permet de graduer le

thermomètre, par exemple, au moyen des deux températures fixes qui servent à déterminer l'échelle du thermomètre à mercure; on obtient ainsi le point zéro et le point 100, et il suffit de diviser l'accroissement de volume entre ces deux limites en 100 parties égales, et d'étendre l'échelle en dehors de ces limites pour obtenir un thermomètre. Lorsqu'on choisit pour le corps type un gaz permanent quelconque, soit V le volume que prend l'unité de poids sous la pression p_0 à la température de 100°, on a :

$$\alpha = \frac{1}{100}\frac{V - v_0}{v_0}$$

L'expérience montre que :

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0.00366$$

et que cette valeur est constante quel que soit le gaz employé, et quelle que soit la pression constante p_0.

Telle est la loi de *Gay-Lussac* [1]; il en résulte que tous les thermomètres basés sur l'emploi d'un gaz permanent à pression constante ont des échelles concordantes.

Si l'on construit un thermomètre à mercure en le graduant par comparaison avec l'un des instruments qui viennent d'être décrits, on constate que ce liquide se dilate de quantités différentes pour des accroissements égaux de température; en d'autres termes, si l'on gradue le thermomètre à air et le thermomètre à mercure en divisant en parties d'égal volume la dilatation totale du corps entre 0 et 100 degrés, les deux thermomètres n'indiqueront pas les mêmes températures entre les limites de l'échelle ou en dehors de ces limites. Voici, d'après Regnault, quelques unes des températures correspondantes :

1. Corrigée, comme on le sait par Regnault, car Gay-Lussac avait trouvé pour le coefficient de dilatation la valeur $\frac{1}{267}$ ou 0,00375; le verre du ballon qui renfermait le gaz n'avait pas été complètement desséché. On sait aussi que la loi de Gay-Lussac n'est à peu près rigoureusement vraie que pour l'hydrogène; elle est d'autant plus inexacte, pour les autres gaz, que ceux-ci s'écartent davantage de la loi de Mariotte; ainsi, pour l'air, l'acide carbonique, l'acide sulfureux, les erreurs sont de plus en plus sensibles. On peut cependant, pour tous les problèmes que nous avons à résoudre, appliquer la loi de Gay-Lussac à tous les gaz difficilement liquéfiables, et réputés autrefois permanents; la même remarque s'étend à la loi de Mariotte.



Thermomètre à air	0	40	80	100	140	160	200	300	340
Thermomètre à mercure . .	0	39,668	79,777	100	140,776	161,334	202,782	308,340	351,336

Le coefficient de dilatation du mercure augmente donc avec la température, celle-ci étant prise au moyen du thermomètre à air; il en est de même, du reste, pour tous les liquides connus; ce coefficient prend sa valeur la plus grande au moment de l'ébullition; lorsque l'ébullition est retardée par la pression, le coefficient de dilatation augmente même dans une mesure très forte [1]; on sait aussi que l'eau présente un maximum de densité à 4°, elle se dilate donc en dessous comme au dessus de cette température.

3. — *Relation fondamentale applicable aux gaz difficilement liquéfiables.* — Soit v le volume occupé par l'unité de poids d'un gaz à la pression p et à la température t du thermomètre à air (la seule dont nous nous servirons par la suite); appelons v_0 le volume à la température zéro, sous la pression constante p_0, égale à la pression atmosphérique normale, et v' le volume à la température zéro, sous la pression p. On a, par la loi de Mariotte :

$$v'p = v_0 p_0$$

et, par la loi de Gay-Lussac :

$$v = v'(1 + \alpha t)$$

La combinaison de ces deux équations fournit la relation cherchée :

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

qu'on écrit aussi sous la forme :

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t) \qquad (1)$$

en posant :

$$a = \frac{1}{\alpha} = 273$$

1. Jamin et Bouty. *Cours de physique*, 4e édition, tome II, p. 53.

La relation (1) peut s'écrire également :

$$pv = R\,(a + t)$$

R est un coefficient qui ne dépend que de la nature du gaz ; il varie, lorsqu'on passe d'un corps à un autre, proportionnellement au volume spécifique, ou en raison inverse de la densité.

La relation (1) qui est l'expression des lois de Mariotte et de Gay-Lussac combinées, peut être admise pour les gaz assez éloignés de leur point de liquéfaction [1] ; ceux-ci sont assimilables à des vapeurs très surchauffées. On applique même quelquefois cette relation à la vapeur d'eau surchauffée.

4. — *Effets de la chaleur communiquée à un corps.* — Lorsqu'on cède de la chaleur à un corps dont la composition chimique ne change pas, elle peut être employée à élever la température du corps, à modifier son état interne, et à produire du travail extérieur (vaincre des résistances appliquées au corps, ou produire de la force vive). Ce fait d'expérience ne s'appuie sur aucune hypothèse quant à la nature des corps ou à celle de la chaleur [2].

Lorsque le corps après avoir été ainsi transformé revient à l'état initial par suite d'une soustraction de chaleur, on dit qu'il s'est transformé suivant un *cycle fermé.* Pour la transformation suivant un pareil cycle, la quantité de chaleur absorbée pour modifier la température du corps est nulle, puisque le corps a repris son état primitif ; le travail total des forces intérieures, qu'on peut se représenter comme les attractions entre les molécules, est également nul pour toute l'opération, car ces attractions sont des forces *centrales*, et leur travail total a une intégrale générale qui n'est fonction que de l'état final et de l'état initial.

Ces remarques préparent l'énoncé du principe de l'équivalence, qui fera l'objet du paragraphe suivant.

1. On sait que les gaz réputés permanents ont été liquéfiés sous l'influence de la pression et d'un grand abaissement de température, par Cailletet, Wroblewski et Olzewski (voir les *Cours de physique*).

2. M. Poincaré établit que le principe de l'équivalence, qui sera énoncé plus loin, au lieu de résulter de l'expérience, serait au contraire démontré, si l'on admet que la chaleur provient de mouvements moléculaires, et que les forces sont centrales. — Ouvrage cité p. 60.



§ II

Premier principe, ou principe de Mayer.

5. — Lorsque l'on communique de la chaleur à un corps qui, après une transformation suivant un cycle, revient à son état initial, il n'y a d'autre effet produit, d'après ce qui a été dit au n° 4, qu'un certain travail extérieur accompli. Il est naturel de comparer, au travail produit, la quantité de chaleur disparue; on est conduit ainsi au principe de l'équivalence :

Dans tout système employé à transformer de la chaleur en travail, et réciproquement, il existe un rapport constant entre le travail produit et la chaleur disparue dans l'accomplissement d'un cycle fermé. La calorie, ou unité de chaleur, produit E kilogrammètres, et *vice versa*, pour chaque kilogrammètre de travail développé sur le corps, la quantité de chaleur produite, et qui doit être absorbée par les corps extérieurs pour ramener l'état initial, est de $\frac{1}{E}$ calories [1].

La nécessité d'introduire, dans l'énoncé précédent, la notion du cycle fermé, résulte de ce qu'il faut éliminer, de la transformation, le changement de température du corps, et le travail intérieur. On pourrait même supposer que le corps est animé, à l'instant initial, d'une certaine force vive extérieure (celle que l'on considère toujours dans la théorie des mécanismes); cette force vive se retrouve à l'instant final.

La détermination de E, ou *équivalent mécanique* de la chaleur, a été faite par différents procédés, parmi lesquels il faut citer surtout ceux de *Joule* et de *Hirn*.

1. En disant que la chaleur se transforme en travail, nous abrégeons le langage et cette expression ne peut donner lieu à erreur, car, puisque la chaleur disparait toujours en même temps que du travail est produit, et réciproquement, c'est comme si l'une des énergies donnait naissance à l'autre; l'idée de la transformation devient bien naturelle lorsque l'on admet, comme on le fait universellement aujourd'hui, que la chaleur est due au mouvement. C'est le principe de l'équivalence, énoncé par Mayer, d'abord pressenti par Rumford (1753-1815), et découvert aussi par Sadi Carnot à la fin de sa vie, qui a fait disparaitre l'hypothèse de la matérialité du calorique. La transformation du travail en chaleur apparait dans le frottement, le travail des métaux, etc., ce qu avait fourni à Rumford un procédé de détermination de E par la mesure de la chaleur développée pendant le forage d'un canon.



Joule a opéré en agitant de l'eau ou du mercure à l'intérieur d'un barillet en laiton, au moyen d'un arbre à palettes mû par l'action d'un contrepoids. En tenant compte des corrections nécessaires, ce physicien a trouvé :

$$E = 425 \text{ kgm}$$

Les résultats obtenus par des méthodes très différentes, telles que le frottement de l'eau dans les tubes capillaires, l'écrasement, par le choc, de petites masses de plomb (procédé de Hirn), ont toujours conduit à des nombres assez peu différents. Les expériences d'Edlund ont fait ressortir le danger qu'il y aurait à se servir de transformations traduites par des cycles non fermés ([1]).

Mayer s'était basé, pour la détermination de E, sur la différence qui existe entre les caloriques spécifiques à pression constante des gaz permanents; ce procédé n'est exact, nous le verrons, qu'à cause de cette circonstance, connue de Mayer ([2]), que l'énergie intérieure ne dépend que de la température; la valeur trouvée, obtenue au moyen de chaleurs spécifiques inexactes, était cependant trop faible ([3]).

6. — *Expression analytique du principe de l'équivalence.* — Il résulte de l'énoncé même du principe, que l'on peut faire figurer, sans rompre l'homogénéité des équations, l'énergie calorifique à côté des termes exprimant les travaux des forces, ou la force vive des masses qui interviennent dans les transformations.

La quantité de chaleur, pour être homogène au travail, devra être, au préalable, multipliée par E, ou inversement, les termes exprimant du travail devront être divisés par E; pour abréger l'écriture, on pose :

$$\frac{1}{E} = A$$

A est l'équivalent calorifique du travail, c'est-à-dire le coefficient dont le travail doit être affecté pour représenter l'énergie calorifique équivalente.

1. Lippmann. — *Cours de Thermodynamique*, p. 21. Paris, Georges Carré.
2. Bertrand. — Ouvrage cité p. 66.
3. Voir pour les diverses valeurs trouvées jusqu'aujourd'hui:
Jamin. — Ouvrage cité t. II, p. 18".
G.-A. Hirn. — *Théorie mécanique de la chaleur*, t. I, pages 115 à 118, tableau publié par la Société de Physique de Berlin.



On groupe d'ordinaire en un seul terme, appelé *énergie intérieure*, le travail correspondant à la modification de l'état thermique et à la modification interne du corps [1]. On peut concevoir cette énergie, U, comme le travail qui aurait dû être communiqué au corps, à partir d'un certain état initial, pour l'amener à l'état que l'on considère; à chaque état correspond une valeur particulière de U, et tout changement élémentaire est accompagné d'une variation élémentaire, dU, du travail intérieur.

Désignons par p et v la pression et l'unité de volume du corps à la température t, et portons ces quantités en abscisses et en ordonnées; les différents points obtenus, tels que M (fig. 1), caractérisent la succession des états du corps; pour une transformation élémentaire, MN, on aura par suite du principe de l'équivalence, en appelant dQ la chaleur fournie, qui pourra être négative :

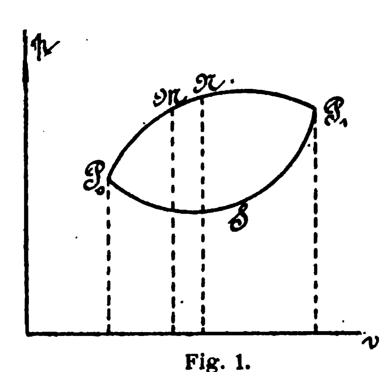


Fig. 1.

$$dQ = A\,dU + Apdv$$

Le dernier terme de cette équation représente, en effet, la chaleur équivalente au travail développé par le corps, pour vaincre la pression extérieure qui s'oppose à l'augmentation de volume.

Cette équation n'est vraie, toutefois, que si l'énergie qui peut se trouver dans le fluide sous forme de force vive sensible, est la même après la transformation qu'au début de celle-ci; cette condition est réalisée lorsque l'augmentation dv de volume se fait lentement, parce que, dans ce cas, l'*accroissement* de la force vive sensible est toujours négligeable. D'ailleurs, le changement de volume se produit lentement, lorsque la résistance intérieure, rapportée à l'unité de surface, diffère infiniment peu de la pression p.

Les conditions que nous venons d'énoncer sont remplies lorsque les transformations sont *réversibles* ; il est préférable de ne pas trop nous y arrêter pour le moment, sauf à n'appliquer le principe de

1. Il est même indispensable d'opérer ainsi si l'on ne veut pas faire d'hypothèse sur la constitution des corps, car rien n'autorise à supposer, même pour les gaz, qu'une partie de l'énergie ne dépend que de la température.

l'équivalence qu'aux transformations analogues à celles qui se produisent lorsqu'un fluide exerce sa pression sur un piston de vitesse modérée, ou *vice versa*. Nous verrons, du reste (43), qu'il est facile de généraliser l'équation, et de l'appliquer aux phénomènes non *réversibles*; tel est celui, par exemple, qui se produit lorsque le fluide se trouve brusquement mis en communication avec un milieu dont la pression est plus faible. Comme nous l'avons remarqué, cependant, le principe de l'équivalence ne comporte aucune exception lorsque la transformation se fait suivant un cycle fermé, et, dans ce cas, son expression analytique est très simple.

Supposons que les états successifs soient représentés par les points de la courbe $P_0 N P_1 S P_0$, le point P_0 figurant à la fois l'état initial et l'état final. Nous aurons, dans ce cas, en appelant Q la chaleur cédée pendant toute l'opération, et en observant que le changement d'énergie intérieure est nul :

$$Q = A\int pdv$$

l'intégrale s'appliquant à toute la surface limitée par le cycle.

Cette équation traduit analytiquement l'expérience par laquelle on déterminerait la valeur de E.

On peut procéder autrement, et remarquer que la transformation $P_0 N P_1$ exige la quantité de chaleur :

$$Q' = A(U_1 - U_0) + A\int_{P_0}^{P_1} pdv$$

Tandis que la transformation $P_0 S P_1$ demande la quantité :

$$Q'' = A(U_1 - U_0) + A\int_{P_0}^{P_1} p'dv$$

p' est l'ordonnée de la courbe $P_0 S P_1$.

U_0, U_1, représentent l'énergie pour les états P_0 et P_1, respectivement.

Or, Q'' est évidemment égale et de signe contraire à la chaleur qui aurait été absorbée pour accomplir la transformation $P_1 S P_0$, c'est-à-dire qu'en appelant Q la chaleur à fournir pour le parcours du cycle total, on devra avoir :

$$Q = Q' - Q''$$

En retranchant les deux équations précédentes, on trouve donc :

$$Q = A\int pdv$$

ce qui est l'équation trouvée d'abord.

On voit que Q' et Q" représentent des quantités de chaleur différentes, puisqu'elles comprennent un terme provenant du travail effectué entre les états P_0 et P_1, travail dont la valeur dépend de la succession des états intermédiaires, qui peut varier d'une infinité de manières ; on en déduit que dQ *n'est la différentielle exacte d'aucune fonction*; sinon, il existerait une intégrale générale, dont la valeur, pour une transformation finie entre deux états P_0, P_1, ne dépendrait que des états extrêmes, et nullement de la série des états intermédiaires, c'est-à-dire que la chaleur à fournir serait indépendante du travail accompli pendant la transformation, résultat en opposition avec le principe de l'équivalence.

7. — La transformation des corps bien connus, les gaz permanents, par exemple, fait intervenir diverses quantités ou constantes physiques que l'on a déterminées depuis longtemps par l'expérimentation ; le principe de l'équivalence peut servir à relier ces divers coefficients, puisqu'il ajoute une équation à celles, déjà connues, qui expriment les lois de Mariotte, de Gay-Lussac, etc.

La thermodynamique nous fournira une deuxième équation, traduisant le principe de Carnot ; on peut y faire entrer, ainsi que dans l'équation qui exprime l'équivalence, les deux caloriques spécifiques de tout corps C, c, ainsi que les quantités p, v, t.

L'équation fondamentale :

$$\varphi(p, v, t) = o$$

est indispensable pour la détermination de trois des quantités énumérées, en fonction des deux autres.

Nous allons cependant aborder l'étude des gaz permanents en nous basant sur le premier principe seulement, mais c'est grâce aux constantes et aux lois supplémentaires que la physique expérimentale détermine d'une manière surabondante pour ces corps (loi de Joule, connaissance de C et c). Cette surabondance, si elle n'empêche pas l'accord des résultats, peut servir de vérification aux principes [1] ou aux expériences.

1. Ainsi l'équation

$$AR = C - c$$

qui sera trouvée plus loin (10) vérifie le principe de l'équivalence.

D'une manière générale, pour les corps moins étudiés que les gaz, il sera nécessaire de mettre en œuvre les deux principes fondamentaux, les diverses équations qui en résultent, fort différentes dans la forme, ne peuvent être que des transformations qui permettent d'arriver plus ou moins vite au résultat, en faisant intervenir les constantes physiques que l'on a en vue.

§ III.

Etude des gaz permanents.

8. — *Loi de Joule.* — Outre la fonction :

$$pv = R\,(a + t)$$

qui caractérise tout gaz permanent, nous pouvons nous appuyer, pour ces corps, sur la loi découverte en 1848 par Joule, et qui porte souvent son nom :

L'énergie intérieure de l'unité de poids d'un gaz ne dépend que de sa température, et nullement de la valeur particulière de sa pression ou de son volume.

Cette loi résulte de l'expérience suivante :

Deux ballons bien résistants, réunis par un tuyau à robinet, sont immergés dans une cuve remplie d'eau placée dans un local à température invariable ; l'un d'eux, A (fig. 2), renferme un gaz permanent quelconque, fortement comprimé, tandis qu'on fait dans le ballon B un vide aussi parfait que possible ;

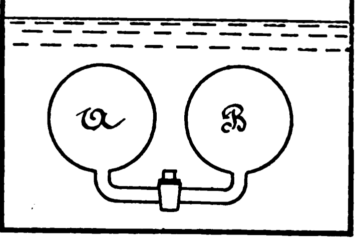


Fig. 2.

après avoir relevé la température du bain, on ouvre le robinet de communication, on agite l'eau de la cuve, et on constate que ***sa température n'a pas changé.***

Nous pouvons appliquer le principe de l'équivalence au gaz soumis à cette expérience, depuis l'instant où l'on ouvre le robinet, et où la force vive du gaz est nulle, jusqu'au moment où l'équilibre s'est établi dans les deux récipients et où tous les mouvements tumultueux de l'écoule-

ment ont cessé, puisque la force vive est également nulle à ce moment ; or, puisqu'il n'y a ni chaleur fournie, puisque la température du bain n'a pas changé, ni travail extérieur effectué, puisque le gaz n'a exercé sur les corps extérieurs aucun travail, il faut qu'on ait :

$$dU = o$$

On déduit de là que toute variation, même considérable, de pression ou de volume, est sans influence sur l'énergie intérieure, pourvu que la température soit constante, ou, en d'autres termes, que toute modification qui ne change pas la température du gaz, ne modifie pas son ***énergie totale intérieure*** (1).

9. — ***Transformation générale des gaz.*** — L'état de l'unité de poids du gaz étant défini par la relation fondamentale :

(1) $$pv = R\,(a + t)$$

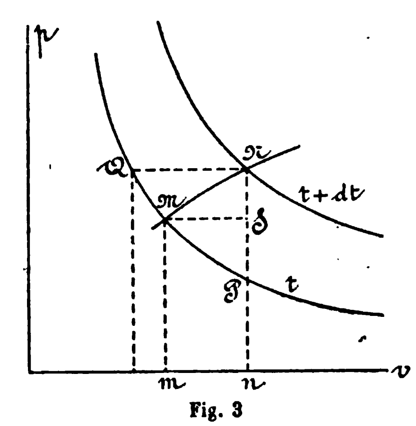


Fig. 3

ainsi que par le point M (fig. 3), qui caractérise le volume et la pression, proposons-nous de chercher la quantité de chaleur dQ nécessaire pour opérer le changement de pression, de volume, et, par conséquent, de température, qui amène le corps à l'état défini par le point N, infiniment voisin de M.

Faisons passer par M une ligne d'égale température, Q M P, c'est-à-dire exprimant la loi qui lie la pression et le volume lorsque la température est maintenue constante ; une pareille ligne est dite ***isothermique***, et l'équation fondamentale des gaz montre que c'est une hyperbole équilatère.

Le corps peut être amené de l'état M à l'état N au moyen de divers groupes de transformations successives, et chacun d'eux fournit une solution du problème.

1. Sir W. Thomson et Joule ont démontré, par une expérience postérieure, que le travail interne des gaz (qui n'est, d'après ce qui a été dit au n° 6, qu'une partie de l'énergie totale intérieure) n'est pas nul rigoureusement, surtout pour les corps rapprochés de leur point de liquéfaction ; mais même pour ceux-ci, il est encore très faible, et peut être négligé.

Première manière d'opérer la transformation. — Menons par N l'ordonnée Nn, qui coupe en P la ligne de température t ; on peut amener le corps à l'état N au moyen des transformations MP et PN ; la première a lieu par détente du gaz à température constante, et la seconde s'obtient par une communication de chaleur à volume constant.

La quantité totale de chaleur absorbée par ces deux transformations ne diffère de celle exigée pour accomplir la transformation directe MN, que d'une quantité infiniment petite du second ordre, puisque celle-ci est équivalente, d'après le premier principe, au travail figuré par la surface MNP.

Le changement MP s'opère à *température constante*, la quantité de chaleur à fournir est donc, puisque l'énergie intérieure reste invariable (8) :

$$\mathrm{A}\, pdv$$

La transformation PN, qui s'opère à *volume constant*, a pour effet d'augmenter la température de dt ; en appelant c le calorique spécifique à volume constant, la quantité de chaleur à fournir pour l'échauffement du gaz sera donc :

$$cdt$$

et l'on aura, pour le parcours MPN :

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{A}\, pdv + cdt$$

A et c étant des quantités finies, dQ sera une quantité infiniment petite du premier ordre, et pourra, par conséquent, en vertu de la remarque faite ci-dessus, remplacer la quantité de chaleur à fournir pour effectuer la transformation directe MN ; on peut se servir de l'équation (1) pour éliminer p, ce qui donne la valeur cherchée dQ en fonction des deux variables indépendantes v *et* t :

$$\frac{d\mathrm{Q}}{a+t} = \mathrm{AR}\frac{dv}{v} + c\,\frac{dt}{a+t} \tag{2}$$

Dans cette équation, c peut être provisoirement considéré comme une fonction, à déterminer par l'expérience, des deux variables v et t, qui définissent complètement l'état du corps.

Deuxième mode de transformation. — Menons par le point N la ligne

d'égale pression NQ, et amenons le corps de l'état M à l'état N en suivant le chemin MQN, c'est-à-dire en comprimant le gaz à la température constante t, jusqu'à la pression $p + dp$, puis en le dilatant à pression constante ; la transformation suivant MQ ne fait pas varier l'énergie, la chaleur à céder est donc équivalente au travail :

$$Ap \frac{dv}{dp} dp$$

car, pour obtenir le changement de volume, la pression seule varie.

La transformation QN absorbe la quantité de chaleur :

$$Cdt$$

C étant le calorique spécifique à pression constante.

D'ailleurs, la somme de ces quantités de chaleur, qui est infiniment petite du premier ordre, ne diffère de dQ que de la quantité équivalente au travail MQN, infiniment petit du second ordre, nous aurons donc :

$$dQ = Ap \frac{dv}{dp} dp + C\, dt$$

L'accroissement de volume qui figure dans cette équation est obtenu en modifiant la pression du corps sans changer sa température, et se tire de la relation (1) :

$$\frac{dv}{dp} dp = - R\,(a + t)\, \frac{dp}{p^2}$$

Pour toute valeur positive de dp, on voit que cet accroissement est négatif, ce qui devait être, puisque l'opération MQ est une compression à température constante, qui doit absorber du travail, et par conséquent dégager de la chaleur au lieu d'en absorber. En substituant cette valeur dans l'expression de dQ, on trouve :

$$\frac{dQ}{a + t} = - AR \frac{dp}{p} + C \frac{dt}{a + t} \tag{3}$$

C doit être considéré, provisoirement, comme une fonction de l'état du gaz, c'est-à-dire de deux des variables qui le caractérisent, p et t, par exemple.



Troisième mode de transformation. — Opérons la transformation suivant le chemin MSN, nous aurons à fournir, pour le changement MS, à pression constante :

$$C \frac{dt}{dv} dv$$

car le changement de température s'obtient en donnant au volume seul l'accroissement dv, la pression étant constante : le changement SN qui s'opère à volume constant, correspond à un accroissement de température obtenu en faisant passer la pression de p à $p + dp$, il exige donc une quantité de chaleur :

$$c \frac{dt}{dp} dp$$

On a donc :

$$dQ = C \frac{dt}{dv} dv + c \frac{dt}{dp} dp$$

Or, l'équation (1) fournit :

$$\frac{dt}{dv} dv = \frac{p}{R} dv$$

et

$$\frac{dt}{dp} dp = \frac{v}{R} dp$$

valeurs qui, substituées dans dQ, donnent :

$$dQ = \frac{1}{R} (C\, pdv + cvdp)$$

ou

$$\frac{dQ}{a + t} = C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} \tag{4}$$

Dans cette équation, C et c doivent être considérés comme dépendant de l'état du corps.

10. — Les valeurs (2), (3) et (4) fournissent trois expressions différentes de la même quantité ; en égalant les seconds membres, on obtient deux équations, qui, lorsqu'on fait usage de la relation fonda-

mentale (1), deviennent identiques; on a, par exemple, en égalant (2) et (3):

$$(C-c)\frac{dt}{a+t}=AR\left(\frac{dp}{p}+\frac{dv}{v}\right)$$

dt, dp et *dv* sont les accroissements des trois variables qui figurent dans l'équation caractéristique ; or, on tire de celle-ci :

$$\frac{dt}{a+t}=\frac{dp}{p}+\frac{dv}{v}$$

ce qui donne :

$$C-c=AR \text{ ou } C-c=A\,\alpha p_0 v_0 \tag{5}$$

Les deux caloriques spécifiques sont donc liés par une condition, conséquence nécessaire de l'équation fondamentale, du principe de l'équivalence et de la loi de Joule. Quelles que soient les fonctions que nous avons jusqu'ici désignées par C et c, leur différence est constante pour un même gaz ; elle varie, au contraire, comme le volume spécifique, c'est-à-dire en raison inverse de la densité, lorsque la nature du gaz change.

L'équation (5) fournit un moyen de déterminer $A=\frac{1}{E}$, et, par conséquent, l'équivalent mécanique, pourvu que les caloriques spécifiques soient connus pour un gaz se trouvant dans un état déterminé (procédé de Mayer). En partant, au contraire, de la valeur de E, on peut déterminer c lorsque, pour le même état, on connait la valeur de C.

11. — Les lois physiques découvertes pour les gaz permanents rendent plus remarquable encore cette relation, car on sait, par les expériences de Regnault, que les chaleurs spécifiques à pression constante de tous les gaz difficilement liquéfiables sont indépendantes de la pression et de la température [1] ; les valeurs de C sont donc constantes pour chaque gaz, et, d'après l'équation (5), celles de c le sont aussi.

1. Les premières expériences quelque peu précises ont été faites par Delaroche et Bérard, qui ont trouvé la valeur de C pour divers gaz relativement à l'air, et ensuite, le calorique spécifique à pression constante C de l'air relativement à l'eau, ce qui leur a permis de trouver les valeurs absolues de C pour les divers gaz. Les valeurs de Delaroche et Bérard étaient cependant erronées, car elles dépendaient de la pression du gaz. La chaleur spécifique à pression constante varie un peu avec la température; ainsi, pour l'acide carbonique,



On a, du reste, par cette équation :

$$\frac{C}{v_0} - \frac{c}{v_0} = A \alpha p_0$$

Les chiffres trouvés par Regnault montrent que $\frac{C}{v_0}$, c'est-à-dire la chaleur spécifique à pression constante sous l'unité de volume, est *constante pour tous les gaz* [1]; il en résulte que le rapport $\frac{c}{v_0}$ est également constant pour tous les gaz, et indépendant de la pression et de la température. Si donc, on appelle C' et c' les deux caloriques spécifiques d'un même gaz à une pression et une température quelconques, et si v'_0 est le volume spécifique de ce gaz, c'est-à-dire le volume de l'unité de poids sous la pression constante p_0, et à la température zéro, on aura :

$$\frac{C'}{v'_0} = K$$

et

$$\frac{c'}{v'_0} = k$$

K et k étant les mêmes pour tous les gaz; on tire de ces relations :

$$\frac{C'}{c'} = \frac{K}{k}$$

c'est-à-dire que le *rapport des deux chaleurs spécifiques est constant pour tous les gaz.*

Il suffirait donc, connaissant les valeurs C et c pour un seul gaz, par exemple pour l'air, de connaître les densités des autres gaz par rapport à l'air, pour en déduire toutes les chaleurs spécifiques.

qu'on peut considérer comme le plus liquéfiable des gaz réputés autrefois permanents, C varie de 0,18427 à 0,21692 lorsque la température passe de — 30 à 210°. Pour des températures très élevées C augmente pour tous les gaz.

1. Les densités des gaz simples, en raison inverse des volumes spécifiques, sont proportionnelles à leurs poids atomiques; la *capacité atomique* est donc constante, résultat déjà annoncé par Delaroche et Bérard. Dulong a étendu cette loi aux gaz composés sans condensation; quant aux gaz formés avec condensation, leur chaleur spécifique sous l'unité de volume est la même, mais elle diffère de celle des corps simples, (Jamin, ouvrage cité, t. II, p. 85).

L'expérience déjà ancienne de *Clément* et *Desormes*, répétée avec plus de précision, a donné très approximativement :

$$\frac{C}{c} = 1.41$$

D'ailleurs, la formule donnée par *Newton* pour la vitesse du son, corrigée par *Laplace*, renferme le rapport $\frac{C}{c}$, et l'on a pu, en mesurant la vitesse effective de propagation du son, confirmer l'expérience directe ; nous admettrons dorénavant, en appelant γ le rapport des chaleurs spécifiques des gaz permanents :

$$\gamma = 1.41 \text{ (1)}$$

Les expériences les plus récentes ont donné $\gamma = 1{,}402$.

	$\frac{1}{v_0}$ (*)	R	C	c	
Air atmosphérique. .	1.293187	29.272	0.23741	0.16838	(*) $\frac{1}{v_0}$ est le poids du mètre cube à zéro centigrade sous la pression de 760 mm. de mercure, à Paris, ou 10334 kilog. par mètre carré.
Oxygène.	1.429802	26.475	0.21751	0.15426	
Hydrogène	0.089578	422.612	3.4090	2.41773	
Azote.	1.256157	30.434	0.2438	0.17291	
Oxyde de carbone. .	1.250511	30.283	0.245	0.17376	
Bioxyde d'azote . .	1.34362	28.173	0.23173	0.16435	
Acide carbonique . .	1.9774	19.154	0.202	0.157	

N. B. — Dans ce tableau, les valeurs de R sont calculées en fonction

1. Cette valeur est sensiblement exacte pour l'air, l'oxygène, l'azote, l'hydrogène, l'oxyde de carbone, le bioxyde d'azote, c'est-à-dire pour les gaz difficiles à liquéfier; elle est trop forte pour l'ammoniaque, l'acide carbonique, l'acide sulfureux, le protoxyde d'azote.

Aux températures élevées, le rapport des chaleurs spécifiques diminue (expériences de Mallard et Lechatelier, et de Berthelot), l'équation (5), si elle reste applicable, nous apprend que leur différence doit rester constante; or C augmente avec la température, le rapport γ tend donc vers l'unité.

Le rapport γ a aussi été déterminé théoriquement, en partant d'hypothèses sur la chaleur et la constitution des corps; M. Macfarlane Gray a trouvé ainsi:

$$\gamma = \frac{8{,}5}{2{,}5} \doteq 1{,}4$$

de la pression p_0, exprimée en kilogrammes par mètre carré ($p_0 = 10334$). C et c sont les caloriques spécifiques par rapport à l'eau.

12.— La constance des chaleurs spécifiques, pour un gaz permanent donné, entraîne immédiatement une conséquence importante pour les équations (2), (3) et (4), car C et c ne dépendant pas des variables indépendantes p, v, t, ces équations sont intégrables, et donnent la solution d'un grand nombre de problèmes relatifs aux changements d'état. Nous pouvons remarquer, en passant, que l'expression $a + t$ joue dans ces équations le rôle de facteur d'intégrabilité, c'est-à-dire que :

$$\frac{dQ}{a+t}$$

est la différentielle d'une certaine fonction, contrairement à ce qui a été trouvé pour dQ (6).

13. — *Énergie des gaz.* — D'après le principe de l'équivalence, on a pour une transformation quelconque :

$$dQ = A\,dU + Apdv$$

Lorsque le changement d'état a lieu à volume constant, la chaleur fournie est cdt, et, comme il n'y a pas de travail effectué, l'équation devient :

$$cdt = A\,dU$$

ou, en intégrant :

$$U = cEt + U_0 \tag{6}$$

Il est impossible de connaître la valeur absolue de l'énergie, mais l'équation (6) donne l'accroissement $U - U_0$ depuis une température déterminée.

14. — *Transformation à température constante.* — La loi de détente du gaz s'obtient en attribuant à la température la valeur constante t' ce qui donne :

$$pv = R\,(a + t') \tag{7}$$

Cette équation est l'expression de la loi de Mariotte; elle indique que la courbe de détente est une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont les axes des pressions et des volumes.



Pour maintenir la température constante, il faut céder une certaine quantité de chaleur, qu'on peut trouver par l'une des équations (2) ou (3); prenons, par exemple, l'équation (2); en y introduisant la relation (5), comme on le fait généralement, elle peut s'écrire :

$$\frac{dQ}{a+t} = (C-c)\frac{dv}{v} + c\,\frac{dt}{a+t}$$

Puisque la température est constante et égale à t', il vient, en appelant $p_2 v_2$, $p_1 v_1$, les données relatives à l'état final et à l'état initial, et en intégrant :

$$Q_2 - Q_1 = (a+t')\,(C-c)\;l_n\frac{v_2}{v_1} \tag{8}$$

Cette expression peut être transformée en fonction des pressions, car on a :

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 = R\,(a+t')$$

On peut donc écrire également :

$$Q_2 - Q_1 = (a+t')\,(C-c)\,l_n\frac{p_1}{p_2}$$

expression que l'on pouvait tirer directement de l'équation (3).

Lorsqu'il s'agit de la détente,

$$v_2 > v_1$$

ou

$$p_1 > p_2$$

et la valeur de $Q_2 - Q_1$ est positive; l'inverse a lieu pour la compression; la détente isothermique exige par conséquent que l'on communique au gaz une certaine quantité de chaleur extérieure, tandis que cette chaleur doit être enlevée lorque l'on veut produire une compression à température constante.

Le travail effectué pendant la détente est :

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

puisque

$$pv = R\,(a+t')$$

on a :

$$p = R\,(a + t')\frac{1}{v}$$

et :

$$L = R\,(a + t')\,l_n\frac{v_2}{v_1}$$

La chaleur équivalente au travail produit est .

$$AL = AR\,(a + t')\,l_n\frac{v_2}{v_1}$$

ou :

$$AL = (a + t')\,(C - c)\,l_n\frac{v_2}{v_1}$$

Cette expression indique que la chaleur équivalente au travail produit est celle qui a été communiquée au gaz pour maintenir sa température constante. Nous aurions pu arriver directement à ce résultat, car la chaleur fournie, n'étant pas employée à modifier l'énergie, qui reste constante avec la température, est entièrement transformée en travail.

15. — ***Transformation à chaleur constante, ou transformation adiabatique.*** — En posant $dQ = o$ dans l'équation (4), on trouve :

$$C\frac{dv}{v} + c\frac{dp}{p} = o$$

relation entre p et v, qui permet de trouver l'équation de la courbe de détente; on a, en effet, en l'intégrant :

$$v^C p^c = C^{te}$$

ou :

$$v^{\frac{C}{c}}\,p = C^{te}$$

La valeur de la constante peut être déterminée au moyen d'un état connu du corps, pour lequel la pression et le volume sont donnés; d'ailleurs $\frac{C}{c}$ étant le rapport γ, trouvé précédemment, on a :

(9) $$pv^{\gamma} = p_1 v_1{}^{\gamma}$$ [1]

1. Cette loi, trouvée par Laplace et par Poisson, est connue sous le nom de loi de Poisson.

La courbe de détente est différente de l'hyperbole équilatère; son coefficient angulaire en chaque point se tire de l'équation différentielle de la courbe :

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{C}{c}\frac{p}{v}$$

tandis que, pour la détente isothermique, on avait :

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v}$$

La ligne adiabatique est donc, en chaque point, plus inclinée que l'hyperbole équilatère qui passerait par ce point.

Pour trouver la température, nous pouvons faire usage de l'une des équations (2) ou (3), suivant que les volumes ou les pressions sont donnés; prenons, par exemple, l'équation (2), elle donne, puisque $dQ = o$:

$$(C - c)\frac{dv}{v} + c\frac{dt}{a + t} = o$$

En affectant des indices 1 et 2 les quantités qui se rapportent à l'état initial et à l'état final, et en effectuant l'intégration, il vient :

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma - 1} \tag{10}$$

Dans le cas de la détente,

$$v_2 > v_1$$

et, par conséquent,

$$t_2 < t_1$$

Le gaz, ne recevant pas de chaleur extérieure, transforme en travail une partie de son énergie intérieure. Pour une compression, l'inverse se produirait.

En employant l'équation (3), ou en transformant l'équation (10) au moyen de la loi de Poisson, on obtient :

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \tag{11}$$

qui donne les températures en fonction des pressions. On a, du reste :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0.29078 \text{ (}^1\text{)}$$

Il résulte des équations (10) ou (11), que si l'on fait passer par le point A (fig. 4), pour lequel la pression, le volume et la température ont les valeurs déterminées p_1 v_1 t_1, une ligne isothermique $b'Ab$, ainsi que la ligne adiabatique B'AB, ces courbes déterminent, autour du point A, quatre zones ; la nature des transformations à effectuer pour amener le corps de l'état A à celui qui serait compris dans chacune des zones, est la suivante :

Fig. 4.

Dans la zone 1, il faut comprimer le corps, lui enlever de la chaleur, et la température augmente néanmoins.

Dans la zone 2, il faut fournir de la chaleur, et la température augmente, soit que l'on diminue, soit que l'on augmente le volume du corps.

Dans la zone 3, le corps se détend, on lui fournit de la chaleur et sa température s'abaisse.

Dans la zone 4, il faut enlever de la chaleur au corps, dont la température s'abaisse, soit qu'on augmente ou qu'on diminue son volume.

On peut aussi remarquer que, dans la concavité de la ligne isothermique, la température augmente, tandis qu'elle s'abaisse lorsqu'on part de A du côté de la convexité de la courbe.

Relativement à la ligne adiabatique, il faut fournir de la chaleur pour toute transformation comprise dans la concavité de la courbe, et en enlever du côté opposé.

1. M. Léon Pochet a calculé une table donnant pour diverses valeurs $\frac{v_1}{v_2}$, l'abaissement de température $t_1 - t_2$ qui correspond à une température initiale de 15°, ainsi que le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ de la pression finale à la pression initiale. — *Nouvelle Mécanique industrielle*, Paris, Dunod, 1874.

Les abaques de M. Herrmann (voir l'avant-propos) permettent de résoudre graphiquement ces problèmes.

16. — *Travail de la détente adiabatique.* — Le travail effectué pendant la détente adiabatique est :

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

expression qui, transformée au moyen de l'équation (9), donne :

$$L = p_1 v_1^{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} v^{-\gamma} dv$$

ou, en effectuant l'intégration :

$$L = \frac{p_1 v_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma - 1}\right] \tag{12}$$

En tenant compte de l'équation (10) et de la relation caractéristique des gaz, qui permet d'obtenir le produit $p_1 v_1$ en fonction de la température relative à l'état initial, et qui peut s'écrire :

$$p_1 v_1 = R (a + t_1) = E (C - c) (a + t_1)$$

il vient :

$$L = Ec (t_1 - t_2) \tag{13}$$

Cette équation donne le travail accompli, en fonction de la chute de température seulement ; nous aurions pu l'écrire *a priori*, car, puisqu'on ne cède pas de chaleur au gaz, le travail qu'il produit correspond à la diminution de son énergie intérieure (n° 13).

17. — *Construction de l'adiabatique.* — Le procédé suivant, dû à *M. Brauer*, permet de construire l'adiabatique.

Soient $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$... une série de valeurs du volume formant une progression géométrique, et $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$... les pressions correspondantes ; on aura :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_3}{v_4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = n$$

ainsi que :

$$p_1 v_1^{\gamma} = p_2 v_2^{\gamma} = p_3 v_3^{\gamma} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

et, par conséquent :

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{\gamma}$$

d'où :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} \; . \; . \; . \; . \; . = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma}$$

Les pressions sont donc également en progression géométrique.

Étant donné v_1 (fig. 5), on choisira $v_2 = \frac{v_1}{n}$, n étant quelconque, et, par la construction bien connue indiquée sur la figure, on trouvera les valeurs successives v_3, v_4, etc. ; on calculera ensuite p_2 au moyen de la relation :

$$p_2 = p_1 \, n^{\gamma}$$

ce qui permettra de trouver, au moyen d'un réseau de lignes droites parallèles, les valeurs successives de p_3, p_4, etc...

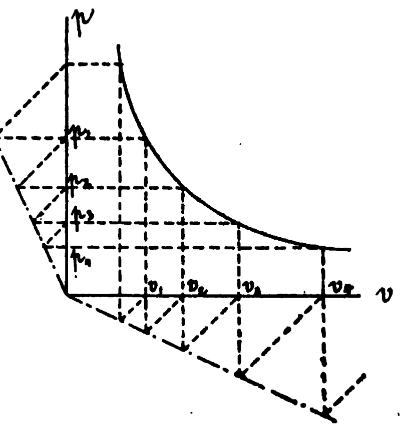


Fig. 5.

18. — On peut, au lieu de tracer les lignes de transformation, construire des abaques destinés à remplacer les calculs ; il est nécessaire, pour y parvenir, de changer les coordonnées de ces courbes au moyen de fonctions de la pression et du volume, fonctions choisies de telle manière que les lignes cherchées se prêtent à une construction facile. On y arrive en ce qui concerne l'isothermique (éq. 7) et l'adiabatique (éq. 9), en prenant comme abscisses et ordonnées, les logarithmes de la pression et du volume.

L'isothermique devient :

$$\log p + \log v = C^{te}$$

c'est-à-dire une ligne droite inclinée a 45° sur les axes.

L'adiabatique a alors pour équation :

$$\log p + \gamma \log v = C^{te}$$

qui représente une ligne droite dont le coefficient angulaire est $-\gamma$.

Nous nous contenterons de cette remarque qui permet de représenter d'une manière très simple les cycles que nous rencontrerons fréquemment par la suite, sans que cette propriété soit d'un très grand secours pour les problèmes que nous aurons à traiter.

19. — D'après l'équation (13), le travail développé pendant la détente adiabatique AB (fig. 6) ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$ des températures entre lesquelles s'opère la transformation. Or, si l'on fait passer par A et B des lignes isothermiques, on voit que toute transformation adiabatique *ab*, comprise entre les deux lignes, donne lieu au même travail extérieur.

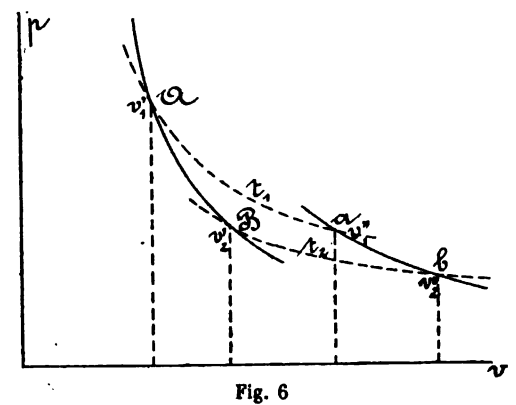


Fig. 6

Lorsque l'on part d'une température initiale t_1 déterminée, le travail augmente lorsque la température finale t_2 s'abaisse; la limite théorique inférieure de t_2 correspond à :

$$t_2 = -a$$

car, pour cette valeur, le produit pv est nul, comme on le voit par l'équation :

$$pv = R(a + t_2)$$

Il est évident que cette limite, qui correspond a l'état pour lequel la pression ou le volume pourraient s'annuler, est purement fictive, puisque l'équation fondamentale des gaz permanents cesserait d'exister bien avant qu'elle ne soit atteinte. Pour cette température fictive, le travail produit par la détente adiabatique serait :

$$L = Ec(a + t_1)$$

Ainsi, le travail *maximum* développé par un kilogramme d'un gaz permanent qui se détend sans communication de chaleur, est proportionnel à la quantité $a + t_1$. Comme on le voit, la pression initiale n'a aucune influence sur le travail limite; mais en pratique, le travail recueilli

est diminué par la nécessité où l'on se trouve, pour les gaz permanents, de ne pas abaisser la pression de détente en dessous de la pression atmosphérique ; le travail recueilli en partant d'une certaine température initiale t_1, est donc d'autant plus grand, que *la pression initiale est plus élevée.*

20. — On peut imaginer une machine motrice dans laquelle la chaleur exercerait ses effets sur l'unité de poids d'un gaz permanent enfermé dans un cylindre.

Le corps étant primitivement à l'état A, on lui communique de la chaleur Q_1, de manière à le transformer suivant la ligne Aa, puis il se détend, suivant l'adiabatique ab, jusqu'à la température t_2; on le comprime ensuite à température constante, en lui enlevant la quantité de chaleur Q_2, puis, on arrête cette transformation en un point B, choisi de telle sorte que le corps soit ramené, par la compression adiabatique BA, à son état initial.

Un pareil cycle, composé de deux lignes isothermiques et de deux lignes adiabatiques, a été considéré pour la première fois par Sadi Carnot; nous verrons au § IV qu'il jouit d'une propriété générale remarquable, que nous pouvons, dès maintenant, établir en ce qui concerne les gaz permanents.

On a, d'après les formules du n° 14 :

$$Q_1 = (a + t_1)(C - c)\, l_n \frac{v''_1}{v'_1}$$

$$Q_2 = (a + t_2)(C - c)\, l_n \frac{v''_2}{v'_2}$$

et, par conséquent :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a + t_1}{a + t_2} \; \frac{l_n \dfrac{v''_1}{v'_1}}{l_n \dfrac{v''_2}{v'_2}}$$

Mais les points A et B se trouvant sur une même adiabatique :

$$p'_1 v'^{\gamma}_1 = p'_2 v'^{\gamma}_2$$

On a de même, pour les points a et b :

$$p''_1 v''^{\gamma}_1 = p''_2 v''^{\gamma}_2$$

D'où, en divisant ces deux dernières équations membre à membre, et remarquant que A et a, B et b, appartiennent à des lignes isothermiques :

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

Ce qui donne, pour le rapport cherché des chaleurs Q_1 et Q_2 :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a + t_1}{a + t_2} \tag{14}$$

Cette équation nous apprend que, pour les gaz permanents, ***le rapport des quantités de chaleur cédées pendant des transformations isothermiques qui s'opèrent entre les mêmes adiabatiques*** ne dépend que des températures entre lesquelles s'opèrent les transformations, et nullement de l'étendue de ces transformations ou de la nature du gaz employé.

21. — ***Rendement d'un cycle.*** — L'équation (14) peut s'écrire :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{t_1 - t_2}{a + t_1}$$

Sous cette forme, elle donne le rapport de la quantité de ***chaleur transformée en travail*** pendant le parcours du cycle à la quantité de chaleur empruntée à la source de température t_1 ; nous voyons que, pour le cycle de Carnot et pour les gaz permanents, ce rapport, qui exprime le ***rendement calorifique***, ne dépend que des températures extrêmes réalisées pendant la transformation, et non de l'étendue des transformations ou de la nature du gaz.

Cette propriété très importante sera généralisée plus loin, et étendue à d'autres cycles, ainsi qu'à tous les corps.

D'après ce qui vient d'être dit, deux cycles de Carnot compris entre les mêmes températures sont équivalents au point de vue de la transformation de la chaleur en travail, c'est-à-dire qu'ils fournissent, pour la même dépense de chaleur empruntée à la source t_1, la même quantité de travail.

Ces cycles, représentés en ABCD, *abcd*, (fig. 7) sont cependant très

différents au point de vue pratique; en effet, supposons qu'ils effectuent des travaux égaux, on aura pour l'un d'eux :

$$Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{t_1 - t_2}{a + t_1}$$

c'est-à-dire que les quantités de chaleur transformées en travail étant les mêmes, par hypothèse, Q_1, ou la chaleur empruntée, devra avoir la même valeur pour les deux cycles; or, nous avons :

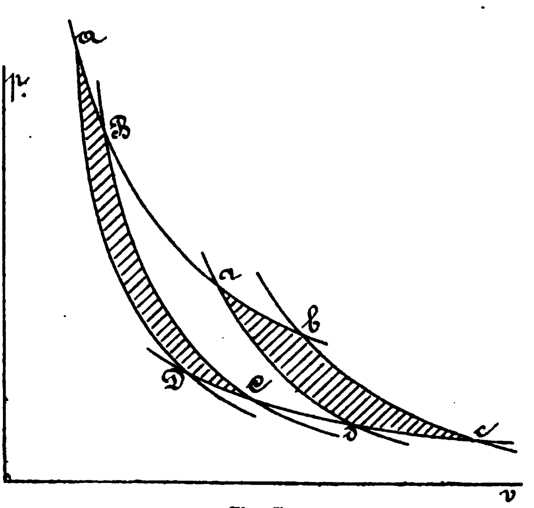


Fig. 7.

$$Q_1 = (a + t_1)(C - c)\, l_n \frac{v''_1}{v'_1}$$

Pour que les travaux développés soient égaux, le rapport $\frac{v''_1}{v'_1}$ devra avoir la même valeur dans les deux cycles.

D'autre part, on a par l'équation (10) :

$$\left(\frac{v''_2}{v''_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{a + t_1}{a + t_2}$$

Le *rapport* du volume final de détente au volume realisé à la fin de l'isothermique t_1, est par conséquent le même pour les deux cycles que nous considérons; il en résulte que, ***pour tous les cycles de même travail compris entre les mêmes températures***, le rapport du volume maximum du gaz à son volume minimum est constant. On aura par conséquent tout avantage, pour réduire l'encombrement du cylindre, à opérer sur un volume initial aussi réduit que possible, ce qui ne peut avoir lieu que si le gaz est très comprimé [1].

1. Cette condition avait déjà été aperçue par Sadi Carnot, *Réflexions*, etc, p. 60.

22. — On peut toujours trouver l'expression de la chaleur à fournir au gaz pour une transformation finie lorsque l'on connait la loi de détente. Ce cas se présentera notamment dans la théorie des moteurs à gaz.

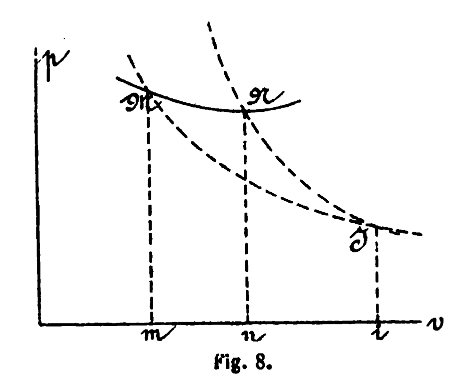


Fig. 8.

Soit MN (fig. 8) la ligne de transformation donnée, $t_1\ p_1\ v_1$ et $t_2\ p_2\ v_2$ les quantités relatives aux deux états M et N, Q la chaleur fournie ; nous avons, d'après le principe de l'équivalence :

$$Q = A \int_{v_1}^{v_2} p dv + c\,(t_2 - t_1) \tag{15}$$

Le dernier terme représente, en effet, la chaleur équivalente à l'accroissement d'énergie du corps.

Or on a :

$$p_1\,v_1 = R\,(a + t_1)$$
$$p_2\,v_2 = R\,(a + t_2)$$

En éliminant les températures à l'aide de ces relations, on trouve :

$$Q = A \int_{v_1}^{v_2} p dv + \frac{A}{\gamma - 1}\,(p_2\,v_2 - p_1\,v_1) \tag{16}$$

Il est quelquefois utile de représenter graphiquement la quantité de chaleur à fournir, ou le travail correspondant; nous indiquerons ici le mode de représentation donné par M. *Cazin;* il s'applique, du reste, non seulement aux gaz permanents, mais à un corps quelconque.

Faisons passer par M une ligne *d'égale énergie* MI, c'est-à-dire dont tous les points correspondent à des états du corps pour lesquels la valeur de U est la même, et égale à U_1, énergie de l'état initial ; menons par N, point pour lequel l'énergie est U_2, la ligne adiabatique NI, qui rencontre la première au point I.

La transformation IN, qui s'accomplirait sans dépense de chaleur, aurait pour effet de donner au corps l'accroissement d'énergie $U_2 - U_1$, qui serait donc égal, dans cette transformation, au travail fourni NI*in*. Ce

travail, ajouté à celui qui est accompli pendant la transformation réellement effectuée MN fournira la surface MNI*im*, à laquelle la chaleur Q est équivalente.

Dans le cas des gaz permanents, MI est en même temps une ligne isothermique.

Nous rencontrerons par la suite d'autres modes de représentation de la chaleur fournie.

23. — Toutes les opérations de détente ou de compression qui s'effectuent dans les machines diffèrent autant de la loi isothermique que de la loi adiabatique ; la conductibilité des parois est en effet trop grande pour annuler tout échange de chaleur, même dans les opérations rapides, mais elle est trop faible pour permettre l'échange parfait que suppose une détente ou une compression isothermiques. Pour faire comprendre l'influence de la chaleur fournie sur la courbe de détente (ou de compression), nous allons étudier le cas, purement hypothétique, où le gaz se transforme en présence d'un solide qui prend à chaque instant sa température. Il s'agira, bien entendu, comme dans toutes les questions traitées jusqu'ici, d'un gaz parfaitement sec.

Soit M le poids du solide qui cède de la chaleur, rapporté à celui du gaz, nous pouvons donc considérer l'unité de poids du gaz, et représenter par M le poids en kilogrammes du corps solide. Appelons C_1 son calorique spécifique.

Pour tout changement dt de température des deux corps en présence, le solide, qui n'accomplit aucun travail, perd la quantité de chaleur

$$MC_1\,dt$$

cette chaleur est communiquée au gaz dans le cas où dt est négatif ; elle lui est enlevée pour échauffer le solide dans le cas contraire. Dans l'une quelconque des équations données pour la transformation des gaz, par exemple dans l'équation (2), on devra faire

$$dQ = -MC_1\,dt$$

car la température s'abaisse pendant la détente ; en effet, si elle était constante, le solide n'aurait rien cédé, et l'on obtiendrait une transformation *isothermique* sans aucune communication de chaleur, ce qui est

impossible ; pour la détente, dt est donc négatif, ce qui rend positive la chaleur cédée. L'équation est :

$$-MC_1 \frac{dt}{a+t} = (C-c)\frac{dv}{v} + c\,\frac{dt}{a+t}$$

ou :

$$(MC_1 + c)\frac{dt}{a+t} = -(C-c)\frac{dv}{v}$$

qui, par l'intégration, devient :

$$\left(\frac{a+t_2}{a+t_1}\right)^{MC_1+c} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{C-c}$$

L'équation (3) aurait donné :

$$\left(\frac{a+t_2}{a+t_1}\right)^{MC_1+C} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{C-c}$$

En éliminant les températures, on obtient, pour la loi de détente :

$$(17) \qquad p_2\, v_2^{\frac{MC_1+C}{MC_1+c}} = p_1\, v_1^{\frac{MC_1+C}{MC_1+c}}.$$

Pour $M = o$, on retrouverait l'équation des lignes adiabatiques ordinaires ; lorsque M augmente indéfiniment, de même que C_1, l'exposant du volume tend vers l'unité, c'est-à-dire que la courbe tend vers la ligne isothermique sans jamais l'atteindre.

Lorsque l'on suppose que le corps qui cède de la chaleur est un liquide, le problème se complique notablement, parce que le liquide lui-même se transforme, et donne de la vapeur qui sature le gaz (56).

24. — *Procédé de MM. Ayrton et Perry pour représenter la chaleur fournie* [1].— Ce procédé consiste à porter, sur le diagramme du travail, les quantités d'énergie calorifique exprimées en kilogrammètres.

1. Ayrton et Perry. — *On the Gas Engine Indicator-Diagram. Philosophical Magazine,* 1884, t. II, p. 59, pl. III.

Soit AB (fig. 9) la ligne de transformation de l'unité de poids du gaz enfermé dans un cylindre, ab un élément de cette transformation à un instant quelconque, pour lequel les variables ont les valeurs p, v, t; appliquons à cette transformation le principe de l'équivalence, nous retrouverons l'équation (16), écrite sous la forme :

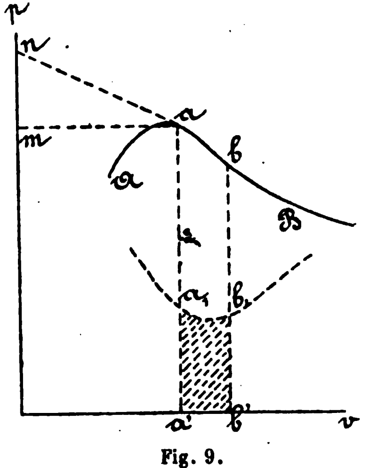


Fig. 9.

$$dQ = A\,pdv + \frac{A}{\gamma - 1}\,d\,(pv)$$

ou :

$$\text{(18)} \qquad E\,dQ = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\gamma\,p + v\,\frac{dp}{dv}\right)dv$$

cette équation donne, en kilogrammètres, l'énergie calorifique fournie pour produire la dilatation dv.

On peut écrire :

$$E\,dQ = \frac{E\,dQ}{dv}\,dv$$

L'énergie pourra donc être représentée par un rectangle ayant pour base dv, et pour ordonnée la quantité d'énergie à fournir par unité de volume que déplace le piston lorsque le volume atteint la valeur v.

En d'autres termes, l'énergie à fournir à chaque instant, par unité de volume déplacé, est exprimée par l'ordonnée :

$$a'\,a_1 = \frac{E\,dQ}{dv}$$

de la même manière que le travail développé par unité de volume déplacé par le piston est exprimé par l'ordonnée $a'a$ de la courbe du travail.

L'ordonnée $a'a_1$ peut être considérée comme une pression fictive qui s'exerçant sur le piston, produirait un travail égal au travail extérieur, augmenté de l'accroissement d'énergie intérieure ; la quantité a_1a serait donc la pression fictive qui produirait l'accroissement du travail in-

terne (¹); elle devrait être prise négativement dans le cas de la fig. 9.

Le procédé qui vient d'être exposé est tout à fait général, il s'applique non seulement aux gaz permanents, mais à tout corps qui, pour l'accroissement de volume dv, reçoit une quantité de chaleur dQ; mais, pour les gaz permanents, l'ordonnée $a'a_1$ résulte immédiatement de l'équation (18) :

$$a'a_1 = \frac{E\,dQ}{dv} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\gamma\,p + v\,\frac{dp}{dv}\right)$$

On peut construire la valeur $v\,\frac{dp}{dv}$, qui n'est autre chose que la quantité $m\,n$, obtenue en menant la tangente $a\,n$ à la courbe de détente au point a, et la parallèle $a\,m$ à l'axe des volumes.

Lorsque la courbe de détente est donnée sous forme analytique :

$$pv^k = C^{te}$$

on a :

$$\frac{dp}{dv} = -k\,\frac{p}{v}$$

et, par conséquent

$$a'a_1 = \frac{\gamma - k}{\gamma - 1}\,p$$

Pour $k = \gamma$, on trouve $a'a_1 = o$, ce qui devait être, puisque la détente est adiabatique.

Pour $k = 1$, $a'a_1 = p$; la transformation étant isothermique, ce résultat pouvait être prévu, attendu que l'énergie à fournir ne correspond qu'au *travail externe* effectué.

Pour toute valeur de k supérieure à γ, l'ordonnée $a'a_1$ est négative, c'est-à-dire que la détente se fait avec perte de chaleur.

Nous trouverons des applications de ce diagramme dans la théorie des moteurs à gaz (110) et des machines à vapeur (150).

1. La dénomination *pression du travail interne*, et la notion correspondante sont dues à Rankine. Les savants ont continué, en Angleterre, à représenter graphiquement le travail interne; Cotterill fait un fréquent usage de la pression du travail interne dans la théorie de la machine à vapeur.

§ IV.

Principe de Carnot.

Ce principe constitue, avec celui de l'équivalence, la base de la thermodynamique (1); bien que nous l'ayions formulé pour les gaz permanents (20), il ne sera pas inutile de revenir sur la notion des cycles, afin de la préciser.

25. — On appelle *cycle fermé*, une série d'opérations (dilatations et compressions) après lesquelles le corps travailleur revient à son état initial.

Carnot a considéré, en particulier, le cycle formé de deux lignes de température constante, et de deux lignes décrites lorsque le corps se détend ou se comprime sans communication de chaleur avec les sources extérieures; nous avons déjà étudié (20) les propriétés de ce cycle pour les gaz permanents.

Quel que soit le corps, on peut concevoir un cycle analogue, ABCD (fig. 10), dont la forme dépend évidemment de la nature du fluide choisi.

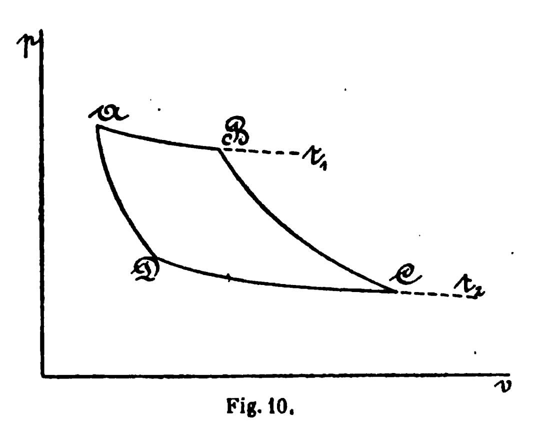


Fig. 10.

Pour le parcours AB, le corps emprunte, à la source t_1, la quantité de chaleur Q_1; pendant la compression CD, il abandonne, à l'extérieur, la quantité de chaleur Q_2, qui lui est enlevée à la température t_2; les transformations BC, DA, qui sont adiabatiques, s'opèrent à l'intervention de l'énergie intérieure du corps.

1. L'ouvrage intitulé: *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, dans lequel Sadi Carnot a exposé les idées qui lui ont fait formuler ce principe, date de 1824, tandis que le principe de Mayer (1842), même si on le fait remonter à Séguin (1838), est bien postérieur. Carnot dans le seul de ses ouvrages qui ait

Puisque le cycle est fermé, on a, en vertu du principe de l'équivalence, en appelant L le travail effectué :

$$Q_1 - Q_2 = AL$$

ou

$$Q_1 = Q_2 + AL$$

Une partie seulement de la chaleur puisée à la source supérieure est donc transformée en travail, l'autre partie est versée au réfrigérant, qui maintient la température t_2 pendant la compression CD.

Si, en partant du même état initial, A, on accomplit le cycle en sens inverse en dépensant le travail L, on empruntera au réfrigérant la quantité de chaleur Q_2, qui, en s'ajoutant à celle qui correspond au travail dépensé, amènera à la source t_1 la quantité de chaleur Q_1 qui vaut $Q_2 + AL$.

On voit que, à l'intervention du travail L, la quantité de chaleur Q_2 a été déplacée, et a passé du réfrigérant à la source supérieure ; la quantité AL provient du travail cédé, elle n'existait pas dans les sources avant l'opération.

26. — *Réversibilité.* — Les cycles sont réversibles lorsqu'ils peuvent être effectués indifféremment dans les deux sens, moyennant un simple changement dans les signes des échanges et des travaux développés.

Pour qu'un cycle soit réversible, il faut que le corps possède à chaque instant une température égale à celle de la source avec laquelle se fait

été publié de son vivant, admet la matérialité du calorique, idée courante a son époque, et que Rumford avait peut être été seul à attaquer. Ainsi, Carnot suppose que, dans les machines thermiques, il y a *chute de température*, mais non diminution du calorique; il assimile la température à la hauteur d'eau dans les machines hydrauliques, et la chaleur au poids, tandis que c'est une fonction découverte par Clausius et nommée *entropie*, qui est assimilable au poids.

Le principe formulé par Sadi Carnot ne pouvait donc être exact, on trouve en effet, à la page 6 des *Réflexions* :

« La production de la puissance motrice est donc due, dans les machines à « vapeur, non à une consommation réelle de calorique, mais à son transport « d'un corps chaud à un corps froid. »

Carnot a découvert, à la fin de sa vie, le *principe de l'équivalence*, qui l'aurait sans doute conduit à apporter à son premier théorème la correction faite beaucoup plus tard par Clausius, qui a donné le véritable énoncé du second principe expérimental, mais en lui conservant le nom de principe de Carnot: malgré l'erreur aujourd'hui évidente à laquelle l'hypothèse de la matérialité du calorique avait entraîné cet homme illustre, ses considérations sur les machines à feu sont presqu'entièrement vraies, et il est incontestable qu'il est l'auteur de la théorie des machines à chaleur.

l'échange de chaleur, et une pression égale à celle du milieu extérieur [1] sur lequel il agit, ou dont il reçoit l'action ; lorsque ces conditions sont réalisées, une différence infiniment petite de température ou de pression détermine le sens de la transformation.

Si ces conditions n'étaient pas remplies : par exemple, si le corps, pendant la communication avec la source de chaleur, prenait une température inférieure, d'une quantité finie, à celle t_1 de la source, on ne pourrait concevoir la transformation inverse, puisque le corps, pour restituer de la chaleur à la source, devrait posséder une température au moins égale à la sienne ; les températures du corps différeraient donc d'une quantité finie pendant les deux parcours. On peut facilement étendre ce raisonnement à l'échange qui s'opère avec le réfrigérant, de même qu'aux pressions du fluide relativement au milieu extérieur.

Les propriétés que nous avons à étudier dans ce paragraphe s'appliquent surtout aux transformations réversibles.

27. — *Postulatum de Clausius.* — La chaleur peut passer, dans une infinité de circonstances, d'un corps chaud à un corps froid, soit en totalité et spontanément, sans produire de travail, soit en partie, comme dans tout cycle où il y a production de travail; nous avons vu (25) qu'elle peut aussi passer du corps froid au corps chaud, lorsque du travail est communiqué au fluide qui opère le transport. *Clausius* a basé la démonstration du second principe sur le *postulatum* suivant :

La chaleur ne peut passer, d'elle-même, d'un corps sur un corps plus chaud.

Ce *postulatum* repose sur l'expérience ; on a essayé de lui opposer un certain nombre de faits, mais dans chaque cas, une interprétation exacte a démontré que la contradiction n'était qu'apparente [2]. On conçoit du reste, que la chaleur vaut à la fois par sa quantité, et par la température à laquelle elle est fournie ; s'il en était autrement, les masses naturelles très importantes, comme l'eau des mers, l'air atmosphérique, pourraient servir à échauffer d'autres corps en quantité limitée, par exemple l'eau d'un générateur, et procurer une *puissance gratuite.*

1. Il n'arrive presque jamais que la résultante des pressions du fluide sur l'organe mobile qui en reçoit l'action soit égale à la résistance statique appliquée à cet organe; on pourrait donc croire que la condition énoncée est rarement remplie; mais ce serait une erreur, car les organes mobiles ont toujours une masse relativement grande qui, par son inertie, rétablit l'équilibre dans la plupart des cas.

2. Hirn. — Ouvrage cité, t. I, p. 255.

28. — *Principe de Carnot.* — *Pour tous les corps fonctionnant suivant des cycles de Carnot entre deux températures déterminées, le rapport de la quantité de chaleur $Q_1 - Q_2$ transformée en travail, à la quantité de chaleur Q_1, empruntée à la source supérieure, ne dépend que de la température des sources, et nullement de la nature du corps envisagé, ni de l'étendue de ses transformations isothermiques.*

Pour démontrer ce principe, considérons deux machines, M, M' fonctionnant au moyen de deux corps différents, entre les températures t_1, t_2 ; elles empruntent à la source supérieure les quantités de chaleur Q_1, Q'_1, et abandonnent au réfrigérant les quantités Q_2, Q'_2. Le principe de Carnot exprime que, pour ces deux machines, on a la relation :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q'_1 - Q'_2} = \frac{Q_1}{Q'}$$

Supposons que l'on ait :

$$Q_1 - Q_2 = m\,(Q'_1 - Q'_2)$$

m étant un nombre entier quelconque. (La démonstration s'étend, sans qu'il soit nécessaire d'insister, au cas où m serait remplacé par le rapport de deux nombres premiers, ou par une quantité incommensurable).

Les deux machines peuvent être reliées de telle manière que la première accomplisse son cycle dans le sens direct, pendant que la seconde effectue le sien m fois dans le même temps et en sens inverse; pour cette opération, la machine M enlève à la source supérieure la quantité de chaleur Q_1, la machine M' apporte à la même source la quantité de chaleur mQ'_1 (25); en vertu du *postulatum de Clausius*, il faut que l'on ait, en remarquant que l'ensemble des deux machines n'effectue aucun travail :

$$Q_1 \geqq m\,Q'_1$$

Effectuons l'opération en sens inverse : puisque les cycles sont réversibles, la machine M versera à la source supérieure la quantité de chaleur Q_1, et la machine M' puisera à cette source la quantité de chaleur mQ'_1 ; il faut encore, d'après le *postulatum* :

$$Q_1 \leqq m\,Q'_1$$

Il n'est possible de concilier les deux conditions trouvées que si l'on a :

$$Q_1 = m Q'_1$$

On a donc :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q'_1 - Q'_2} = \frac{Q_1}{Q'_1}$$

ou :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2}$$

Cette équation existe quel que soit le corps travailleur, le rapport $\frac{Q_1}{Q_2}$ est donc indépendant de la pression ou du volume particulier de chaque corps, il ne saurait être fonction que des températures des deux sources; c'est, du reste, ce qui résulte de la valeur déjà trouvée pour les gaz permanents (20) :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a + t_1}{a + t_2}$$

$a + t$ est une fonction de la température que nous appellerons désormais la *température absolue* ; elle exprime la température comptée à partir d'un zéro fictif, situé à 273° sous l'origine de l'échelle du thermomètre centigrade (19). Cette température absolue sera toujours désignée par le symbole T. Nous avons donc, pour tous les corps accomplissant des cycles de Carnot entre les mêmes températures :

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Cette équation, qui traduit le *principe de Carnot*, peut être écrite autrement, car si l'on prend, pour le cycle fermé, l'expression :

$$\int \frac{dQ}{T}$$

on a, en remarquant que dQ est nul pour les transformations adiabatiques, et que T prend pour les isothermiques les valeurs T_1 et T_2 :

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

ou :

$$\int \frac{dQ}{T} = o \tag{19}$$

29. — *Extension à un cycle fermé quelconque.* — On démontre facilement que l'équation (19) s'applique à un cycle composé, comme celui de la figure 11, par la réunion de plusieurs cycles de Carnot ; car, à toute transformation *ab*, correspond, dans le cycle *abcd*, une transformation *cd*, comprise entre les mêmes lignes adiabatiques, et parcourue en sens contraire : quant aux transformations adiabatiques, telles que MN, elles n'interviennent pas dans la chaleur fournie.

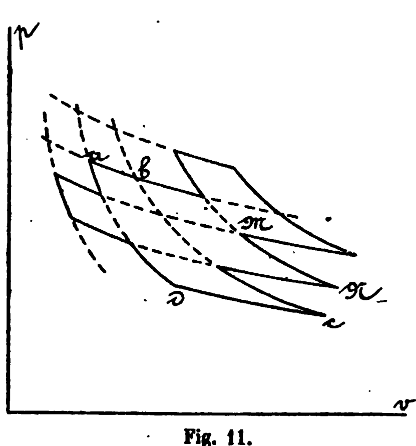
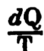


Fig. 11.

Considérons maintenant le cas d'un cycle fermé quelconque (fig. 12) : appelons dQ la quantité de chaleur fournie pour un parcours élémentaire *mn*, à la température variable T, l'élément de l'intégrale est :



$$\frac{dQ}{T}$$

Faisons passer par *m* et *n* les adiabatiques μ et ν ; soit *mm'* la ligne de transformation du corps à la température T. La quantité de chaleur, dQ, nécessaire pour opérer la transformation *mn*, est la même, à un infiniment petit du second ordre près, que celle à fournir pour la transformation *mm'n*, car la différence correspond au travail représenté par le triangle curviligne *mm'n*.

Fig. 12.

Or, la quantité de chaleur nécessaire pour opérer la transformation *mm'n* se réduit, puisque *m'n* est adiabatique, à celle fournie le long de l'isothermique T.

L'expression :

$$\int \frac{dQ}{T}$$

relative à un cycle quelconque, est donc la même que celle qui se rapporte au cycle composé inscrit, et formé de cycles de Carnot élémentaires. Or, on a, pour ce cycle composé, lorsque le parcours est fermé :

$$\int \frac{dQ}{T} = o$$

30. — *Entropie.* — L'intégrale ci-dessus, qui s'annule pour un contour fermé, doit être, pour un état quelconque du corps, une fonction de cet état, c'est-à-dire des variables qui le caractérisent; en d'autres termes, il existe, pour tous les corps, une fonction S, intégrale de $\frac{dQ}{T}$; c'est à cette fonction que Clausius a donné le nom d'*entropie.*

Nous avons fait remarquer au numéro 6, que dQ n'est la différentielle d'aucune fonction, il n'en est pas de même de $\frac{dQ}{T}$; T joue à l'égard de dQ le rôle de facteur d'intégrabilité. Cette propriété de la fonction T (ou $a + t$) s'est vérifiée pour les gaz, équations (2), (3) et (4).

Toute transformation adiabatique, $dQ = 0$, laisse à l'entropie une valeur constante ; chaque adiabatique est donc caractérisée par une valeur constante de la fonction S.

Supposons qu'il s'agisse, en particulier, d'un gaz parfait, nous aurons, d'après l'équation (4), n° 9, pour une transformation finie quelconque, MN (fig. 13) :

$$S'' - S' = \int_M^N \frac{dQ}{T} = C\, l_n \frac{v''}{v'} + c\, l_n \frac{p''}{p'}$$

ou :

$$S'' - S' = l_n\, v''^C\, p''^c - l_n\, v'^C\, p'^c$$

Pour une transformation quelconque, le second membre est différent de zéro, tandis que, pour l'adiabatique μ passant par le point M, on a, pour tout point tel que P dont l'entropie est S_2 :

$$S_2 - S' = o$$

L'entropie figure toujours dans les équations par son accroissement, depuis un certain état initial.

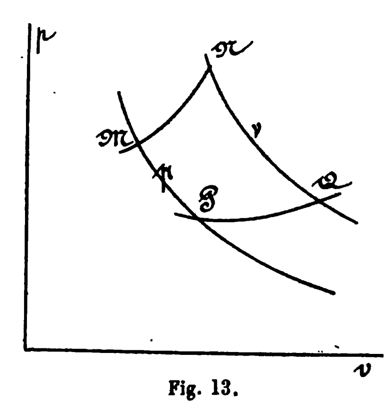


Fig. 13.

31. — Considérons, entre les deux adiabatiques μ, ν, des transformations quelconques MN, PQ; *la variation de l'entropie est la même* pour toutes ces transformations.

En effet, pour amener le corps de l'état M à l'état Q, la variation d'entropie doit être la même quelle que soit la succession des transformations intermédiaires ; on a donc :

$$\int_M^N \frac{dQ}{T} + \int_N^Q \frac{dQ}{T} = \int_M^P \frac{dQ}{T} + \int_P^Q \frac{dQ}{T}$$

et, en remarquant que l'entropie est constante pour les parcours NQ, MP, on obtient la démonstration de la propriété énoncée.

Lorsque la transformation MN, au lieu d'être quelconque, est isothermique et se fait à la température T :

$$S'' - S' = \int_M^N \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T}$$

ou :

$$Q = (S'' - S')\,T$$

Puisque $S'' - S'$ est constant entre les mêmes adiabatiques, la chaleur à fournir, entre deux adiabatiques données, pour effectuer des transformations isothermiques, est proportionnelle à la fonction T de la température à laquelle se fait l'échange de la chaleur.

La fonction T est celle que nous avons déjà désignée par température absolue ; la notion de température, conventionnelle jusqu'ici, est donc précisée [1].

1. Il n'est pas inutile de remarquer que la température, définie par comparaison et au moyen d'une échelle thermométrique, n'est pas une grandeur physique susceptible d'addition. Le théorème de Carnot, qui établit une relation d'une simplicité inattendue entre les rapports des quantités de chaleur et ceux des températures absolues, nous permettrait de dire : la température absolue est une quantité à laquelle est proportionnelle, entre deux adiabatiques données, la chaleur cédée à un corps, quelle que soit la nature de ce corps. A une température T, double, correspond une quantité de chaleur cédée double, etc.... V. Lippmann, ouvrage cité p. 64.

32. — Une ligne isothermique AB, (fig. 14), ne peut couper une adiabatique C en deux points, car on pourrait imaginer un cycle dans lequel la chaleur serait empruntée à la température T_1 ; le corps, en revenant à son état primitif suivant la ligne BCA ne ferait pas varier l'entropie, on aurait donc, pour la transformation AB :

$$\frac{Q_1}{T_1} = o$$

c'est-à-dire $Q_1 = 0$; il n'y aurait aucune dépense de chaleur, tandis qu'il y aurait du travail produit.

On peut exprimer cette propriété en disant qu'une machine ne peut fonctionner au moyen d'une seule source de chaleur.

Comme la propriété est vraie, quelque rapprochés que soient les points A et B, on en déduit que l'*isothermique ne peut être tangente à l'adiabatique.*

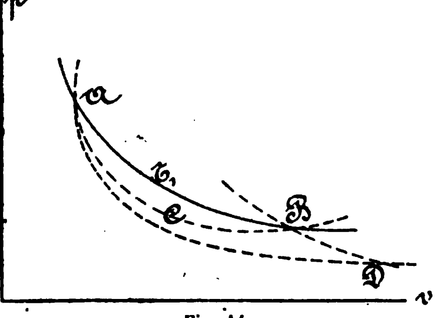


Fig. 14.

On serait conduit à la même conséquence impossible, si l'on supposait que les deux adiabatiques passant par A et B pussent se rencontrer au point D, car, dans le parcours du cycle ABDA, les transformations BD,DA, ne feraient pas varier l'entropie.

Enfin, il est évident que deux isothermiques ne peuvent en général se rencontrer, sinon, le point d'intersection correspondrait à deux états différents, définis par la même pression et le même volume.

Les corps peuvent cependant faire exception à cette règle lors du changement d'état, par exemple lorsque la vapeur saturée passe à l'état de surchauffe ou *vice-versa*.

Le signe de dQ reste le même lorsque l'on suit l'isothermique d'une manière continue, car dQ ne pouvant changer de signe sans passer par une valeur nulle, il y aurait en ce point un élément commun à l'adiabatique et à l'isothermique (1).

33. — *Equation de Clapeyron.* — Les équations établies au n° 9, si utiles pour l'étude des gaz permanents, sont spéciales à ces fluides.

1. Cette série de théorèmes n'avait pas été formulée, à notre connaissance avant M. Poincaré.

Lorsqu'il s'agit de corps quelconques, et en particulier de vapeurs, on peut étudier les transformations isothermiques au moyen de l'équation de Clapeyron, qui se déduit facilement du second principe.

Considérons un cycle de Carnot (fig. 15) composé de deux lignes isothermiques dont les températures diffèrent infiniment peu; on aura, en appelant Q et $Q + dQ$ les quantités de chaleur correspondant aux températures T et $T + dT$:

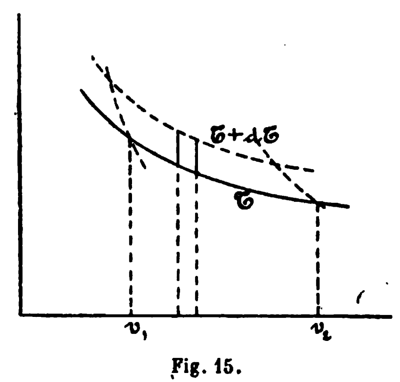


Fig. 15.

$$dQ = Q \frac{dT}{T}$$

D'autre part, en vertu du principe de l'équivalence, si nous appelons dL le travail accompli dans le parcours du cycle :

$$dQ = A\, dL$$

Or,

$$dL = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dT}\, dT\, dv$$

l'expression

$$\frac{dp}{dT}\, dT$$

est la différentielle de la pression par rapport à la température seulement : elle devra être tirée de l'équation fondamentale du corps dans laquelle v sera considéré comme constant.

En rapprochant les égalités ci-dessus, on trouve :

$$Q = AT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dT}\, dv \tag{20}$$

Telle est l'équation trouvée par Clapeyron [1], qui donne l'expression générale de la chaleur à fournir pour la transformation isothermique.

1. Plus exactement, Clapeyron avait tiré de l'énoncé faux du théorème de Carnot, l'équation :

$$Q = \frac{1}{\varphi(T)} \int \frac{dp}{dT}\, dv$$

La fonction $\varphi(T)$ était inconnue. L'erreur fondamentale n'a pas entaché ce

34. — Nous pouvons immédiatement vérifier cette équation pour les gaz permanents, dont les propriétés nous sont déjà connues. On a, pour ceux-ci :

$$pv = RT$$

et

$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{v}$$

d'où :

$$Q = ART\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v}.$$

C'est, sous une forme un peu différente, l'équation (8) du nº 14.

§ V.

Diagramme de l'entropie et de la température. Cycles de rendement maximum.

35. — Nous avons rencontré (nºs 22 et 24) divers modes de représentation graphique de la chaleur à fournir pour effectuer une transformation quelconque ; ces procédés, étudiés à propos des gaz permanents, s'appliquent également à un corps quelconque ; ils sont assez compliqués, et la difficulté provient de ce que le diagramme ordinaire, construit au moyen du volume et de la pression, ne fait pas connaître explicitement la valeur de l'énergie intérieure.

On doit à M. Th. Belpaire [1] un nouveau mode de représentation, qui consiste à porter en abscisses l'entropie du corps (ou son accroissement depuis un certain état initial déterminé pour lequel on suppose l'entropie égale à zéro), et en ordonnées la température T. On obtient ainsi une courbe AB (fig. 16) ; pour chaque élément *ab*, on a :

résultat, à cause de la considération du cycle infiniment petit. La fonction $\varphi(T)$ est donc égale à $\frac{1}{AT}$; c'est Clausius qui a donné à l'équation de Clapeyron la forme sous laquelle elle est connue et employée aujourd'hui.

1. Voir la note de l'*Avant-Propos*.

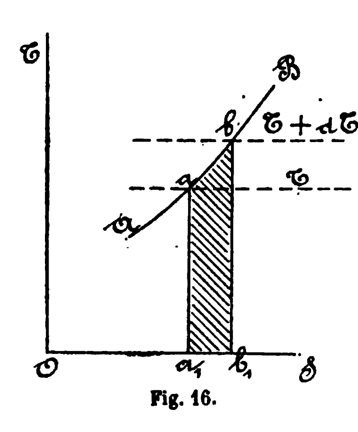


Fig. 16.

$$a_1 b_1 = \frac{dQ}{T}$$

$$aa_1 = T$$

La surface $ab\, b_1 a_1$ représente, par conséquent, la chaleur dQ. On peut toujours construire ce diagramme chaque fois que l'on connaît l'entropie :

$$O\, a_1 = \int \frac{dQ}{T}$$

pour la transformation considérée.

Dans ce mode de représentation, les isothermiques sont caractérisées par des lignes droites parallèles à OS, tandis que les adiabatiques sont parallèles à OT.

La ligne AB sera, pour la simplicité du langage, appelée diagramme entropique.

36. — *Diagramme entropique pour les gaz.* — Proposons-nous de trouver le diagramme entropique correspondant, pour l'unité de poids d'un gaz permanent, à la loi de détente :

$$pv^k = p_1 v_1^k$$

On a, pour ce corps (éq. 2) :

$$\frac{dQ}{T} = c\frac{dT}{T} + (C - c)\frac{dv}{v}$$

Pour trouver $\int \frac{dQ}{T}$, il faut, dans cette équation, remplacer v en fonction de la température en nous servant de la loi de détente donnée, ainsi que de la relation fondamentale des gaz :

$$pv = RT$$

Ces deux équations donnent, par l'élimination de p :

$$RTv^{k-1} = p_1 v_1^k$$

d'où :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T}$$

et, en remplaçant dans l'expression de dQ :

$$\frac{dQ}{T} = c\frac{k-\gamma}{k-1}\frac{dT}{T}$$

qui, par l'intégration, donne :

$$S - S_1 = \int_{T_1}^{T} \frac{dQ}{T} = c\,\frac{k-\gamma}{k-1}\,l_n\,\frac{T}{T_1}$$

Choisissons, comme point initial, celui pour lequel la température est T_1 l'entropie ayant une valeur arbitraire S_1 ; nous pourrons, pour chaque valeur de T, trouver l'expression $S - S_1$, et par conséquent, construire le diagramme entropique.

On peut avoir les cas suivants :

1°) $k > \gamma$). La valeur $S - S_1$ est positive pour toute valeur de T supérieure à T_1 ; lorsque k tend vers l'infini, on a une transformation à volume constant, car :

$$p^{\frac{1}{k}}v = C^{te}$$

et

(21) $$S - S_1 = c\,l_n\,\frac{T}{T_1}$$

Cette transformation est représentée par Mc, Mc' (fig. 17).

2°) $k = \gamma$). On a $S - S_1 = o$, quelle que soit la température : c'est le cas des lignes adiabatiques ; on a MA pour la compression, et MA' pour l'opération inverse.

3°) $\gamma > k > 1$). C'est le cas où la igne de détente est comprise entre l'adiabatique et l'isothermique, c'est-à-dire où la compression a lieu avec un enlèvement de chaleur, et où la détente s'opère sous l'influence d'une certaine quantité de chaleur fournie. On constate que l'entropie diminue lorsque la température augmente, attendu que $k - \gamma$ est négatif ; cette transformation répond à MB, MB'.

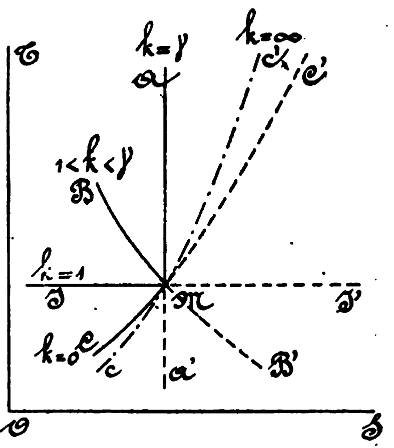


Fig. 17.

4°) $k = 1$). On a $T = T_1$, la ligne est isothermique; on peut trouver l'entropie en faisant $dt = o$ dans l'équation différentielle; on trouve :

$$S - S_1 = (C - c)\, l_n \frac{v}{v_1}$$

MI correspond à la compression, et MI' à la détente.

5°) $k = o$) ou $p = C^{te}$, on a :

$$S - S_1 = C\, l_n \frac{T}{T_1} \tag{22}$$

La transformation est représentée par MC' pour la compression, et MC pour la détente. Les cas les plus intéressants, au point de vue des applications sont les transformations à volume constant (éq. 21), et à pression constante (éq. 22); pour ces transformations, la température variant en progression géométrique, l'entropie varie en raison arithmétique; lorsque l'on possède deux points de chaque courbe, il est facile d'en déduire les autres.

Les équations (21) et (22) auraient pu être trouvées directement, car on a, pour les transformations auxquelles elles s'appliquent respectivement :

$$dQ = c\, dT \qquad dQ = C\, dT$$

d'où :

$$\frac{dQ}{T} = c\frac{dT}{T} \qquad \frac{dQ}{T} = C\frac{dT}{T}$$

relations qu'il suffit d'intégrer.

37. — Lorsque deux lignes de transformation se coupent, il en est de même de leurs transformées entropiques; en effet, soient AB, AC (fig. 18), deux lignes de transformation qui se coupent au point A; supposons d'abord que AC soit isothermique; menons l'adiabatique ab qui passe par le point a, infiniment voisin de A. Soit $A_1 a_1$ la transformée entropique de Aa, $a_1 b_1$ celle de ab. Comme la quantité de chaleur nécessaire pour parcourir le cycle Aab est infiniment petite du second ordre,

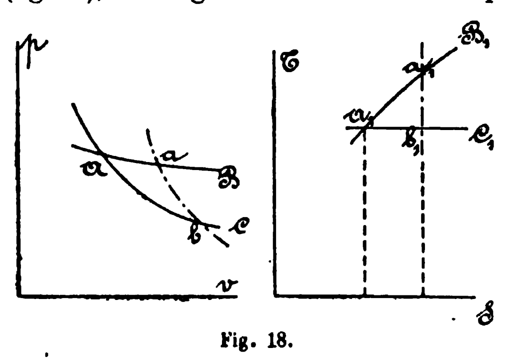


Fig. 18.

le triangle curviligne $A_1 a_1 b_1$, qui représente cette différence, (et dont la base $A_1 b_1$, ou $\frac{dQ}{T}$ se rapportant à Ab, est infiniment petite du premier ordre) doit être aussi du second ordre, donc $a_1 b_1$ et $A_1 b_1$ sont du même ordre, et les éléments $A_1 a_1$, $A_1 b_1$ ont des directions différentes.

Cette propriété s'étend évidemment au cas où la ligne AC, au lieu d'être isothermique, serait quelconque, car il suffirait de répéter la même démonstration, en menant par A la ligne isothermique.

Lorsque les lignes de transformation se rencontrent en deux points, A, B, il en est de même de leurs transformées entropiques ; car, pour chacun des points d'intersection, l'état est le même dans les deux lignes de transformation : donc, la température est la même ; en outre, quel que soit le parcours suivi entre les deux points d'intersection, l'accroissement d'entropie est le même du point A au point B.

Lorsque les points A et B se rapprochent indéfiniment, il en est de même des points A_1 et B_1, qui les représentent sur le diagamme entropique ; donc, lorsque les lignes de transformation sont tangentes, leurs transformées entropiques le sont également.

Ces propriétés sont générales, et s'appliquent à un corps quelconque.

38. — *Cycle de Carnot pour un corps quelconque.* — Le cycle de Carnot se traduit, dans le mode de représentation que nous considérons, par le rectangle A B C D (fig. 19).

La quantité de chaleur empruntée à la source supérieure est représentée par le rectangle A_1 B, celle versée au réfrigérant par le rectangle A_1 C ; la différence, donnée par le rectangle AC, est donc transformée en travail. Sous cette forme, le rendement du cycle apparaît d'une manière évidente.

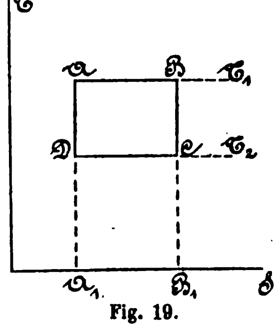


Fig. 19.

39. — *Le cycle de Carnot est un cycle de rendement maximum.* — En effet, considérons un cycle quelconque réversible, MNUV (fig. 20), dans lequel la chaleur est reçue et cédée à des températures variables ; nous allons démontrer que le rapport de la quantité de chaleur transformée

en travail à la quantité de chaleur dépensée, est moindre que pour le cycle de Carnot réalisé entre les températures extrêmes du cycle quelconque.

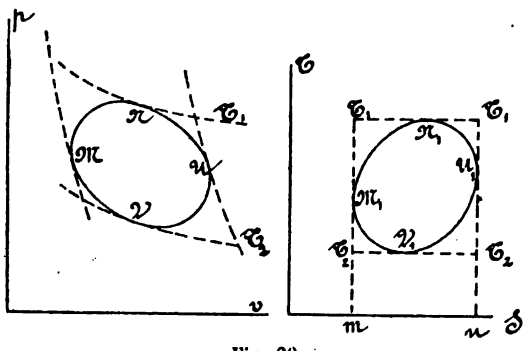


Fig. 20.

Circonscrivons au cycle considéré un cycle de Carnot; les températures extrêmes, qui sont celles des lignes isothermiques, sont T_1 et T_2.

Construisons les transformées des deux cycles ; en vertu des remarques faites au numéro 37, le cycle transformé $M_1 N_1 U_1 V_1$ sera tangent aux quatre côtés du rectangle qui représente le cycle de Carnot. On a pour la chaleur dépensée :

$$q_1 = m\, M_1 N_1 U_1 u$$

pour la chaleur versée à la source inférieure :

$$q_2 = m\, M_1 V_1 U_1 u$$

et pour la chaleur transformée en travail :

$$q_1 - q_2 = M_1 N_1 U_1 V_1$$

Le rendement du cycle est :

$$\frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{M_1 N_1 U_1 V_1}{m\, M_1 N_1 U_1 u}$$

Or, on a :

$$\frac{M_1 N_1 U_1 V_1}{m\, M_1 N_1 U_1 v} < \frac{M_1 T_1 T_2 U_1 V_1}{m\, T_1 T_1 u} < \frac{T_1 T_1 T_2 T_2}{m\, T_1 T_1 u}$$

ou

$$\frac{q_1 - q_2}{q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

40. — Le rendement du cycle de Carnot est d'autant plus élevé, que l'écart des températures extrêmes, rapporté à la température la plus élevée, est plus grand. On voit qu'il y a avantage à abaisser la température T_2 du réfrigérant plutôt qu'à élever celle de la source supérieure, parce que, par ce dernier moyen, on ajoute une même quantité aux

deux termes de la fraction qui exprime le rendement, tandis qu'en abaissant la température du réfrigérant, on n'agit que sur le numérateur de cette fraction.

Pratiquement, la température T_2 ne peut être abaissée en dessous de la température du milieu ambiant ; il y a des cas où cette température dépend de la nature du fluide : ainsi, dans les machines à vapeur sans condensation, bien que le réfrigérant soit le milieu atmosphérique, la température T_2 ne peut descendre sous $273 + 100°$. Cette anomalie tient à la nature physique du fluide qui sert d'agent de transformation.

41. — *Autres cycles de rendement maximum.* — Considérons un cycle dont la transformée entropique soit $A_1 B_1 c_1 d_1$, c'est-à-dire composé de deux lignes isothermiques $A_1 B_1$, $c_1 d_1$, et de deux transformations $B_1 c_1$, $A_1 d_1$ telles que celles-ci soient superposables (fig. 21). Supposons, en outre, que la chaleur à enlever pour accomplir la transformation $B_1 c_1$, qui est représentée par la surface $c'c_1 B_1 C'$, soit tenue en dépôt au lieu d'être versée au réfrigérant. Elle pourra servir à accomplir la transformation $d_1 A_1$, car, d'après l'hypothèse, les lignes $d_1 A_1$ et $c_1 B_1$ étant superposables, les surfaces bordées de hachures sont égales.

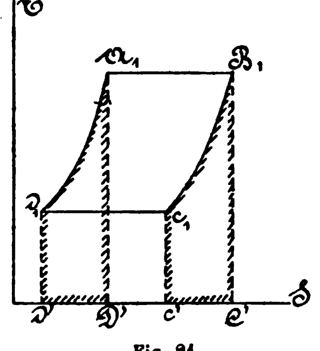


Fig. 21.

La chaleur empruntée à la source supérieure est donc $A_1 C'$, celle versée à la source inférieure est $d_1 c'$ et la chaleur transformée en travail est $A_1 B_1 c_1 d_1$, c'est-à-dire la même que pour le cycle de Carnot; les échanges de chaleur entre le corps et les *sources* étant les mêmes que pour ce cycle, on voit que le mode de fonctionnement indiqué est, au point de vue du rendement, équivalent à celui du cycle de Carnot.

Les lignes $B_1 c_1$, $A_1 d_1$ sont quelconques, pourvu qu'elles soient superposables ; il y a, par conséquent, une infinité de cycles de rendement maximum.

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $A_1 d_1$, $B_1 c_1$, soient superposables, et que, pour une même valeur T de la température, on ait, pour ces deux lignes, des valeurs identiques de $\frac{dT}{dS}$.

Nous savons déjà que, pour un gaz permanent, équations (21) et (22),

les lignes à pression constante ainsi que celles à volume constant donnent, entre les mêmes températures, des transformées entropiques superposables.

D'une manière plus générale, soit :

$$pv^k = C_o$$

C_o étant une constante, la ligne de transformation traduite sur le diagramme entropique par $B_1\ c_1$, et pour laquelle on a (n° 36) :

$$dS = \frac{dQ}{T} = c\ \frac{k-\gamma}{k-1}\frac{dT}{T}$$

Pour la ligne $A_1\ d_1$, dS devra avoir la même valeur pour la même température ; cette condition sera évidemment réalisée, si l'équation de la ligne de transformation est :

$$p'\ v'^k = C'_o$$

C'_o étant une constante.

En tenant compte de l'équation caractéristique des gaz, les équations des deux lignes peuvent s'écrire :

$$\mathrm{RT}\ v^{k-1} = C_o$$

$$\mathrm{RT}v'^{k-1} = C'_o$$

On aura donc, entre les volumes occupés par le gaz pour une même valeur de T :

$$\frac{v^{k-1}}{v'^{k-1}} = \frac{C_o}{C'_o}$$

Les volumes correspondant, dans les deux lignes, à une même température, sont dans un rapport constant ; il en est donc de même aussi des pressions.

Dans les figures 22 et 22 *bis*, sont représentés deux cycles, EFCD, GHCD formés de deux lignes isothermiques et de lignes de volume

constant et de pression constante, ainsi que le cycle de Carnot ABCD.

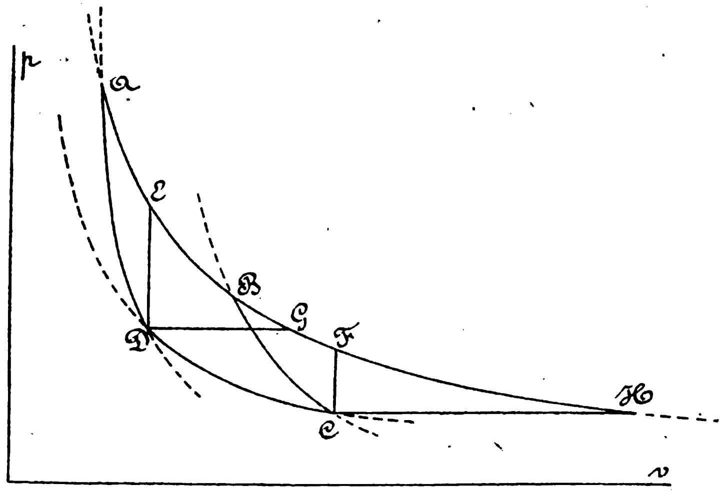


Fig. 22.

Les transformations entropiques de ces cycles sont représentées par les figures marquées des mêmes lettres, mais affectées d'un indice.

La ligne

$$pv^k = C_0$$

choisie pour les gaz comme type de transformation destinée à remplacer l'adiabatique du cycle de Carnot, se confond avec l'adiabatique, lorsque

$$k = \gamma$$

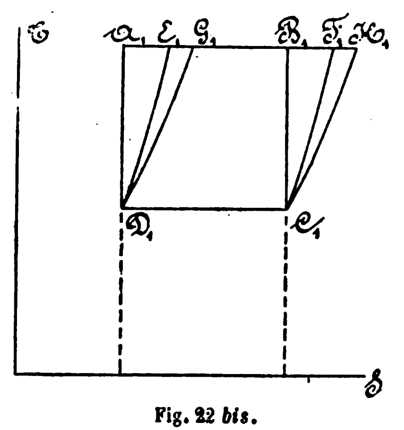


Fig. 22 *bis*.

On voit que le cycle de Carnot est un cas particulier de ceux définis par deux isothermiques et deux lignes conjuguées du genre de celles considérées ici, appelées *isodiabatiques* par Rankine; mais le cycle de Carnot présente un grand avantage, c'est que les transformations adiabatiques s'effectuent sans perte ni gain de chaleur, tandis que celles qui les remplacent dans les cycles de rendement maximum exigent que la

chaleur soit tenue en réserve pour opérer la compensation des échanges thermiques nécessaires dans le parcours des lignes *isodiabatiques*.

Cette condition, très difficile à réaliser pratiquement, est depuis longtemps l'objectif des chercheurs qui travaillent au perfectionnement des machines à air chaud (chap. III).

§ VI.

Transformations non réversibles [1].

42. — Une opération non réversible est celle dans laquelle les conditions indiquées au numéro 26 ne sont pas réalisées. Ainsi, dans l'expérience de Joule (8), la transformation du gaz qui s'écoule du récipient où il est comprimé, dans le ballon à pression plus basse, n'est pas réversible ; en effet, la pression du gaz n'est pas à chaque instant équilibrée par une contre-pression égale. L'opération que l'on produit dans le briquet pneumatique pour enflammer l'amadou par la compression de l'air n'est pas réversible [2] ; car la masse du petit piston étant négligeable, la pression qu'il exerce sous l'influence de la poussée qu'il reçoit est supérieure d'une quantité finie et très grande, à la pression que le gaz lui oppose, de telle sorte que l'opération ne pourrait pas être accomplie en sens inverse sous l'influence des mêmes pressions.

Le principe de l'équivalence s'applique à toutes les opérations, réversibles ou non ; certains procédés de détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur comportent même des opérations non réversibles. Mais le principe de Carnot n'est applicable qu'aux opérations réversibles.

D'ailleurs, même dans l'application du premier principe aux opérations non réversibles, il y a lieu de remarquer que les états du corps entre lesquels on fait cette application doivent être parfaitement définis ; car à température égale, l'énergie totale d'un gaz qui n'est pas en repos dépend évidemment de sa force vive, ou de l'intensité des mouvements tumultueux qui se produisent dans sa masse ; Il y a donc lieu de tenir compte de ces mouvements, ainsi que de la vitesse d'ensemble dont le

1. Zeuner, ouvrage cité p. 84.
2. Madamet, ouvrage cité p. 134.



corps pourrait être animé dans toutes ses molécules, aussi bien à l'instant initial qu'à l'instant final.

43. — Supposons que le corps subisse une opération non réversible en se détendant, par exemple, sans éprouver de la part du milieu extérieur une résistance égale à sa pression; portons, pour chaque valeur du volume, la pression extérieure, représentée par la ligne AB (fig. 23) la différence entre la transformation considérée et un phénomène réversible est que, pour chaque valeur du volume qu'il occupe, le corps, au lieu d'être en repos et en équilibre, est à l'état de mouvement tumultueux, et que, si on arrêtait brusquement la transformation en immobilisant le piston sans plus fournir de chaleur, la pression s'élèverait jusqu'au point A' pour la position *a* du piston ; d'une manière générale, cette pression atteindrait les divers points d'une certaine courbe A' B' pour des positions quelconques du piston situées entre *a* et *b*. (Nous pouvons supposer, pour simplifier le langage, que le piston ait une surface égale à l'unité, de cette manière les abscisses représentent indifféremment les déplacements du piston ou le volume du corps).

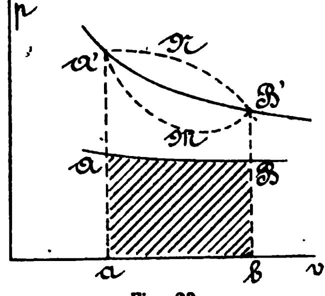


Fig. 23.

Pendant la transformation AB, le travail effectué sur les corps extérieurs par le fluide évoluant est représenté par la surface *a*AB*b*, mais l'énergie n'est nullement définie par les points figuratifs A, B, comme elle le serait pour une transformation réversible ; elle est, au contraire, définie par les points A', B', de la courbe A' B', qu'on pourrait appeler la courbe d'équilibre.

Le principe de l'équivalence, appliqué à la transformation AB, donne :

$$Q' = A (U_1 - U_0) + A \int_A^B pdv$$

L'équation est identique à celle que nous connaissons, mais U_0, U_1 se rapportent aux états d'équilibre A', B'.

La transformation peut être telle, du reste, que l'état initial et l'état final soient des états d'équilibre ; dans ce cas, la ligne des pressions est figurée par A' M B', et U_0, U_1, se rapportent aux états initial et final de la transformation.

44. — D'après l'allure des courbes tracées, on voit que le travail effectué pendant la détente non réversible est inférieur à celui qui correspondrait à la courbe A' B'; lorsque le trajet est réversible, les courbes AB et A'B' se confondent.

Réciproquement, la compression irréversible ne peut se produire que par l'effet d'une pression extérieure supérieure à la force élastique du corps; lorsque l'on suppose, en particulier, que les états extrêmes B' et A' correspondent à l'équilibre, la courbe du travail extérieur exercé sur le corps est B' N A', et ce travail est supérieur à celui qui devrait être développé pour produire une compression réversible entre les points B', A'.

On peut imaginer un cycle dans lequel la première transformation comporte une dilatation non réversible, en présence d'une source de chaleur à la température T_1 ; nous venons de voir que, pour cette transformation, la chaleur fournie Q'_1 est inférieure à celle qui serait nécessaire entre les mêmes états (supposés d'équilibre), et pour une transformation réversible ; cette chaleur, dans le cas de l'isothermique, serait Q_1. De même, supposons que la troisième transformation, au lieu d'être réversible, s'effectue sous l'influence d'une pression extérieure supérieure à chaque instant à celle due à la force expansive du corps ; la chaleur cédée Q'_2 sera supérieure à celle qui serait abandonnée par la transformation réversible limitée aux mêmes états initial et final qui seraient des états d'équilibre ; on a donc :

$$Q'_1 < Q_1 \qquad \text{ou } Q'_1 = Q_1 - a$$
$$Q'_2 > Q_2 \qquad \text{ou } Q'_2 = Q_2 + b$$

Les quantités de chaleur Q'_1, Q'_2 sont les seules qui interviennent dans le cycle, puisque les deux autres transformations sont supposées adiabatiques ; par conséquent, on a, pour le rendement du cycle non réversible :

$$\frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} < \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} < \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Le rendement du cycle est donc inférieur à celui du cycle de Carnot.

§ VI.

Vapeurs saturées.

45. — Lorsqu'un liquide enfermé dans un récipient supporte une certaine pression (par exemple, celle d'un piston), et qu'on lui communique de la chaleur, sa température augmente jusqu'au moment où il commence à se réduire en vapeur ; à partir de cette limite, la température reste constante, jusqu'à ce que le liquide soit entièrement transformé ; la vapeur est saturée pendant tout le temps que dure le phénomène.

La température à laquelle la vaporisation commence dépend de la pression supportée par le liquide, de sorte qu'il existe une relation entre la température de la vapeur saturée et la pression à laquelle elle se forme, relation que les expériences très précises de Regnault ont déterminée, et que nous pouvons mettre sous la forme :

$$p = \varphi(t)$$

Lorsqu'on enlève de la chaleur à la vapeur saturée à la température t, la pression extérieure étant constante et égale à p, elle se liquéfie, et sa température est stationnaire jusqu'au moment où elle s'est entièrement transformée en liquide. A partir de ce point, le liquide se refroidit.

Lorsque, la vaporisation étant complète, on continue à communiquer de la chaleur à la vapeur sous la pression correspondante à la température de saturation, sa température augmente, et l'on dit qu'elle est surchauffée. Il y a d'autres moyens de produire la surchauffe (61).

Regnault a mesuré, pour un assez grand nombre de corps, la quantité de chaleur à communiquer au liquide jusqu'au moment où la vaporisation commence, ainsi que la chaleur à fournir, sous la pression correspondante, pour effectuer la vaporisation complète.

Soit q la chaleur du liquide, on a, en appelant l le rapport $\frac{dq}{dt}$, ou le calorique spécifique, lequel dépend en général de t :

$$q = \int_0^t l dt$$

La chaleur à communiquer au liquide dépend en réalité, comme pour

tout autre corps, du travail qu'il effectue pour vaincre la pression extérieure, mais le travail de dilatation du liquide est si faible, qu'on peut en faire abstraction, et supposer que q sert tout entier à augmenter la chaleur interne. Dans les expériences de Regnault, la température a été élevée sous la pression atmosphérique [1].

Soient r la chaleur de vaporisation, et λ la chaleur totale communiquée au liquide jusqu'au moment de la vaporisation complète, la vaporisation ayant lieu sous la pression constante qui correspond à la température t; on a :

$$\lambda = q + r$$

Généralement, on ne connait pas d'autres données physiques que ces quantités de chaleur [2], et la relation qui lie la pression à la température, mais on peut, en utilisant les deux principes fondamentaux, trouver par le calcul d'autres constantes.

46. — *Chaleurs latentes interne et externe.* — Considérons la vaporisation complète du kilogramme de liquide à la température t sous la pression correspondante p.

Soient u le volume spécifique du liquide à t degrés,
u' — de la vapeur à t degrés.

Le principe de l'équivalence, appliqué à cette transformation, donne :

$$r = \mathrm{A}\,\Delta\,\mathrm{U} + \mathrm{A}p\,(u' - u)$$

$\Delta\,\mathrm{U}$ représente l'accroissement du travail interne pendant la vaporisation ; $p\,(u' - u)$ est le travail effectué pendant l'accroissement considérable de volume qui résulte de la vaporisation.

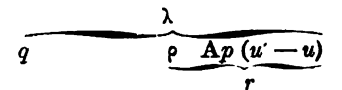
On a :

$$\mathrm{A}\,\Delta\,\mathrm{U} = r - \mathrm{A}p\,(u' - u).$$

$\mathrm{A}\,\Delta\,\mathrm{U}$ est l'accroissement de la chaleur latente interne pendant la vaporisation ; on peut le calculer au moyen des quantités r et u, qui résultent de l'expérience, et de u' qui sera déterminé plus loin. On désigne

1. Zeuner, ouvrage cité p. 254 à 258.
2. On connait bien pour l'eau, la densité de la vapeur sous différentes pressions d'après les expériences de Fairbairn, Unwin et Tate, mais ces données ne sont utilisées que pour la confirmation des principes fondamentaux, qui permettent de calculer, d'une manière beaucoup plus exacte, les volumes spécifiques de la vapeur sous différentes pressions.

d'ordinaire par ρ la quantité $A\Delta U$, et les parties constitutives de λ sont celles indiquées par l'accolade ci-dessous :



ρ s'appelle simplement la chaleur latente interne, $Ap(u'-u)$ est la chaleur latente externe; leur somme forme la chaleur de vaporisation r, quantité à laquelle on donnait autrefois le nom de chaleur latente. Il faut bien remarquer que r, même pour une température donnée, est essentiellement variable avec la nature de la transformation opérée ; les valeurs de r dont nous ferons usage sont les quantités de chaleur cédées pour effectuer la vaporisation du liquide sous la pression constante de sa vapeur, à $t°$.

D'après Regnault, la chaleur du liquide est exprimée par :

$$q = at + bt^2 + ct^3$$

Les coefficients a, b, c sont donnés ci-dessous pour quelques liquides (1) :

NATURE DU CORPS	a	b	c
Eau	1.00000	0.00002	0.0000003
Ether.	0.52901	0.0002959	»
Chloroforme.	0.23235	0.0000507	»
Chlorure de carbone	0.19798	0.0000906	»
Sulfure de carbone.	0.23523	0.0000815	»

La formule qui donne la chaleur de vaporisation r est :

$$r = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

Les constantes A, B, C, D, sont contenues dans le tableau suivant :

1. Pour l'acide sulfureux et l'ammoniaque, voir n° 66.



NATURE DU CORPS	A	B	C	D
Eau	606.5	— 0.695	— 0.00002	— 0.0000003
Ether.	94	— 0.07901	— 0.0008514	»
Chloroforme.	67	— 0.09485	— 0.0000507	»
Chlorure de carbone . .	52	— 0.05173	— 0.0002626	»
Sulfure de carbone. . .	90	— 0.08922	— 0.0004938	»

Quant à la chaleur totale λ, elle s'obtient en additionnant les expressions de q et de r.

Pour la vapeur d'eau, les formules sont :

$$q = t + 0.00002\,t^2 + 0.0000003\,t^3 \tag{23}$$

$$r\,[1] = 606.5 - 0.695\,t - 0.00002\,t^2 - 0.0000003\,t^3 \tag{24}$$

$$\lambda = 606.5 + 0.305\,t \tag{25}$$

47. — *Volume de la vapeur.* — La vaporisation du liquide, dans les conditions que nous avons indiquées, est une transformation isothermique réversible ; l'équation de Clapeyron lui est applicable, et si l'on remarque que la chaleur fournie est précisément r, on aura (éq. 20) :

$$r = \mathrm{AT} \int_u^{u'} \frac{dp}{d\mathrm{T}}\, dv$$

$\frac{dp}{d\mathrm{T}}$ est ici une fonction connue de T, indépendante de v; elle s'obtient au moyen de la relation :

$$p = \varphi\,(t)$$

ce qui permet d'effectuer l'intégration :

$$r = \mathrm{AT}\,\frac{dp}{d\mathrm{T}}\,(u' - u) \tag{26}$$

On peut donc, au moyen de la constante r, et de la loi $p = \varphi\,(t)$, trouver le volume u' de la vapeur, et en déduire son poids spécifique pour toutes les valeurs de la température, et par conséquent de la pression. (Voir les *Tables*, à la fin du volume).

Les valeurs obtenues pour la vapeur d'eau par cette méthode s'accor-

1. On emploie quelquefois l'expression simplifiée: $r = 607 - 0{,}708\,t$, due à Clausius.

dent, d'une manière remarquable, avec celles qui ont été déterminées expérimentalement par Fairbairn, Unwin et Tate, entre 58° et 145° [1].

Les tables relatives aux constantes des vapeurs renferment donc à la fois des données d'expériences : p, q, r, et des quantités qui s'en déduisent : u', $Ap(u'-u)$, γ [2]. On peut aussi déduire, de l'équation (26), la valeur de la chaleur latente interne ρ ; M. Zeuner a donné, pour exprimer cette chaleur, une formule empirique d'un emploi commode :

$$\rho = 575.40 - 0.791\, t$$

Regnault a, du reste, déterminé la loi $p = \varphi(t)$ pour un grand nombre de corps, et lui a donné la forme :

$$\log p = a + b\,\alpha^{\tau} + c\,\beta^{\tau}$$

a, b, c, α, β, sont des quantités à déterminer pour chaque corps, τ est la température, comptée à partir d'un repère fixe. On a proposé un très grand nombre de formules pour représenter la loi ci-dessus [3] ; lorsqu'il s'agit des vapeurs connues, les données des tables de M. Zeuner,

1. Jamin. — Ouvrage cité t. II, p. 218.

2. L'ouvrage de M. Zeuner renferme des tables complètes relatives à la vapeur d'eau saturée d'alcool, d'acétone, de chloroforme, de chlorure et de sulfure de carbone, de mercure, et d'acide carbonique. (Voir surtout la 3e édition).

La table qui accompagne la *Thermodynamique* de M. Madamet, et qui se trouve reproduite à la fin de ce volume, renferme toutes les données essentielles de la vapeur d'eau et s'étend aux fractions de degrés ; elle est extraite de tables plus complètes calculées par M. de Montchoisy, Ingénieur de la Marine.

Les tables calculées par M. Deruyts, Liège, Vaillant-Carmanne, 1891, s'étendent jusqu'à 230°, environ 28 atmosphères ; elles renferment les constantes en fonction de la pression comme donnée. Les mêmes tables sont annexées à l'étude calorimétrique de la machine à vapeur de M. Dwelshauvers-Dery, Encyclopédie Léauté.

Les tables de M. Zeuner ont été étendues par M. Pinzger jusqu'à 232°,95 (près de 30 atmosphères) V. Busley. *Die Schiffsmaschine*, 3e édit., t. II, p. 28.

Les tables calculées par M. Fliegner, un peu différentes des précédentes, sont aussi très complètes. V. Hrabak (Hilfsbuch), Berlin, Springer, p. 150.

Enfin nous citerons encore la table des propriétés de la vapeur d'eau saturée publiée dans les *Leçons sur les Machines à vapeur* de J. Hirsch et A. Debize, table accompagnée de tracés graphiques permettant de résoudre, avec une grande approximation, les problèmes qui se présentent dans l'emploi de la vapeur. Dans le même ordre d'idées, on peut encore recourir aux abaques de M. Herrmann.

3. Zeuner, p. 241. Les vapeurs dont Regnault a déterminé la tension sont, outre celles qui figurent dans les tables de Zeuner : l'ammoniaque, l'acide sulfureux, le soufre, les chlorures de bore, de silicium, de cyanogène, de phosphore, les éthers chlorhydrique et iodhydrique, le protoxyde d'azote, l'esprit de bois, l'hydrocarbure de brome, l'éther bromhydrique, la benzine, l'hydrogène sulfuré, l'essence de térébenthine.

M. Bertrand (ouvrage cité p. 154), a établi théoriquement la relation entre p et t, en supposant que les caloriques spécifiques de la vapeur ne dépendent, *a priori*, que de la température.

qui renferment t, p et $\frac{dp}{dt}$, répondent aux besoins des applications ordinaires.

48. — *Diagramme entropique relatif aux vapeurs.* — Lorsqu'on prend 1 kilogramme du liquide à une certaine température initiale, la fonction S possède une valeur S_0 que nous pouvons supposer nulle, puisque les accroissements de cette fonction à partir de S_0 figurent seuls dans les formules. Nous prendrons comme température d'origine le zéro centigrade, pour lequel

$$T = 273^\circ$$

I sera donc le point de départ de la ligne de transformation du corps (fig. 24).

Pendant l'échauffement du liquide, on a :

$$dQ = l dT$$

$$S = \int \frac{dQ}{T} = \int l \frac{dT}{T}$$

Si l était constant, la transformée entropique cherchée aurait la même équation que celle des gaz permanents lorsqu'on les échauffe à volume constant (21), ou à pression constante (22); il en est en réalité à peu près ainsi, car, dans l'expression qui donne la chaleur du liquide (n° 46), q dépend surtout de at, qui a une valeur beaucoup plus grande que les termes bt^2 et ct^3, principalement pour l'eau. Quoiqu'il en soit, l'entropie du liquide pourra être déterminée exactement pour chaque température, et fournira la ligne IA_1 du diagramme. La quantité de chaleur nécessaire pour atteindre la température T_1 est figurée par la surface $O\,I\,A_1\,a_1$; l'axe des températures nulles n'est pas représenté sur la figure.

Supposons que la vaporisation commence au point A_1, pour lequel la température a atteint la valeur T_1, correspondante à la pression de la vapeur saturée de ce liquide ; la réduction en vapeur s'opère à température constante, et la chaleur fournie pour la vaporisation complète étant r_1, l'entropie augmente, pendant cette transformation, de :

$$\frac{r_1}{T_1}$$

Portons cette valeur en $A_1\,B_1$.

Lorsque la vaporisation est incomplète, et que la portion x_1 seulement du liquide est transformée en vapeur, la chaleur à fournir est exprimée par $x_1 r_1$, et l'accroissement d'entropie depuis A_1 est :

$$x_1 \frac{r_1}{T_1}$$

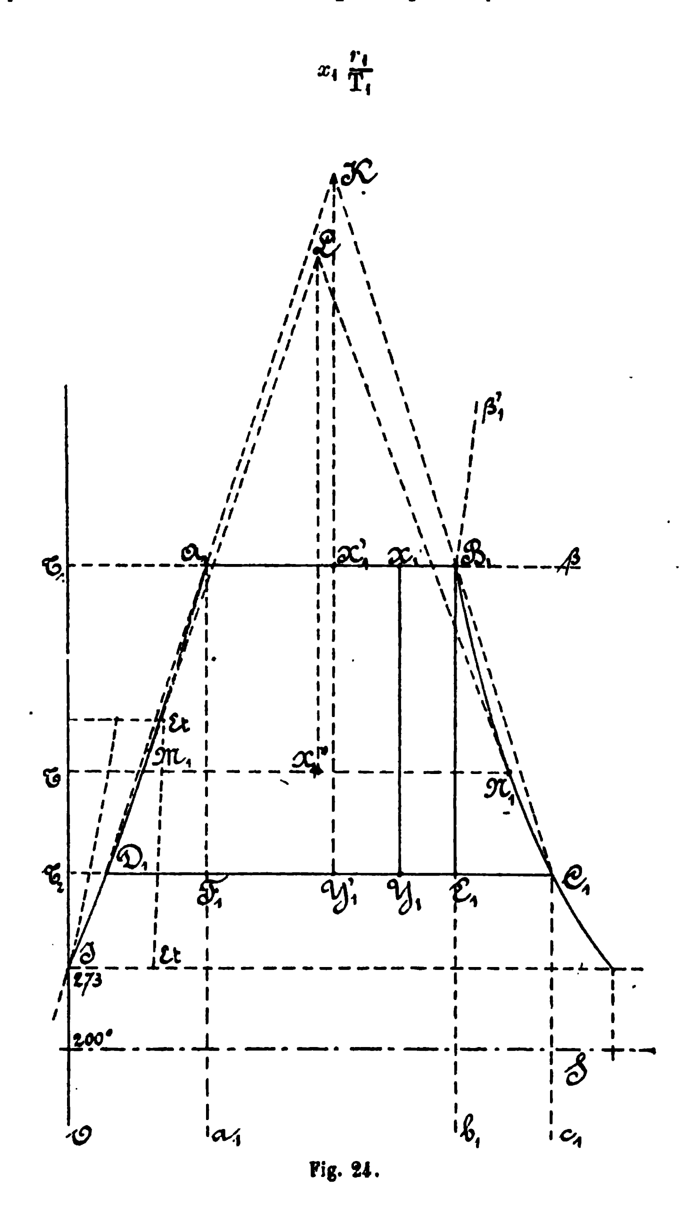


Fig. 24.

Soit X_1 le point qui correspond à cet état du corps partiellemement vaporisé, on voit qu'on aura :

$$\frac{A_1 X_1}{A_1 B_1} = x_1$$

La fraction x_1 est le titre, en vapeur, du mélange qui se transforme ; le titre est représenté dans le diagramme de l'entropie, par le rapport des deux segments de la ligne $A_1 B_1$ [1].

Pour chaque température, il existe une ligne de transformation analogue à $A_1 B_1$; ainsi, la vaporisation aurait pu commencer au point D_1, correspondant à la température T_2, l'entropie aurait augmenté de la quantité $D_1 C_1$ égale à

$$\frac{r_2}{T_2}$$

On peut construire l'entropie de la vapeur saturée pour chaque valeur de T, les points qui la représentent sont sur une ligne continue $B_1 C_1$, que l'on trace avec la plus grande facilité lorsque l'on possède, pour le fluide considéré, une table des valeurs de r, et de l'entropie du liquide ; celle-ci peut être calculée lorsque l'on connait q en fonction de t.

On voit qu'en général, la ligne $B_1 C_1$ n'étant pas parallèle à l'axe à partir duquel on compte l'entropie, il faut, pour que le titre de la vapeur soit égal à l'unité pendant la détente $B_1 C_1$, fournir la quantité de chaleur $b_1 B_1 C_1 c_1$; cette quantité pourrait être négative pour certains corps, dans lesquels la courbe $B_1 C_1$ se rapproche de l'axe des températures ; tel est par exemple l'éther, dont la courbe E t est représentée en trait pointillé dans la figure.

Si on suppose qu'à partir du point B_1, la détente s'opère *adiabatiquement*, la ligne de transformation $B_1 E_1$ est parallèle à l'axe des températures. Le titre de la vapeur, égal à l'unité au début de la détente, varie à chaque instant, et lorsque la température est T_2, il est exprimé, en vertu de la remarque faite précédemment, par

$$x_2 = \frac{D_1 E_1}{D_1 C_1}$$

1. Si l'on continuait a fournir de la chaleur à la vapeur d'eau saturée sèche en maintenant sa température constante, on augmenterait son entropie jusqu'au point β ; si, au contraire, la chaleur est communiquée à pression constante, le point qui exprime l'état du corps se déplace sur la courbe $B_1\beta'_1$.



Mais la condensation partielle qui accompagne la détente ne se produit pas pour les corps analogues à l'éther.

Le diagramme de la figure 24 est celui de la vapeur d'eau, toute la région située à droite de $B_1 C_1$ correspond à la surchauffe.

Pour tous les corps qui se comportent comme l'eau, il faut fournir de la chaleur pour maintenir la saturation pendant la détente ; la détente adiabatique de la vapeur sèche produit une condensation partielle.

Pour les corps qui se comportent comme l'éther, il faut enlever de la chaleur pour maintenir la saturation pendant la détente; la détente adiabatique de la vapeur sèche produit la surchauffe.

Il est évident que, puisque les opérations sont réversibles, la compression de la vapeur saturée sèche produit la surchauffe ; l'inverse a lieu pour la détente.

Ces propriétés ont été vérifiées expérimentalement par Hirn.

49. — *Variation du titre dans la détente adiabatique.* — Supposons que l'on étudie la transformation du mélange dont le titre initial est x_1, la température étant T_1; après la détente $X_1 Y_1$, le titre sera x_2 et la température T_2. Les entropies des points $X_1 Y_1$ étant les mêmes, on aura :

$$\int_o^{T_1} \frac{dq}{T} + x_1 \frac{r_1}{T_1} = \int_o^{T_2} \frac{dq}{T} + x_2 \frac{r_2}{T_2}$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par s l'entropie de l'eau, en l'affectant de l'indice qui correspond à la température, nous obtenons :

$$x_2 \frac{r_2}{T_2} + s_2 = x_1 \frac{r_1}{T_1} + s_1 \tag{27}$$

équation qui permet de trouver le titre final x_2 correspondant à la température T_2 lorsque l'on connaît le titre initial x_1 pour la température T_1.

La solution graphique de la question est immédiatement fournie par le diagramme entropique, car il suffit de chercher le point X_1 satisfaisant à la condition :

$$\frac{A_1 X_1}{A_1 B_1} = x_1$$



et de mener la ligne $X_1 Y_1$ parallèlement à l'axe des températures ; on détermine ainsi le point Y_1 ; or, on a :

$$x_2 = \frac{D_1 Y_1}{D_1 C_1}$$

On peut, de la même manière, obtenir les valeurs variables du titre pour chaque température.

Lorsque le titre initial est nul (point A_1) le titre final prend la valeur :

$$\frac{D_1 F_1}{D_1 C_1}$$

c'est-à-dire que le liquide se vaporise partiellement pendant la détente, ce que nous apprend aussi l'équation (27), car :

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} = s_1 - s_2$$

50. — L'inclinaison de la ligne de transformation $B_1 C_1$ caractérise en chaque point la propriété que possède la vapeur sèche de se condenser ou de se surchauffer par la détente adiabatique ; son inclinaison sur l'axe des S est donnée par :

$$\frac{dT}{dS}$$

Or, on a :

$$\frac{dS}{dT} = \frac{\frac{dq}{T}}{dT} + \frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dT}$$

Pour la vapeur d'eau, on a très approximativement, entre les limites auxquelles s'étendent les expériences :

$$\frac{dq}{T\,dT} = \frac{1}{T}$$

$$r = 800.284 - 0.708\ T \quad \text{(Formule de Clausius.)}$$

$$\frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dT} = -\frac{800\ 284}{T^2}$$

d'où :

$$\frac{dS}{dT} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{800.284}{T}\right)$$

quantité négative pour toute valeur T, de la température absolue, inférieure à 800° environ; l'équation ne s'appliquerait du reste pas jusqu'à une température aussi élevée.

Pour la vapeur d'éther, on a, en introduisant les températures absolues dans les valeurs de q et r spéciales à ce corps :

$$q = -122.34687 + 0.36745\,T + 0.0002959\,T^2$$
$$r = 52.11574 + 0.38585\,T - 0.0008514\,T^2$$
$$\frac{dS}{dT} = \frac{0.36745}{T} - \frac{52.11574}{T^2} - 0.0002596$$

Entre les limites des températures absolues 273 et 393 ($t = 0°$ et $120°$) la valeur de $\frac{dS}{dT}$ est positive, par conséquent la vapeur d'éther saturée et sèche se condense par la compression. Les lignes de transformation de ce corps sont représentées en pointillé dans la figure 24; la courbe correspondant à la saturation est Et, elle s'écarte de l'axe des températures lorsque T augmente.

51. — Pour les vapeurs qui se comportent comme celle de l'eau, si l'on suppose que x_1 diminue depuis 1 jusqu'à zéro, x_2 diminue d'une manière continue entre deux valeurs fractionnaires, puisque Y_1 se meut entre les points E_1 F_1; il existe donc une valeur x' du titre x_1 telle que le titre final possède la même valeur. Pour l'obtenir, il suffit de prolonger D_1 A_1, C_1 B_1 jusqu'à leur point de rencontre en K, et de mener K X'_1 Y'_1 parallèlement à l'axe des températures. On peut aussi, dans l'équation (27), faire $x_1 = x_2 = x'$, et l'on en tire :

$$x' = \frac{s_1 - s_2}{\frac{r_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1}}$$

La valeur x' de ce titre particulier dépend évidemment des valeurs attribuées à T_1 et T_2.

52. — Prenons une température quelconque, T, et menons les tangentes $M_1 L$, $N_1 L$, aux deux courbes représentant les entropies du liquide et de la vapeur; ces tangentes se coupent au point L; menons la ligne LX''_1 parallèle à l'axe des températures ; si le titre réalisé, x'', est :

$$x'' = \frac{M_1 X''_1}{M_1 N_1}$$



il sera constant à la température considérée. M. Pochet a donné à cette valeur particulière du titre, le nom de point d'équilibre [1] ; il l'a déterminé par le calcul.

L'inclinaison de la tangente M_1L sur la direction M_1N_1 est donnée par :

$$\frac{dT}{ds}$$

de même, la tangente de l'angle M_1N_1L est

$$-\frac{dT}{dS}$$

Or, en exprimant que LX_1'' est commun aux deux triangles rectangles adossés par l'un des côtés de l'angle droit, on trouve :

$$x'' = \frac{\frac{dT}{dS}}{\frac{dT}{dS} - \frac{dT}{ds}} = -\frac{1}{T}\frac{dq}{d\left(\frac{r}{T}\right)}$$

Il est facile de trouver la valeur de x'' pour l'eau, surtout en faisant usage de l'expression approchée de r donnée au n° 50, qui renferme T au premier degré.

Lorsque, pour une température T donnée, le titre est inférieur à x'', il augmente par la détente adiabatique dans les liquides qui se comportent comme l'eau ; lorsqu'il est supérieur à x'', il diminue par la détente.

53. — *Etat limite.* — Pour les vapeurs du même genre que la vapeur d'eau, les courbes D_1A_1, C_1B_1 se rapprochent lorsque la température s'élève ; si les constantes de la vapeur pouvaient s'appliquer beaucoup au-delà des limites pour lesquelles elles ont été vérifiées, on pourrait trouver le point d'intersection des deux courbes ; il correspondrait à $r = o$; pour la vapeur d'eau, on trouverait, au moyen de la formule de Regnault, que la température centigrade correspondante est un peu supérieure à 700° ; on sait que *Cagniard-Latour*, à la température de fusion du zinc (450° C. environ) a trouvé que le volume de la vapeur d'eau n'était plus que de quatre fois celui du liquide ; en se rapprochant de l'état limite, le volume de la vapeur tend vers celui du liquide ; la

1. Léon Pochet. — *Nouvelle mécanique industrielle,* Paris, Dunod, 1874.



pression, dans l'expérience de Cagniard-Latour, n'a pas été déterminée, elle était évidemment considérable [1]. M. *Macfarlane Gray* a trouvé, par des considérations théoriques, que la température critique de la vapeur d'eau est de 450° C. et qu'elle correspond à la pression de 416 atmosphères.

54. — *Variation du titre dans une transformation quelconque.* — La détente adiabatique est un cas particulier intéressant à étudier, mais elle suppose des conditions qui ne se réalisent jamais; le plus souvent, de la chaleur est transmise par la paroi, et cette transmission est beaucoup plus active pour les vapeurs saturées que pour les gaz ou les vapeurs surchauffées.

Lorsque de la chaleur est transmise au mélange qui se détend, l'entropie ne reste plus constante : la transformée entropique X_1Y_1 (fig. 25), dépend de la chaleur fournie ou enlevée; pour chaque élément MN correspondant au changement dT de température, la chaleur fournie est représentée par la surface MNnm, on a :

$$\frac{dQ}{T} = PN$$

PN représente l'accroissement de l'entropie du mélange dans le passage de l'état M à l'état N, on a donc :

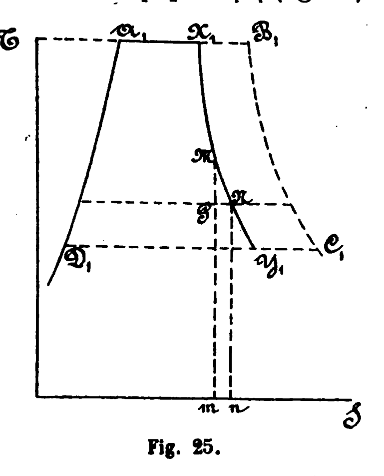


Fig. 25.

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dq}{T} + d\left(\frac{rx}{T}\right)$$

quantité qui était nulle dans le cas de la transformation adiabatique et et que l'on peut aussi écrire, en intégrant:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = s_2 - s_1 + \frac{r_2 x_2}{T_2} - \frac{r_1 x_1}{T_1}$$

1. On ne peut appliquer, à ces hautes températures, la loi $p = \varphi(t)$, vu l'impossibilité d'établir son exactitude; la formule de Roche, par exemple, avec les coefficients de Regnault, donnerait pour l'état limite une pression d'environ 2.000 atmosphères.

ou:

$$\frac{r_2 x_2}{T_2} = s_1 - s_2 + \frac{r_1 x_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} \tag{28}$$

Le titre final, x_2, peut s'obtenir dans tous les cas où l'on connait la chaleur fournie dQ en fonction de T; il ne suffit pas, en effet, de donner la chaleur fournie pendant l'opération, car le travail extérieur accompli par le corps resterait indéterminé, et par conséquent la chaleur interne du mélange final, d'où dépend essentiellement x_2.

55. — Le cas le plus simple à examiner est celui où la chaleur fournie, dQ, pour un changement de température dT, est proportionnelle à ce changement lui-même, hypothèse déjà étudiée pour les gaz permanents (n° 23).

Supposons, par exemple, que la détente s'effectue en présence d'une plaque métallique, et soit assez lente pour que l'équilibre de température ait lieu à chaque instant entre la plaque et le mélange; supposons, du reste, que les parois soient imperméables à la chaleur.

Soient M le poids de la plaque par kilogramme de fluide, C_1 son calorique spécifique, on devra poser :

$$dQ = -MC_1\, dT$$

attendu que la température s'abaisse pendant la détente, et l'on aura :

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = MC_1\, l_n \frac{T_1}{T_2}$$

Dans ce cas, la transformée entropique de la ligne de détente sera une courbe du même genre que la ligne D_1A_1, tout au moins pour la vapeur d'eau; on sait, en effet, que le calorique spécifique du liquide est très peu différent de l'unité et sensiblement constant.

Exemple numérique. — Supposons que le mélange pèse 0 k.,063; la température $t_1 = 165°,4$ (7 atm. abs.); $x_1 = 0,735$.

La détente a lieu en présence d'une pellicule de fonte de $0^{m^2},40$ de surface, et d'un quart de millimètre d'épaisseur. On demande la proportion du mélange lorsque la température centigrade sera réduite à 80° (environ 0,5 atm. abs.).

Le poids de la pellicule est de 0 k., 72, mais ce poids rapporté au kilogramme du mélange est :

$$M = \frac{0.72}{0.063} = 11.4$$

on a :

$$C_1 = 0.1298 \text{ (Regnault)}$$
$$T_1 = 438.4$$
$$T_2 = 353$$

On trouve, après calculs :

$$x_2 = 0.876$$

Si, au contraire, la détente s'était opérée sans gain de chaleur, on eût trouvé :

$$x_2 = 0.67$$

La chaleur interne du mélange, dans le cas d'une détente adiabatique, diminue d'une quantité correspondante au travail extérieur produit.

Pour 1 kilogramme de mélange, cette diminution est :

$$q_1 - q_2 + x_1 \rho_1 - x_2 \rho_2$$

Pour les données numériques ci-dessus, et en tenant compte de ce que le poids est de 0 k., 063, la diminution est de 4.453 calories, transformées en travail pendant l'opération.

La présence de la pellicule de fonte augmente au contraire la chaleur interne du mélange de :

$$0.063\,(q_2 + 0.876\,\rho_2 - q_1 - 0.735\,\rho_1) = 2.28 \text{ calories.}$$

Le corps étranger fournit, au total, une quantité de chaleur :

$$0^k.720 \times 0.1298\,(t_1 - t_2) = 7.98 \text{ calories.}$$

Il en résulte que la chaleur transformée en travail est, dans la détente avec addition de chaleur :

$$7.98 - 2.28 = 5.70 \text{ calories.}$$

Le travail développé est plus grand de 30 % environ que pour la détente adiabatique, mais la chaleur qui se perd au réfrigérant à la fin de l'opération est également plus grande.

56. — ***Transformation d'un gaz permanent saturé de vapeur d'eau.*** — Ce problème se présente dans les compresseurs d'air, principalement lorsqu'on cherche à réduire l'élévation de température par une injection d'eau au cylindre ; il pourrait se présenter aussi dans les aéro-moteurs, si on cherchait à combattre par le même moyen l'abaissement de température dû à la détente. Il est juste de dire que, pour ce dernier cas, on a recours aujourd'hui à d'autres procédés.

La formation des vapeurs dans une enceinte remplie d'un gaz permanent est soumise aux lois de *Dalton.* On sait que, lorsqu'un liquide à une certaine température est introduit dans un espace fermé rempli d'air, il émet des vapeurs dont la tension s'ajoute à celle de l'air; cette tension est celle qui correspond à la température, comme si le liquide et sa vapeur occupaient seuls tout le volume.

Nous pouvons donc supposer le mélange composé de la manière suivante :

$m\,(1 - x)$ kilogrammes de liquide à la température T.

mx kilogrammes de vapeur à la température T et à la tension correspondante p.

m' kilogrammes d'air à la température T, qui, remplissant le volume mxu' occupé par la vapeur, auraient par kilogramme, le volume :

$$\frac{mxu'}{m'}$$

Ce volume est lié à la tension p' de l'air, par l'équation fondamentale des gaz:

$$\frac{m}{m'}\,p'\,xu' = \mathrm{RT}$$

La tension totale du mélange est celle qu'il exercerait sur l'unité de surface d'un piston fermant le cylindre; elle est égale à $p + p'$.

Le mélange peut être envisagé comme un seul corps qui se détend dans le cylindre ; pendant cette opération, le titre x varie, de même que la température, et, pour simplifier le problème, on admet que la température de l'air est à chaque instant la même que celle de la vapeur, ce qui suppose une conductibilité parfaite de chacun des fluides.

Pour un changement fini de température, l'accroissement de l'entropie du mélange ne dépend que de l'état final et de l'état initial, et si l'on suppose que la transformation est adiabatique, cet accroissement est nul.

Or, pour le gaz, on a, pour le poids m' :

$$m' \frac{dQ}{T} = m' c \frac{dT}{T} + AR m' \frac{dv}{v}$$

et pour le mélange d'eau et de vapeur:

$$m \frac{dQ'}{T} = m \frac{dq}{T} + m d \left(\frac{rx}{T}\right)$$

On doit avoir:

$$m' \int \frac{dQ}{T} + m \int \frac{dQ'}{T} = o$$

ou:

$$m' c \, l_n \frac{T_2}{T_1} + AR \, m' \, l_n \frac{v_2}{v_1} + m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dq}{T} + m \left(\frac{r_2 x_2}{T_2} - \frac{r_1 x_1}{T_1}\right) = o$$

Lorsqu'il s'agit de l'eau, et dans les limites de température que comporte le problème:

$$dq = dT$$

on peut donc écrire l'équation:

$$(29) \qquad (m'c + m) \, l_n \frac{T_2}{T_1} + AR \, m' \, l_n \frac{v_2}{v_1} + m \left(\frac{r_2 x_2}{T_2} - \frac{r_1 x_1}{T_1}\right) = o$$

Tout ce qui se rapporte à l'état initial est connu, c'est-à-dire:

$$T_1, \; x_1, \text{ et } V_1$$

V_1 étant le volume total du mélange, tandis que v_1 est le volume de l'air.

On a, du reste, entre x_1 et v_1 une relation nécessaire, car v_1 est le volume occupé par le poids de vapeur mx_1.

$$v_1 = m x_1 u'_1$$
$$V_1 = v_1 + m(1 - x_1) u$$

u'_1 est le volume spécifique de la vapeur à la température T_1 ; le volume

du kilogramme de liquide est supposé constant, car sa dilatation est négligeable à côté du volume de la vapeur.

Supposons qu'on cherche à définir l'état final lorsque le volume total du mélange est V_2; les inconnues sont T_2, x_2, v_2; or, on a:

$$V_2 = v_2 + m(1 - x_2)u$$

et

$$v_2 = m'x_2 u'_2$$

On a ainsi, en y comprenant la relation (29), trois équations qui permettent de résoudre le problème par tâtonnements. On se donne par exemple la valeur de T_2, on en déduit u'_2 par les tables, et, par conséquent, v_2 est connu en fonction de x_2, que l'on calcule par l'équation (29); on vérifie si x_2 ainsi trouvé satisfait à la condition du volume V_2; ou bien on procède par interpolation; on peut ainsi tracer une courbe de détente, car la pression totale se compose de celle de la vapeur, qui se déduit de la température, et de la pression de l'air, connue par l'équation caractéristique:

$$p'_2 v_2 = m' RT_2$$

57. — L'équation 29 s'applique aussi bien à la détente qu'à la compression; elle convient également au cas où il n'y aurait pas, au début, de liquide en excès, et où l'air serait saturé ($x_1 = 1$); mais dans ce dernier cas, les résultats ne peuvent être acceptés que si $x_2 < 1$, sinon, c'est que la vapeur serait surchauffée à la fin de l'opération, et la question devrait être résolue autrement.

Quel que soit le sens du phénomène pendant la compression adiabatique, il est évident que si, après l'opération, le mélange est ramené à la température initiale par une soustraction de chaleur à pression constante, il y aura forcément condensation d'une partie du liquide, car la quantité de vapeur nécessaire pour saturer l'espace réduit par la compression sera évidemment inférieure à la quantité qui saturait le volume initial à la même température. Cette condensation se produit même lorsque la tension de la vapeur est inférieure à celle de la saturation; la vapeur est alors surchauffée, et, pour les basses températures, on peut la considérer comme un gaz permanent, auquel on applique l'équation fondamentale :

$$pv = R'T$$

La valeur R' se tire de celle de l'air, car :

$$\frac{R'}{R} = \frac{\alpha p_0 v'_0}{\alpha p_0 v_0}$$

$$R' = R \frac{v'_0}{v_0}$$

$\frac{v_0}{v'_0}$ est la densité de la vapeur par rapport à l'air, rapport qui se déduit de la composition chimique de l'eau, et qui vaut 0,622; on a pour l'air (nº 11) :

$$R = 29,272$$

On aura donc :

$$R' = 47,061$$

La compression s'applique, dans ce cas, à un mélange de deux gaz permanents, et le problème ne présente pas de difficultés [1]; mais le raisonnement ne convient que jusqu'au moment où l'air est saturé.

Dans la compression ou la détente de l'air, un autre cas limite peut se présenter : c'est celui où la masse de l'eau est considérable par rapport à celle de l'air; si on néglige la vapeur d'eau qui sature l'espace occupé par l'air, on retrouve la formule (17) du nº 23, en remarquant que l'on a ici, en employant les mêmes notations :

$$M = \frac{m}{m'}$$

$$C_1 = 1$$

La marche des compresseurs est assez rapide pour que la vapeur n'intervienne sans doute que faiblement dans le phénomène de l'échange; cette intervention est cependant du même ordre que celle du liquide. Souvent, l'injection d'eau se continue pendant la compression, et le volume de l'air varie en conséquence; le problème est donc alors fort compliqué.

1. M. Ledoux (*Théorie des Machines à froid*, *Annales des Mines*, 1878, t. XIV), a résolu plusieurs problèmes de ce genre, V. p. 138 du mémoire.

On observe généralement que les courbes de compression et de détente suivent approximativement la loi :

$$pv^k = C^{te}.$$

k étant inférieur à γ, mais évidemment supérieur à l'unité.

58. — *Représentation de la chaleur interne,* etc. — Le diagramme

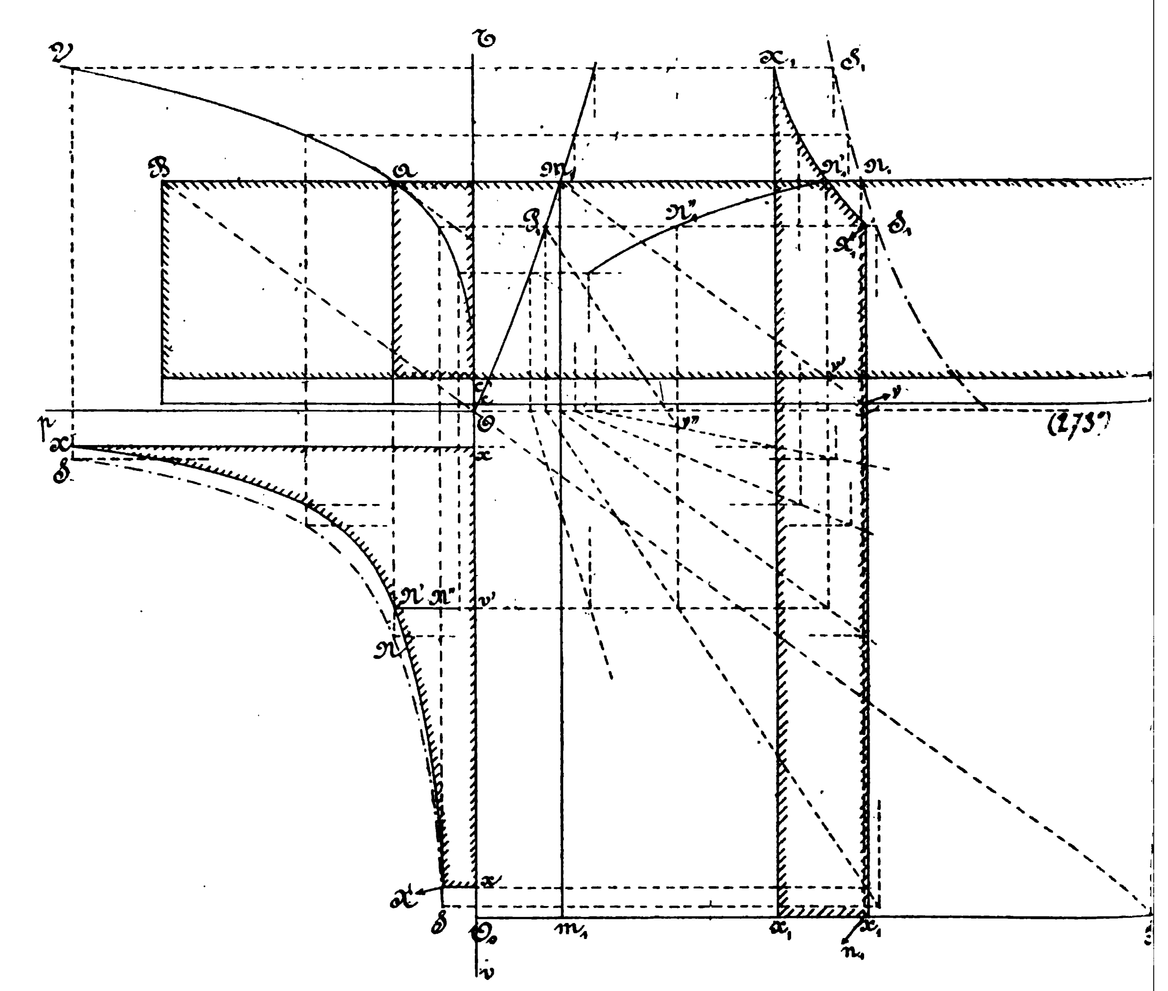


Fig. 26.

entropique donne, pour chaque température, la quantité de chaleur à fournir pour la vaporisation; elle est représentée (fig. 26) par le rectangle $M_1 n_1$, pour la température T quelconque.

Pour la vapeur d'eau, de même que pour toutes les vapeurs pour lesquelles nous avons donné r (46), cette chaleur diminue lorsque la température augmente. Ainsi, pour l'eau, on a à 100° C. :

$$r = 536.50$$

tandis qu'à 200° :

$$r = 464.30$$

En se servant de l'équation de Clapeyron (33) :

$$r = \mathrm{A\,T} \frac{dp}{d\mathrm{T}} (u' - u)$$

on voit que la longueur $M_1 N_1$, qui est égale à $\frac{r}{\mathrm{T}}$, est égale aussi à :

$$\mathrm{A} \frac{dp}{d\mathrm{T}} (u' - u)$$

Or, la loi :

$$p = \varphi (\mathrm{T})$$

est connue pour chaque vapeur; supposons qu'on l'ait tracée en OV, en portant les températures sur l'axe OT, et les pressions sur l'axe Op. Pour l'état considéré, le point de la courbe de pression est en A; menons en ce point la tangente [1], et par M_1 la parallèle $M_1 \nu$ à cette tangente jusqu'à l'intersection avec le côté $N_1 \nu$ du triangle rectangle, nous aurons :

$$N_1 \nu = M_1 N_1 \frac{1}{\mathrm{tg}\, M_1 \nu N_1}$$

ou :

$$N_1 \nu = \frac{r}{\mathrm{T}} \frac{1}{\frac{dp}{d\mathrm{T}}}$$

1. Les tables de M. Zeuner renferment les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ pour des températures très rapprochées. (Voir à la fin du volume).

d'où :

$$N_1 \nu = A (u' - u)$$

Menons par O la parallèle BB à la tangente en A, et construisons le rectangle B*b*, ayant pour hauteur A $(u' - u)$, et pour base T $\frac{dp}{dT}$, il représentera, sous une autre forme que le rectangle $M_1 n_1$ la chaleur de vaporisation *r*.

La chaleur équivalente au travail externe :

$$Ap (u' - u)$$

sera représentée par le rectangle A*c*.

Quant à la chaleur interne, ρ, ou :

$$r - Ap (u' - u)$$

elle sera exprimée par la différence des rectangles B*b*, A*c*.

Si, au lieu d'être complète, la transformation n'était que partielle, l'entropie du mélange serait représentée par l'abscisse du point N'_1. Le raisonnement serait le même que ci-dessus, mais $N'_1 \nu'$ représenterait le produit A $(u' - v) x$, etc. Les chaleurs latentes seraient figurées par les rectangles bordés de hachures.

Ce diagramme peut être utile pour résoudre quelques problèmes auxquels donne lieu la détente des vapeurs.

Ainsi, supposons que l'on cherche la ligne de transformation entropique d'un mélange de volume constant, N'_1 étant un point de cette ligne. Tout autre point devant donner le même volume du mélange, il suffit de construire le triangle rectangle $P_1 \nu'' N_1''$; N''_1 sera le point cherché. La méthode est même indépendante de l'échelle admise pour la pression ; dans l'application, on pourra condenser les constructions précédentes, par exemple en ramenant tous les points tels que M_1 à une même base, comme l'indique la partie inférieure de la figure.

59. — *Tracé de la courbe de détente.* — Dans tous les problèmes qui précèdent, nous avons étudié la transformation du corps en nous attachant à déterminer le titre en fonction de la température. Il est facile

de déduire, de la composition du mélange, le volume qu'il occupe; comme la pression, pour toutes les vapeurs saturées, est invariablement liée à la température, on tracera aisément la courbe de détente.

Ainsi, supposons que l'on cherche cette courbe dans le cas où le titre est constant et égal à l'unité : elle s'appelle alors la *courbe de saturation;* pour l'obtenir, nous savons qu'il faut fournir de la chaleur à la vapeur qui se détend, tout au moins lorsqu'elle se comporte comme la vapeur d'eau (48).

Il suffira de porter en ordonnées la pression qui correspond à chaque température, et en abscisses le volume du fluide, qui est ici la vapeur saturée sèche : ce volume est donc u'. On peut relier le volume u à la pression par une équation empirique ; celle proposée par M. Zeuner, pour la vapeur d'eau, est :

$$pu'^{1.0646} = 1.704 \tag{30}$$

p est exprimé en atmosphères, u' est le volume, en mètres cubes, du kilogramme de vapeur saturée à la pression p.

Lorsque p est exprimé en kilogrammes par centimètre carré, la formule devient :

$$pu'^{1.0646} = 1.761 \tag{31}$$

Le mode de construction de cette courbe est le même que pour l'adiabatique des gaz permanents (n° 17); on voit qu'elle est assez rapprochée

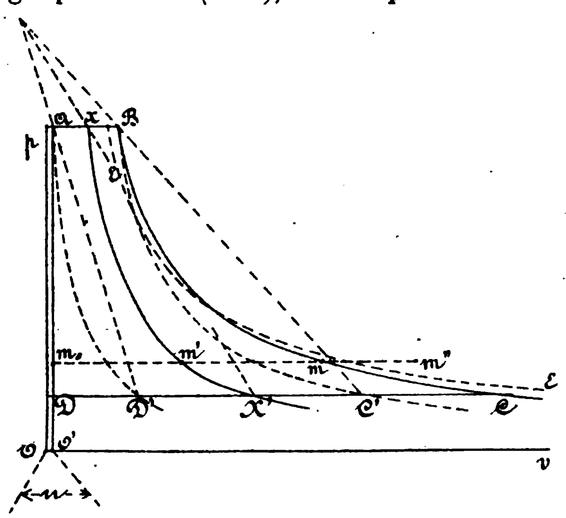


Fig. 27.

de l'hyperbole équilatère (EE, fig. 27); elle descend en dessous de celle-ci lorsqu'il y a augmentation de volume, et présente au contraire des ordonnées plus grandes lorsque la tranformation est une compression.

Lorsque le titre est inférieur à l'unité, le volume du mélange est :

$$(1 - x) u + xu' = u + (u' - u) x$$

Le point figuratif, au lieu de se trouver en m sur la courbe BC, se trouve en m' [1]. Si nous portons en abscisse le volume u du liquide (très exagéré sur la figure), nous aurons :

$$m_0 m' = (u' - u) x$$

tandis que :

$$m_0 m = (u' - u)$$

Le titre est donc accusé par le rapport :

$$\frac{m_0 m'}{m_0 m}$$

En rapprochant la figure 27 du diagramme entropique de la vapeur d'eau (fig. 28), où la ligne M_0 M correspond à la pression considérée, et où le point M' se rapporte à la vapeur au titre x, on voit que les segments m_0 m', $m'm$ sont dans le même rapport que $M_0 M'$, $M' M$; par conséquent, on pourra déduire les deux diagrammes l'un de l'autre. Le tracé des adiabatiques se fait très aisément sur le diagramme entropique : il suffit donc de rapporter les points tels que M' sur le diagramme des pressions.

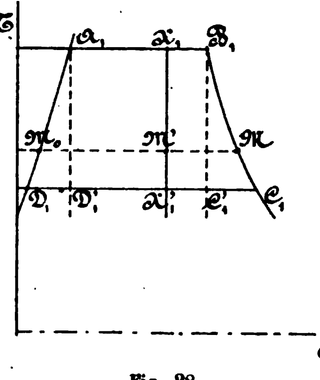


Fig. 28.

M. Zeuner a trouvé que les courbes adiabatiques de la vapeur d'eau répondent, avec une exactitude suffisante, à la formule :

$$pv^{\mu} = C^{te} \qquad (32)$$

1. Si, au contraire, la vapeur était surchauffée, le point figuratif serait en m'', et correspondrait à un volume plus grand que celui de la vapeur saturée.

avec :

$$\mu = 1.035 + 0.100\, x$$

qui, pour la vapeur sèche, devient :

$$\mu = 1.135$$

La ligne adiabatique tombe évidemment en dessous de la courbe de saturation ; BC' et AD' sont les adiabatiques qui correspondent aux valeurs 1 et 0 du titre initial.

Les propriétés déjà indiquées au n° 52 se traduisent, sur le diagramme des pressions, d'une manière très simple, que nous laissons au lecteur le soin de trouver. Nous y ajouterons un procédé pour la construction de l'adiabatique (1) correspondant à un titre initial donné quelconque.

Soit $X_1 X'_1$ la transformée entropique de l'adiabatique considérée ; on a l'identité :

$$\frac{D'_1 X'_1}{X'_1 C'_1} = \frac{A_1 X_1}{X_1 B_1}$$

Le point figuratif X s'obtiendra donc, sur le diagramme des pressions, au moyen de la proportion :

$$\frac{D'X'}{X'C'} = \frac{AX}{XB}$$

c'est-à-dire en joignant le point d'intersection des lignes droites D'A, C'B, au point X, et en prolongeant cette ligne jusqu'en X'. La même construction, s'appliquant à une température intermédiaire quelconque, permet de trouver autant de points que l'on veut de la ligne cherchée.

60. — Les relations indiquées au n° 58 permettent de construire la courbe de détente correspondant à une transformation quelconque, car, si l'on choisit convenablement l'échelle, la quantité $A(u' - u)\, x$, figurée par les longueurs telles que $N'_1\, \nu'$, (fig. 26), représente l'excès du volume de la vapeur sur le volume u du liquide au titre zéro ; par conséquent, il suffit, pour obtenir la pression et le volume de la vapeur, par

1. M. Cotterill a indiqué cette construction, qu'il appuie sur une remarque faite par M. Zeuner ; nous y arrivons par une voie différente.

rapport aux axes Op, Ov, de prendre $Ov' = N', v'$; on obtiendra ainsi le point N'. On peut condenser les opérations indiquées, et réaliser un mode de tracé plus élégant, sur lequel il n'est pas nécessaire d'insister. On devra du reste, pour obtenir la courbe de détente, tenir compte du volume u du liquide, ce que l'on fera, eu égard à l'échelle, en relevant l'axe Op d'une quantité égale à $\frac{u}{E}$; ce second axe n'est pas indiqué sur la figure; il est situé très près de Op; cette dernière ligne, dans la figure 26, est identique à O'A de la figure 27.

A la transformation $X_1 X_{11}$, correspond la courbe de détente XX; les surfaces ombrées représentent respectivement, aux échelles de la figure, la quantité de chaleur transformée en travail pendant la transformation, et la chaleur fournie, qui est positive pour la courbe X_1X_1 de la figure.

On sait que la chaleur fournie est égale à celle qui correspond au travail effectué, augmentée de l'accroissement de la chaleur interne; en d'autres termes, on a :

$$Q = \frac{L}{E} + \frac{\Delta U}{E}$$

ou :

$$\frac{\Delta U}{E} = Q - \frac{L}{E}$$

Nous avons trouvé au n° 58 que la chaleur interne peut se représenter par la différence des rectangles tels que Bb' et Ac'; il existe donc, entre l'accroissement de cette différence (accroissement de la chaleur interne), la chaleur fournie Q, et la chaleur disparue sous forme de travail $\frac{L}{E}$, la relation indiquée par la dernière équation.

§ VIII.

Vapeurs surchauffées.

61. — Lorsqu'un liquide a été entièrement réduit en vapeur saturée et sèche, si on continue à lui fournir de la chaleur, soit en maintenant la pression constante, ou en conservant le volume constant, ou en

suivant tout autre mode qui amène l'état figuratif dans la concavité de la courbe de saturation, la vapeur est surchauffée. Pour la vapeur d'eau et les autres vapeurs du même genre, on peut obtenir la surchauffe par une compression adiabatique, l'inverse a lieu pour l'éther.

Puisque tous les gaz peuvent être liquéfiés, les vapeurs surchauffées ne sont que des gaz plus faciles à liquéfier que ceux réputés autrefois permanents, et elles se rapprochent d'autant plus des lois admises pour les gaz qu'elles sont plus surchauffées, c'est-à-dire que, pour une pression donnée, la température est plus élevée, ou que, pour une température déterminée, la pression est inférieure à celle de la vapeur saturée qui correspondrait à cette température.

Dans le voisinage de l'état de saturation (ce qui est presque toujours le cas des applications industrielles), les lois de la vapeur surchauffée sont loin d'être connues avec autant de certitude que celles de la vapeur saturée.

62. — *Vapeur d'eau surchauffée* (1). — On admet généralement, en s'appuyant sur les expériences de Regnault, que la chaleur spécifique à *pression constante* de la vapeur surchauffée est constante, et a pour valeur :

$$C = 0{,}4805$$

En se basant sur un petit nombre d'expériences faites par Hirn, entre des pressions de 1 et 5 atmosphères, et des températures de 118° à 205° centigrades, M. Zeuner établit, par une voie assez compliquée, que la forme d'équation générale qui, pour la vapeur surchauffée, remplace la relation fondamentale des gaz, est :

$$pv = BT - Cp^n \qquad (33)$$

Les quantités B, C et n sont des valeurs numériques constantes, p est la pression en kilogrammes par mètre carré, v le volume de l'unité de poids de la vapeur surchauffée à T°.

(1). M. E. Haerens, (*Annales des Ingénieurs de Gand*, 1886, premier mémoire), en se basant sur les expériences de Hirn, a donné pour la vapeur d'eau surchauffée des formules nouvelles ; elles conduisent à une valeur de C variable avec la température, mais qui reste notablement en dessous du chiffre constant donné par Regnault. Il serait à désirer que de nouvelles expériences fussent entreprises pour mesurer la chaleur spécifique à pression constante de la vapeur surchauffée.



Si la vapeur surchauffée se comportait comme un gaz permanent, on aurait simplement :

$$pv = \mathrm{R\,T}$$

avec R = 47.061 (n° 57).

Admettons, comme données expérimentales, que, dans l'équation (33), on ait :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} = n$$

et :

$$n = \frac{1}{4}, \qquad \text{donc : } \mathrm{B} = \frac{\mathrm{C}}{4\,\mathrm{A}}$$

et cherchons à déduire, de l'équation (33) et des relations admises, une formule de transformation du corps qui y obéit.

La transformation élémentaire quelconque peut être obtenue par une compression isothermique [1] suivie d'une élévation de température à pression constante; en employant l'équation de Clapeyron pour la transformation isothermique, on a, pour la transformation totale

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{AT}\,\frac{dp}{d\mathrm{T}}\,\frac{dv}{dp}\,dp + \mathrm{C}\,d\mathrm{T}$$

$\frac{dp}{d\mathrm{T}}$ s'obtient, dans l'équation (33), en faisant varier la température seulement, et $\frac{dv}{dp}\,dp$ s'obtient en laissant la température constante. On trouve, en effectuant les calculs :

$$\frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{T}} = -\,\mathrm{AB}\,\frac{dp}{p} + \mathrm{C}\,\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$$

équation analogue à celle des gaz permanents.

Pour trouver la forme des lignes adiabatiques, il faut égaler dQ à zéro; en intégrant le résultat, il vient :

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$$

1. Nous ne pouvons plus appliquer ici, comme pour les gaz permanents, la loi de Joule, qui permet de trouver la chaleur fournie au moyen du travail effectué.

en remplaçant $\frac{AB}{C}$ par la valeur $n=\frac{1}{4}$, et tirant le rapport $\frac{T}{T_1}$ de l'équation (33), il vient :

$$pv^{\frac{4}{3}} = p_1 v_1^{\frac{4}{3}} \tag{34}$$

Les lignes adiabatiques ont la même forme que pour les gaz, mais l'exposant γ est remplacé par la valeur $\frac{4}{3}$.

L'énergie doit satisfaire à l'équation :

$$dQ = A dU + A p\, dv$$

et lorsque $dQ = 0$,

$$A\, dU = - A p\, dv$$

pdv étant pris dans la transformation adiabatique (éq. 34). On obtient par l'intégration :

$$AU - AU_0 = 3\, A\, p_1 v_1^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{v^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{v_0^{\frac{1}{3}}} \right)$$

ou, en tenant compte de l'équation (34) :

$$AU - AU_0 = 3\, A\, (pv - p_0 v_0)$$

que l'on peut écrire simplement :

$$AU = 3\, A pv + C^{te} \tag{35}$$

Ainsi, l'énergie est proportionnelle au produit pv, mais ce produit, qui, pour un gaz permanent, ne serait fonction que de la température, dépend ici, comme l'indique la relation (33), de la température et de la pression. La constante qui figure dans cette formule est égale, d'après M. Zeuner, à 476.11 [1] ; la formule qui indique combien 1 kilogramme de vapeur surchauffée ayant le volume v et la pression p contient de chaleur de plus qu'un kilogramme d'eau à 0°, est donc :

$$AU = 476{,}11 + 3\, A\, pv$$

1. Elle s'obtient par comparaison avec la chaleur latente interne de la vapeur saturée, car, si la formule (35) est exacte, elle doit encore s'appliquer lorsque la surchauffe est nulle.



63. — En réalité, la marche qui a été suivie est à peu près inverse de celle que nous venons d'exposer, c'est-à-dire que des considérations tirées de la forme des adiabatiques ont conduit à supposer que l'énergie intérieure est donnée par l'équation (35). S'il en est ainsi, puisque le calorique spécifique C est constant, on a, par le principe de l'équivalence, appliqué à une transformation à la pression constante p :

$$C\, dT = A\, dU + A\, p\, dv$$

ou :

$$C\, dT = 4\, A\, p\, dv$$

et, en intégrant :

$$pv = \frac{C}{4A} T + f(p) \tag{I}$$

On peut déduire de l'équation (35) la forme des lignes adiabatiques, car pour celles-ci, on a, puisque dQ est nul :

$$A\, dU + A\, p\, dv = 0$$

ou :

$$\frac{4}{3} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

ou :

$$pv^{\frac{4}{3}} = p_1 v_1^{\frac{4}{3}} \tag{II}$$

ce qui est bien l'équation (34) que nous avions trouvée en partant de la loi fondamentale (33) supposée connue, mais que nous cherchons ici à découvrir.

La loi fondamentale, c'est-à-dire la relation entre la pression, le volume et la température serait fournie par l'équation (I), si nous pouvions trouver la valeur de $f(p)$; or, déterminons cette fonction de telle manière que les lignes adiabatiques qui se déduiront de la relation (I) puissent s'identifier avec celles que représente l'équation (II).

Nous aurons, comme au numéro (62), mais en partant cette fois de l'équation (I), et pour toute transformation adiabatique :

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{T}{T_1}$$

ou, en tirant le rapport des températures de l'équation (I) elle-même :

$$\text{(III)} \qquad p^{\frac{3}{4}}v - \frac{f(p)}{p^{\frac{1}{4}}} = p_1^{\frac{3}{4}}v_1 - \frac{f(p_1)}{p_1^{\frac{1}{4}}}$$

L'équation (II) peut du reste s'écrire :

$$p^{\frac{3}{4}}v = p_1^{\frac{3}{4}}v_1$$

Pour s'identifier avec (III), elle exige que :

$$\frac{f(p)}{p^{\frac{1}{4}}} = \frac{f(p_1)}{p_1^{\frac{1}{4}}} = \mathrm{M}$$

M étant une quantité constante. L'équation (I) devient donc :

$$\text{(IV)} \qquad pv = \frac{\mathrm{C}}{4\mathrm{A}}\,\mathrm{T} + \mathrm{M}p^{\frac{1}{4}}$$

La valeur de C est connue et donne :

$$\frac{\mathrm{C}}{4\mathrm{A}} = 50{,}933$$

Pour déterminer le coefficient M, il faut remarquer que l'équation (IV), si elle est générale, doit s'appliquer lorsque la surchauffe devient nulle, c'est-à-dire lorsque l'on donne à v et T les valeurs qui conviendraient pour la vapeur saturée à la pression p ; on obtient ainsi :

$$\mathrm{M} = -\,192{,}50$$

ce qui permet enfin d'écrire l'équation (33) sous cette forme explicite, qui convient pour les applications :

$$\text{(36)} \qquad pv = 50{,}933\,\mathrm{T} - 192{,}50\,p^{\frac{1}{4}}$$

On aura, pour une transformation quelconque (n° 62) :

$$\frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{T}} = \mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} - \frac{1}{4}\,\frac{dp}{p}\right)$$

On pourrait aussi, en suivant la même marche que nous avons suivie pour les gaz permanents (transformation suivant une ligne d'égale énergie, différente ici de l'isothermique, et transformation suivant une ligne de volume constant) trouver une expression de dQ en fonction du calorique spécifique à volume constant, et, par comparaison avec la dernière équation, exprimer le rapport des deux caloriques spécifiques; ce rapport est ici fonction de l'état du corps, c'est-à-dire par exemple, de T et p ; lorsque T s'élève, on démontre qu'il tend vers la valeur constante $\frac{4}{3}$.

64. — Il est rare, dans les applications, que la vapeur d'eau soit surchauffée; nous verrons, notamment, que l'action des parois a pour effet de rendre très difficile le maintien de la surchauffe pendant que la vapeur évolue dans les cylindres des machines.

Lorsque la vapeur est surchauffée, on s'en aperçoit immédiatement, puisque son point figuratif se trouve en dehors de la courbe de saturation ; on devra alors appliquer les équations qui viennent d'être données, mais seulement jusqu'à l'intersection avec la courbe de saturation, point à partir duquel les transformations suivent les lois exposées au § VII.

Les transformations peuvent être figurées sur le diagramme entropique ; celles à pression constante, notamment, se traduiront comme pour les gaz, puisque C est constant.

65. — *Vapeurs surchauffées d'acide sulfureux et d'ammoniaque.* — L'acide sulfureux et l'ammoniaque, employés dans les machines frigorifiques aujourd'hui les plus répandues, peuvent s'y trouver à l'état de vapeurs saturées ou surchauffées, car les opérations produites dans les appareils en question se réduisent à des compressions suivies d'expansions ; il n'existe, sur ces vapeurs spéciales, que quelques expériences dues à Regnault. *M. Ledoux* [1] en a déduit des formules qui, à défaut d'autres données, peuvent être très utiles ; elles sont tirées de celle que M. Zeuner a trouvée pour la vapeur d'eau :

$$pv = BT - Mp^n$$

On peut déterminer les constantes B, M, n, en introduisant dans

1. Ledoux. — *Annales des Mines*, 1878, t. XIV, p. 171.

Zeuner. — *Zur Theorie der Kalt-Dampfmaschinen.* — *Civil Ingenieur*, 1881, p. 477.

l'équation les résultats trouvés par Regnault, en ce qui concerne le produit pv, pour certaines températures et certaines pressions.

Le coefficient de dilatation à *pression* constante, α, est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{B}{pv}$$

En appliquant l'équation à la pression atmosphérique, et pour le volume spécifique v_0, ce qui suppose la température au zéro du thermomètre ordinaire, on a :

$$B = 10334\, v_0\, \alpha$$

Si on connait v_0 et le coefficient de dilatation sous pression constante, à zéro, il suffit de deux valeurs du produit pv en fonction de la température et de la pression pour déterminer les constantes M et n. M. Ledoux trouve ainsi :

pour l'acide sulfureux :

$$pv = 13{,}882\,T - 3{,}8455\,p^{0.44487} \tag{37}$$

et pour l'ammoniaque :

$$pv = 52{,}4943\,T - 43{,}7144\,p^{0.32685} \tag{38}$$

Les lignes adiabatiques ont pour équation, comme on l'a vu au numéro 62 :

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AB}{C}} = \frac{T}{T_1}$$

C est, comme précédemment, le calorique spécifique à pression constante; en utilisant la relation fondamentale pour éliminer T, on obtient :

$$pv = BT_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AB}{C}} - Mp^n$$

Pour se servir de cette équation, il faut connaître la chaleur spécifique C; celle-ci, supposée constante dans les limites usuelles, est d'après Regnault :

pour l'acide sulfureux :

$$C = 0.15438$$

d'où :

$$\frac{AB}{C} = 0.211882$$

pour l'ammoniaque :

$$C = 0.50836$$

d'où :

$$\frac{AB}{C} = 0.242615$$

M. Zeuner a suivi une marche analogue à celle de M. Ledoux, mais, pour l'acide sulfureux, il a utilisé les valeurs des coefficients α obtenus par Regnault en faisant varier successivement la pression et le volume. Les formules de M. Zeuner sont les suivantes :
pour l'acide sulfureux :

$$(37^{bis}) \qquad pv = 13.908\, T - 32{,}543\, p^{0.2138}$$

pour l'ammoniaque :

$$(38^{bis}) \qquad pv = 52.642\, T - 29{,}783\, p^{0.3655}$$

66. — Les vapeurs *saturées* des corps que nous considérons sont elles-mêmes peu connues. M. Ledoux [1] a déduit leurs constantes de celles des vapeurs surchauffées en déterminant, pour ces vapeurs, et d'après les expériences de Regnault, la loi :

$$p = \varphi(t)$$

On sait, en outre, que l'équation de Clapeyron relie la chaleur de vaporisation r, au volume de la vapeur; celui-ci peut s'obtenir en fonction de la température, et par conséquent de la pression, en supposant que l'équation des vapeurs surchauffées s'applique jusqu'au point de saturation; il en résulte que, par une marche inverse de celle que nous avons suivie pour les vapeurs saturées, on obtient r en fonction de v.

Il reste à trouver λ, chaleur totale; or on peut tirer, de l'équation des lignes adiabatiques, la valeur de l'énergie intérieure, et en déduire une équation qui donne la chaleur totale à fournir pour une transformation générale.

M. Ledoux a obtenu :

1. Ledoux. — Mémoire cité, note, p. 202.

pour l'acide sulfureux :

$$q = 0.36333\, t + 0.000004\, t^2 \tag{39}$$

$$r = 91.396 - 0.2361\, t - 0.000135\, t^2 \tag{40}$$

$$\lambda = 91.396 + 0.12723\, t - 0.000131\, t^2 \tag{41}$$

$$Ap\,(u' - u) = 8.243 + 0.0196\, t - 0.000116\, t^2 \tag{42}$$

pour l'ammoniaque :

$$q = 1.0058\, t + 0.001829\, t^2 \tag{43}$$

$$r = 313.63 - 0.6250\, t - 0.002111\, t^2 \tag{44}$$

$$\lambda = 313.63 - 0.3808\, t - 0.000282\, t^2 \tag{45}$$

$$Ap\,(u' - u) = 30.154 + 0.08861\, t - 0.000059\, t^2 \tag{46}$$

Le même auteur a calculé, pour ces deux corps, des tables s'étendant de — 30° à 40° C., pour l'acide sulfureux, et de — 40° à 40° pour l'ammoniaque.

Des calculs analogues, entrepris par M. Zeuner, lui ont donné pour la vapeur saturée d'ammoniaque [1] :

$$q = 1.01235\, t + 0.004189\, t^2 \tag{47}$$

$$r = 314.865 - 0.64303\, t - 0.004714\, t^2 \tag{48}$$

$$\lambda = 314.865 + 0.36932\, t - 0.000525\, t^2 \tag{49}$$

$$Ap\,(u' - u) = 30.248 + 0.06938\, t - 0.000235\, t^2 \tag{50}$$

$$s = \int_0^t \frac{dq}{T} = 7{,}15118 + 0.008378\, t - 2{,}93543\, l_{10}\, T \tag{51}$$

M. Zeuner a également calculé, au moyen de ces équations, une table s'étendant entre les mêmes limites que celles de M. Ledoux.

Les volumes spécifiques du liquide sont :

pour l'acide sulfureux : $u = 0.0007$
pour l'ammoniaque : $u = 0.0016$

1. *Civil Ingenieur*, mémoire cité, p. 400. Il semble, au premier abord, qu'il y ait une différence sensible entre les formules de M. Ledoux et celles de M. Zeuner, mais les calculs numériques prouvent le contraire, les termes qui paraissent très inégaux étant faibles pour les basses températures.

Les diagrammes entropiques tracés d'après ces données ont la forme représentée figure 29 pour l'acide sulfureux, et figure 30 pour l'ammo-

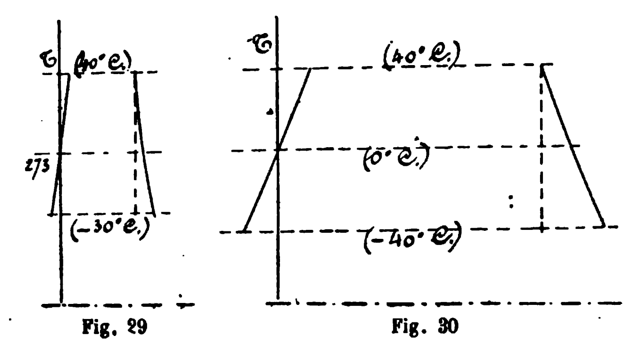


Fig. 29 Fig. 30

niaque ; les échelles des deux figures sont les mêmes ; on voit que ces deux corps se comportent comme l'eau au point de vue de l'abaissement du titre pendant la détente.

CHAPITRE II

Ecoulement des fluides.

§ I

Ecoulement des gaz permanents.

67. — L'écoulement d'un fluide qui passe d'une enceinte où règne la pression p_1 à un réservoir dans lequel la pression p_2 est inférieure, est une opération non réversible, à laquelle le premier principe expérimental peut seul être appliqué. L'énergie sensible due à la force vive du fluide prend ici une valeur prépondérante ; il faut, par conséquent, en tenir compte dans le principe de l'équivalence, qui s'énonce ainsi :

La moitié de la force vive acquise pendant le temps $d\tau$, par la masse du fluide qui s'écoule, est égale au travail des forces extérieures, augmenté de l'énergie fournie sous forme de chaleur, et diminué de l'accroissement de l'énergie intérieure pendant le même temps.

Nous supposons que l'écoulement est devenu permanent; soient :

p_1 la pression dans le premier réservoir,

v_1 le volume du fluide dans ce réservoir pour l'unité de poids, à la température T_1 du réservoir,

ω_1 la section du premier réservoir,

p_2 la pression dans le second réservoir,

v_2 le volume de l'unité de poids à la pression p_2 et à la température T' de la section contractée de la veine,

ω_2 la section contractée,

w la vitesse dans la section contractée.

Considérons la masse du fluide comprise entre les sections ω_1, ω_2 ; nous pouvons, par la pensée, supprimer toute la masse restante dans chacun

des réservoirs, et la remplacer par des pistons (fig. 31) sur lesquels s'exerceraient les pressions p_1 et p_2 par unité de surface.

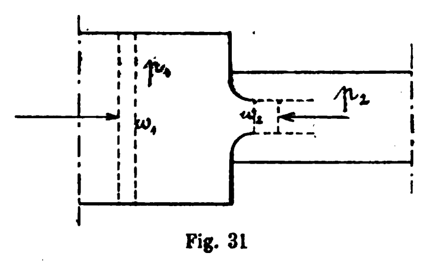


Fig. 31

Soit P le poids qui s'écoule par seconde, $P d\tau$ sera le poids qui s'écoule pendant l'élément de temps, et l'on aura pour les quantités d'énergie qui figurent dans l'équation de l'équivalence :

1°) Pour la moitié de l'accroissement de la force vive pendant le temps $d\tau$:

$$P \, d\tau \frac{w^2}{2g}$$

car nous supposons que la section ω_1 est très grande relativement à la section contractée.

2°) Pour le travail des forces extérieures :

$$P \, d\tau \, (v_1 p_1 - v_2 p_2)$$

3°) L'énergie fournie sous forme de chaleur diminuée de l'accroissement de l'énergie intérieure n'est autre chose que le travail effectué par la détente du corps qui s'écoule en passant de la pression p_1 à la pression p_2 ; en effet, soit dQ la quantité de chaleur communiquée à l'unité de poids au moment du trajet où la pression est p et le volume v ; l'accroissement d'énergie étant dU, on a évidemment

$$dQ - A\,dU = A\,pdv$$

pour le temps $d\tau$, chaque tranche de poids $P d\tau$ prend la place de la tranche suivante, et cette opération s'effectue depuis la section ω_1 jusqu'à la section ω_2. Le travail exercé est, par conséquent :

$$P \, d\tau \int_{v_1}^{v_2} pdv$$

et l'on a finalement :

$$\frac{w^2}{2g} = v_1 p_1 - v_2 p_2 + \int_{v_1}^{v_2} pdv \qquad (52)$$

équation qui peut se mettre sous une forme encore plus simple, car

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv = p_2v_2 - p_1v_1 - \int_{p_1}^{p_2} vdp$$

ce qui donne :

$$\frac{w^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} vdp \tag{53}$$

On peut aussi écrire l'équation (52) sous cette forme :

$$\frac{w^2}{2g} = R\,(T_1 - T'_2) + \int_{v_1}^{v_2} pdv \tag{52bis}$$

T_1 étant la température dans le premier réservoir et T'_2 la température du jet à l'orifice.

Dans ces diverses formes d'équation, il est impossible de trouver l'intégrale si l'on ne connaît, pour chaque point compris entre les sections ω_1 et ω_2, la loi qui lie la pression au volume; en général, cette loi n'est pas connue, elle dépend de la manière dont la chaleur est communiquée au corps dans son trajet, mais nous pouvons résoudre le problème dans quelques cas particuliers.

68. — *Cas où le volume est constant.* — L'équation (53) devient :

$$\frac{w^2}{2g} = v\,(p_1 - p_2)$$

ou, puisque v est le volume de l'unité de poids, on a, en appelant δ la densité par rapport à l'eau :

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\delta} \tag{54}$$

c'est la formule des liquides.

Il se produit un abaissement de température dans l'orifice, car le volume doit rester constant malgré la diminution de pression; du reste, d'après l'équation (52 *bis*):

$$\frac{w^2}{2g} = R\,(T_1 - T'_2)$$

on a donc :

(55) $$T_1 - T'_2 = \frac{p_1 - p_2}{\delta R} = \frac{p_1}{\delta R}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$$

ainsi, soient :

$$p_1 = 1,1 \times 10334 \text{ kilogrammes}$$

$$p_2 = 10334$$

Pour l'air atmosphérique, $R = 29.272$
soit :

$$T_1 = 273 + 10 = 283 \text{ (ou } 10^\circ \text{ C.)}$$

δ est le poids de l'unité de volume à la pression p_1 et à la température T_1.

$$\delta = \frac{1.293 \times 1.1}{1 + 10\,\alpha} = 1.372$$

On trouve :

$$T'_2 = 257^\circ 7 \text{ environ (ou } - 15^\circ 3 \text{ C.)}$$

L'abaissement de température est donc très prononcé.

Pour réaliser ce mode d'écoulement il est à peine nécessaire de remarquer qu'il faut fournir au corps une certaine quantité de chaleur positive ou négative pendant le trajet vers l'orifice (n° 70).

69. — ***Cas où la température est constante.*** — On a, par l'équation (52 *bis*) :

$$\frac{w^2}{2g} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

La loi qui lie la pression au volume est ici la loi de Mariotte, donc :

$$\frac{w^2}{2g} = p_1 v_1\, l_n \frac{p_1}{p_2}$$

(56) $$\frac{w^2}{2g} = RT_1\, l_n \frac{p_1}{p_2}$$

Cette formule est celle de *Navier*. Pour réaliser la constance de la

température, il est nécessaire de fournir au fluide une certaine quantité de chaleur, comme on le verra ci-après.

70. — *Cas où* $dQ = o$. — La pression et le volume sont alors liés par l'équation :

$$pv^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma}$$

On peut calculer l'abaissement de température par l'équation (11) :

$$\frac{T'_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

qui donne :

$$T_1 - T'_2 = T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]$$

D'ailleurs, dans une transformation adiabatique, le travail accompli est égal à la perte d'énergie intérieure, on a donc :

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv = Ec\,(T_1 - T'_2)$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (52 *bis*) :

$$\frac{w^2}{2g} = E\,\gamma\,c\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right] \tag{57}$$

Lorsqu'on introduit dans cette formule la chute de température, elle prend la forme très simple :

$$\frac{w^2}{2g} = E\,\gamma\,c\,(T_1 - T'_2) \tag{57 bis}$$

C'est la formule de *Weisbach*. L'abaissement de température est assez faible, même pour une grande vitesse, mais il existe toujours dans l'écoulement adiabatique ; par conséquent, pour produire l'écoulement à température constante, il faut fournir une certaine quantité de chaleur.

L'abaissement de température peut se mettre sous la forme :

$$T_1 - T'_2 = \frac{p_1 v_1}{R} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]$$

En comparant cette valeur à l'équation 55, on trouve que l'abaissement de température est moins prononcé dans l'écoulement adiabatique que dans l'écoulement à volume constant; celui-ci ne peut donc être réalisé que moyennant une soustraction de chaleur [1].

71. — La vitesse w, réalisée dans la section contractée de la veine, s'amortit au fur et à mesure que le jet s'épanouit dans le réservoir, en même temps que la température T'_2 s'élève jusqu'à T_2.

L'échauffement du gaz s'effectue sous pression constante, au détriment de sa force vive seule, car l'opération se fait sensiblement sans emprunt de chaleur à l'extérieur ; on doit donc avoir :

$$A \frac{w^2}{2g} = \gamma c (T_2 - T'_2)$$

Cette formule, rapprochée par exemple de celle de l'équation adiabatique (57 *bis*), montre que, dans ce dernier mode, on a :

$$T_2 = T_1$$

c'est-à-dire que le fluide reprend, lorsqu'il s'est mis au repos dans le second réservoir, la température qu'il avait dans le premier. On en conclut qu'il n'y a pas de travail extérieur dépensé dans l'opération ; en effet, les deux réservoirs à pression constante peuvent être supposés reliés par un système de deux pistons (fig. 32) disposés de telle manière que les volumes déplacés par chacun d'eux soient en raison inverse des pressions qu'ils supportent [2]. Pendant l'écoulement, le fluide reprenant dans le second réservoir la même température que dans le premier, les pistons seront en équilibre, et il n'y a aucun travail effectué par le gaz sur les corps extérieurs. La chaleur fournie au système est du reste nulle, et comme la température

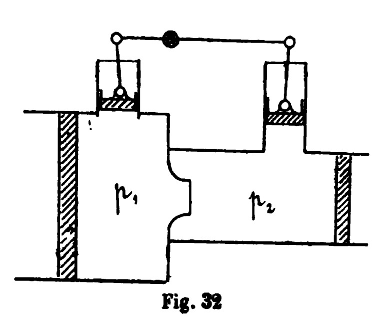


Fig. 32

1. Nous n'aborderons pas ici tous les problèmes auxquels peut donner lieu l'écoulement des gaz. M. Haton de la Goupillière a fait dans son *Cours de Machines*, t. I (nos 291 à 307) un exposé très complet des problèmes relatifs au remplissage et à la vidange d'un réservoir; ces recherches peuvent présenter un certain intérêt au point de vue des applications de l'air comprimé.

2. On suppose, bien entendu, que tout le système se trouve dans le vide.

ne change pas, on voit que les conditions réalisées dans l'écoulement permanent ont quelque analogie avec celles de l'expérience de Joule, bien que le phénomène soit évidemment tout autre.

72. — Pour établir l'accord complet entre les formules et les expériences de Weisbach, il faut observer que le frottement du fluide contre les bords de l'orifice développe de la chaleur, dont une portion très faible est transmise à la paroi elle-même ; par conséquent, l'énergie perdue sous forme de force vive est en majeure partie transmise au jet sous forme de chaleur, mais comme l'échauffement a lieu à pression constante, on aura en appelant T''_2 la température effective du jet et w_c la vitesse corrigée :

$$w_c = \varphi\, w$$

$$\frac{w_c^2}{2g} = E \gamma c (T_1 - T''_2)$$

Ces équations permettent de calculer T''_2 lorsque l'on connait φ.

Le volume spécifique v_2, à la sortie de l'orifice, sera :

$$v_2 = \frac{RT''_2}{p_2}$$

Soient μ le coefficient de contraction, o la section de l'orifice ; le débit sera, en volume :

$$\mu \varphi o w$$

et en poids :

$$P = \frac{\mu \varphi o w p_2}{RT''_2}$$

Pour un orifice arrondi :

$$\varphi = 0.981,\ \mu = 1,\ \mu\varphi = 0.981$$

Pour un orifice en mince paroi :

$$\varphi = 0.981,\ \mu = 0.565 \text{ à } 0.81,\ \mu\varphi\ (^1) = 0.555 \text{ à } 0.795$$

L'écoulement adiabatique est celui qui se rapproche le plus des conditions pratiques, car les gaz conduisent mal la chaleur, et il serait fort

1. $\mu\varphi = 0{,}626$ d'après Daubuisson.

difficile de transmettre au jet (ou de lui enlever) pendant l'écoulement même, une quantité de chaleur appréciable.

73. — *Détendeurs.* — Ces appareils ont été imaginés pour dépenser à pression constante l'air comprimé d'un réservoir dont la pression diminue successivement au fur et à mesure que le réservoir se vide. En principe, ils se réduisent au système de la figure 33, qui représente en schéma le détendeur Belleville.

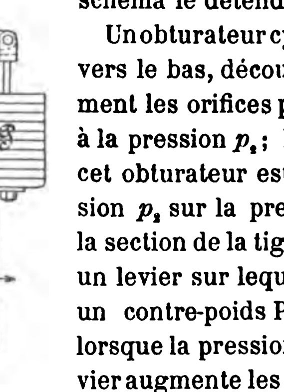


Fig. 33

Un obturateur cylindrique *s* en se déplaçant vers le bas, découvre de plus en plus largement les orifices par lesquels l'air s'échappe à la pression p_2; la force qui tend à fermer cet obturateur est due à l'excès de la pression p_2 sur la pression atmosphérique, sur la section de la tige t; elle est équilibrée par un levier sur lequel agissent un ressort r et un contre-poids P réglé pour chaque cas; lorsque la pression p_2 diminue, l'action du levier augmente les ouvertures, et *vice versa*.

Les détendeurs sont aujourd'hui fréquemment employés pour réduire la pression de la vapeur dans les appareils de chauffage, quelquefois aussi pour régulariser la pression de la vapeur fournie par les chaudières à petit volume d'eau, ou pour alimenter les enveloppes de vapeur des cylindres intermédiaires dans les machines à expansion multiple.

Lorsqu'il s'agit d'un gaz comprimé, les échanges de chaleur entre l'air et la fonte des parois sont négligeables dans la zone active de l'appareil; l'écoulement est donc adiabatique, et la température baisse dans l'orifice, mais elle se rétablit (n° 71) lorsque la vitesse est amortie.

L'énergie intérieure n'est donc pas altérée, et les volumes de l'unité de poids du fluide avant et après le passage à travers le détendeur, sont liés par la loi de Mariotte.

Nous savons que le travail limite qui serait développé par le gaz en se détendant jusqu'au moment où sa pression serait nulle, ne dépend que de la température initiale du gaz et non de sa pression (19), mais pratiquement, la détente étant limitée par la contre-pression atmosphérique, le travail recueilli pendant la détente diminue en même temps

que la pression p_2. Le détendeur amène donc une perte d'effet inévitable, qui sera étudiée à propos des aéro-moteurs [1].

L'effet d'un modérateur ou d'une soupape à étranglement est analogue à celui du détendeur; cependant, on ne peut comparer l'action commune de ces différents organes à celle d'une vanne de moteur hydraulique, qui, pour un même poids d'eau dépensé, réduit la pression sans augmenter le volume du fluide.

§ II.

Ecoulement des vapeurs [2].

74. — L'équation (52) trouvée pour les gaz permanents, s'applique aux vapeurs, mais il est préférable ici de remplacer le travail de détente produit par le fluide en fonction de l'excès de la chaleur fournie sur l'accroissement de la chaleur interne ; c'est-à-dire de remplacer

$$A \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

par l'expression équivalente :

$$Q - A (U_2 - U_1)$$

L'équation devient ainsi :

$$A \frac{w^2}{2g} = A (p_1 v_1 - p_2 v_2) + Q - A (U_2 - U_1)$$

Soient x_1 le titre initial du mélange ;
u'_1 le volume spécifique de la vapeur saturée à la température T_1 ;
x_2 le titre à l'orifice ;
u'_2 le volume spécifique de la vapeur saturée à la pression p_2, et à la température T_2 qui lui correspond.

Le volume liquide dont la dilatation est, comme nous l'avons admis,

1. 8e Fascicule.
2. M. E. Haerens. — *Annales des Ingénieurs de Gand*, 1886, 2e mémoire, a étudié de nombreux cas d'écoulement de la vapeur saturée et même surchauffée.

négligeable vis à vis du volume de la vapeur, sera supposé constant et égal à 1. On a donc :

$$v_1 = u + (u_1' - u)\, x_1$$

$$v_2 = u + (u_2' - u)\, x_2$$

$$A\, U_1 = \int_o^{T_1} dq + x_1\, [r_1 - A p_1\, (u_1' - u)]$$

$$A\, U_2 = \int_o^{T_2} dq + x_2\, [r_2 - A p_2\, (u'_2 - u)]$$

Q est la quantité de chaleur fournie à l'unité de poids du mélange pendant qu'il passe de l'état $x_1\, T_1\, p_1$ à l'état $x_2\, T_2\, p_2$, et sur laquelle nous pouvons faire des hypothèses particulières ; la plus simple, qui ne doit pas s'écarter beaucoup de la réalité, consiste à supposer

$$Q = o$$

En introduisant ces différentes valeurs dans l'expression qui fournit la vitesse, on obtient :

$$\text{(58)} \qquad A\, \frac{w^2}{2g} = \int_{T_2}^{T_1} dq + r_1\, x_1 - r_2\, x_2 + A\, (p_1 - p_2)\, u$$

Lorsque l'on néglige le dernier terme, qui représente la chaleur correspondante au travail d'expulsion du volume u qu'aurait le mélange liquéfié, il vient simplement :

$$\text{(59)} \qquad A\, \frac{w^2}{2g} = q_1 - q_2 + r_1\, x_1 - r_2\, x_2$$

Les quantités q_1, q_2, r_1, x_1, r_2, sont connues; le titre x_2 est celui du mélange après la détente adiabatique ; on a donc, par l'équation (27) :

$$x_2\, \frac{r_2}{T_2} + s_2 = x_1\, \frac{r_1}{T_1} + s_1$$

et le problème est entièrement résolu, surtout lorsque l'on possède une table de l'entropie s du liquide.

On emploie des formules approchées qui donnent la valeur explicite

de la vitesse ; celle de M. Zeuner [1] s'établit en remarquant que :

$$\int \frac{dq}{T} = \int l \frac{dT}{T}$$

et en prenant pour l, chaleur spécifique du liquide, une valeur constante, ce qui donne :

$$r_2 x_2 = \frac{T_2}{T_1} r_1 x_1 + l T_2 \log_n \frac{T_1}{T}$$

On a, du reste :

$$\log_n \frac{T_1}{T_2} = \log_n \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)$$

et, en développant en série :

$$\log_n \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)^3 - \dots\dots$$

Cette valeur est introduite dans l'expression de $r_2 x_2$, que l'on substitue dans l'équation (59). Pour la vapeur d'eau, l est sensiblement égal à l'unité, et l'on démontre que, même pour des écarts de température dépassant ceux que l'on a à considérer dans les applications, on peut se borner à conserver le premier terme du développement ; dans tous les cas où x_1 est assez grand, on obtient ainsi, pour la vapeur d'eau :

$$w = 91.2 \sqrt{r_1 x_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \qquad (59^{bis})$$

75. — La vitesse w est celle qui se produit dans le voisinage de l'orifice, mais bientôt, elle se ralentit, et il en résulte des mouvements tourbillonnaires, pendant lesquels la force vive du jet se transforme en chaleur que le mélange absorbe à la pression constante p_2. Soit x'_2 le titre de la vapeur ramenée au repos, sa température reste T_2 (à moins que la vapeur ne se surchauffe, ce qui aura lieu si nous trouvons $x'_2 > 1$). Nous aurons :

$$A \frac{w^2}{2g} = r_2 (x'_2 - x_2)$$

1. Ouvrage cité, et A. Pochet, *Nouvelle Mécanique industrielle.*



ou, en prenant la valeur de la force vive donnée par l'équation (58) :

$$x'_2 = \frac{A(p_1 - p_2)u + q_1 - q_2 + r_1 x_1}{r_2} \tag{60}$$

Cette valeur aurait pu être trouvée directement, en exprimant que le travail effectué sur la vapeur dans l'ensemble des deux réservoirs est égal à l'accroissement de son énergie intérieure.

Application numérique. — Soient :

$$\begin{array}{ll} T_1 = 273 + 190 & p_1 = 128396 \\ T_2 = 273 + 100 & p_2 = 10334 \\ q_1 = 192.78 & q_2 = 100.50 \\ r_1 = 471.67 & r_2 = 536.50 \end{array}$$

Pour $x_1 = 1$, on trouve $x'_2 > 1$, ce qu'il est facile de vérifier par l'équation (60). On peut se demander quel devrait être le titre initial du mélange pour que la vapeur arrivée au repos dans le second réservoir soit saturée et sèche. On devra avoir $x'_2 = 1$ dans l'équation (60) ; celle-ci donne alors :

$$x_1 = 0.94$$

76. — *Surchauffe spontanée.* — La vapeur saturée à 190° C. (12,5 atm. abs. environ), contenant 6 % d'eau, se sèche donc complètement en s'écoulant sans perte ni gain de chaleur à la pression atmosphérique, après qu'elle est rentrée au repos.

Si l'on suppose que le titre soit supérieur à 0.94, la vapeur se surchauffe, et c'est ce que l'on observe dans l'écoulement de la vapeur à l'air libre; dans le voisinage de l'orifice, il se forme un cône gris ayant l'orifice pour base, et cette couleur est due à l'humidité produite par la détente ; le jet s'épanouit ensuite, il devient transparent et prend une couleur bleue ; c'est le frottement de l'air et l'arrêt progressif de la vapeur qui produisent ce phénomène; enfin, à une distance plus grande encore, le jet se refroidit, et la vapeur prend l'état vésiculaire.

Ce résultat indique que l'on peut surchauffer la vapeur, lorsqu'elle est humide, en déterminant une chute de pression; toutefois, la surchauffe que l'on peut obtenir ainsi n'est pas très prononcée.

En règle générale, lorsque l'on étrangle la vapeur qui se rend de la chaudière au récepteur, soit au moyen d'un détendeur (73), soit au moyen

d'une valve, on retrouve sous forme de chaleur interne tout l'excès du travail de la pression d'amont sur celui de la pression d'aval. On ne peut en conclure, cependant, qu'il est indifférent d'employer la vapeur à pleine pression ou de lui faire subir un étranglement; nous verrons au contraire dans la théorie des machines à vapeur, que par le fait de l'étranglement la chaleur de la source supérieure est moins bien utilisée.

La surchauffe, ou tout au moins l'élévation du titre que nous venons de reconnaître pour la vapeur d'eau, n'est nullement en contradiction avec le fait établi au numéro 48 : la condensation de la vapeur pendant la détente adiabatique; en effet, il y a une différence essentielle entre les deux phénomènes : dans le changement réversible, le mélange effectue du travail au détriment de sa chaleur interne, tandis que la vapeur qui s'écoule et qui rentre au repos reçoit, au total, le travail des pressions extérieures. Dans l'orifice même, le titre de la vapeur est celui qui résulterait de la détente adiabatique, dont le travail s'est exercé sur la masse de la vapeur, mais l'équivalent en force vive du travail rentre en jeu dans la transformation ultérieure.

77. — *Débit d'un orifice.* — Pour l'obtenir, il faut multiplier la section de l'orifice, exprimée en mètres carrés, par la vitesse de la vapeur, et par le poids du mètre cube du mélange ; celui-ci est :

$$\frac{1}{(1 - x_2)\, u + u'_2\, x_2}$$

ou, très approximativement, même lorsque le titre x_2 est faible :

$$\frac{1}{u'_2\, x_2}$$

On a donc, en appelant P le débit en poids, et o la section :

$$\text{(61)} \qquad P = \frac{ow}{u'_2 x_2} = 91.2 \frac{o}{u'_2 x_2} \sqrt{r_1\, x_1\, \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Cette formule peut être utile pour la recherche du diamètre à donner aux soupapes de sûreté des chaudières [1].

78. — *Ecoulement à l'air libre de l'eau d'une chaudière.* — Lorsque la température de l'eau est inférieure à 100° C, le phénomène est régi

1. 4e Fascicule.



par les lois de l'hydraulique, et ne présente aucun intérêt spécial ; mais lorsque la température T_1 est supérieure à $273+100$, on peut prévoir qu'une partie du jet se vaporise pendant le trajet du mélange, d'abord entièrement liquide, qui se rend vers l'orifice ; il y a ainsi une certaine énergie dépensée qui altère complètement le phénomène.

La formule pratique (59 *bis*) ne s'applique pas au cas où x_1 est nul, il faut faire le calcul au moyen de l'équation (59); on a, dans le cas de l'exemple numérique déjà traité (n° 75) :

$$x_2 = 0.1536$$
$$w = 286^{m}23$$

On obtiendrait, par la formule de l'hydraulique :

$$w = \sqrt{2g\frac{p_1 - p_2}{1000}} = 48{,}18$$

et l'on voit combien grave serait l'erreur commise en négligeant l'effet de la modification de la chaleur interne du fluide qui s'écoule.

Pour obtenir le débit en poids de l'orifice, il faut tenir compte du poids spécifique du mélange :

$$\frac{1}{u + x_2\,(u'_2 - u)}$$

on a $u = 0{,}001$.

Pour l'orifice ayant 1 mètre carré de section, il vient pour le débit en poids :

$$P = \frac{w}{u + x_2\,(u'_2 - u)} = 1125 \text{ kil. par seconde}$$

Si l'on suppose que l'eau est sous la même pression (produite, par exemple, par un piston ou par une autre chaudière), mais à la température de 100° seulement, le débit en poids devient :

$$\frac{48.18}{0.001} = 48180 \text{ k.}$$

M. Zeuner[1] établit que, pour un orifice donné, le débit en poids n'augmente que très peu avec la pression initiale; on se rend facilement compte de ce fait en remarquant que le titre du mélange, en augmentant la vitesse, diminue la densité.

1. Zeuner. — Ouvrage cité p. 414. Une table est calculée pour des pressions absolues s'étendant de 2 à 14 atmosphères; le poids débité par mètre carré d'orifice augmente de 1094 k., 6 à 1129 k., 6; dans le premier cas la proportion de vapeur n'est que de 41,5 kilogrammes, tandis qu'à la pression la plus élevée, cette proportion est de 183 k., 7.

Des expériences récentes, inspirées par M. Sauvage [1], ont montré que le phénomène réel ne vérifie nullement la théorie ci-dessus; le débit augmenterait avec la pression dans une assez forte mesure, et serait toujours beaucoup plus grand que celui de la formule de M. Zeuner. M. Widmann, ingénieur de la Marine, signale des anomalies semblables au sujet de l'écoulement de la vapeur, qui, d'après ses expériences et celles faites par M. Garnier, à Indret, donnerait lieu à un débit 3 ou 4 fois plus grand que celui des formules théoriques.

§ III

Appareils à jet.

79. — *Injecteur Giffard* [2] *pour l'alimentation des chaudières.* — La vapeur est prise sur une chaudière à la température centigrade t_1, elle est saturée et son titre se rapproche de l'unité ; elle entraîne, au moment où elle débouche dans la chambre C, figure 34, une certaine quantité d'eau froide à la température t. Pendant cette opération, la vapeur se condense et l'eau qui résulte du mélange, échauffée à la température θ, possède, dans la section de sortie B, la vitesse V; en ce point, la veine liquide est soumise à la pression atmosphérique, mais par suite du ralentissement qu'elle subit dans la tuyère divergente D, sa pression s'élève, et elle pénètre dans la chambre d'eau de la chaudière.

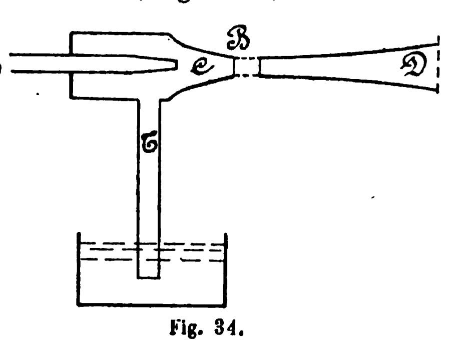


Fig. 34.

Soient t_2, x_2 la température et le titre de la vapeur à la sortie de l'orifice, p_2 la pression, et w la vitesse du jet dans cet orifice.

Si nous supposons que les parois de l'appareil n' absorbent ni ne cèdent aucune quantité de chaleur, l'énergie du fluide qui sort de la section B est égale à la somme des énergies amenées : 1°) par le fluide qui

1. *Écoulement de l'eau des chaudières*, par M. Ed. Sauvage. — *Annales des Mines*, août 1892. — Voir aussi sur cette question les expériences et les travaux de M. Résal. Ser. *Physique industrielle*, t. I., ch. III.
2. L'invention de cet appareil remonte à l'année 1858.

débouche du tuyau de prise de vapeur ; 2°) par le poids y d'eau froide, à la température t, qui s'ajoute à la vapeur; 3°) par le travail de la pression sous laquelle s'opère la condensation dans la chambre C.

Nous avons donc :

$$A \frac{w^2}{2g} + \int_0^{t_2} l dt + x_2 \left[r_2 - A p_2 (u'_2 - u)\right] + y \int_0^{t} l dt + A p_2 x_2 (u'_2 - u)$$
$$= \left[A \frac{V^2}{2g} + \int_0^{\theta} l dt\right] (1 + y)$$

et, en nous servant de la valeur de $A \frac{w^2}{2g}$ donnée par l'équation (58) :

$$(a) \qquad (1 + y) \left[\int_t^{\theta} l dt + A \frac{V^2}{2g}\right] = \int_t^{t_1} l dt + r_1 x_1 + A (p_1 - p_2) u$$

Cette équation renferme les inconnues V, y et θ ; elle suppose que toute la vapeur est condensée dans la section B, où règne la pression atmosphérique, et, par conséquent, que θ est inférieur à 100° C ; le dernier terme, qui est très faible, peut être négligé.

Nous pouvons, par le principe des quantités de mouvement projetées sur l'axe de l'appareil, trouver une seconde relation entre w et V.

L'accroissement de la quantité de mouvement projetée, pour la masse qui, pendant le temps $d\tau$, sort de l'orifice B, est :

$$\frac{(1 + y)}{g} V d\tau - \frac{w}{g} d\tau$$

car la quantité de mouvement apportée par l'eau froide est nulle ou négligeable.

Les pressions qui agissent sur le fluide, dans toute la région étudiée, diffèrent peu de la pression atmosphérique, et nous supposerons, par conséquent, que la somme des impulsions des forces est nulle. Nous avons donc :

$$(b) \qquad V (1 + y) = w$$

w est, comme on le sait, déterminé par les conditions de l'écoulement, mais θ reste toujours inconnu ; c'est que, en effet, on peut régler la quantité d'eau y qui s'ajoute à la vapeur et lui donner différentes valeurs sans que l'appareil cesse de fonctionner.

En réalité, en supposant données toutes les circonstances qui ont



une influence sur l'écoulement, c'est-à-dire la configuration exacte de l'intérieur de la chambre C, la hauteur de l'aspiration, etc., il ne peut s'établir qu'un régime déterminé, et il serait possible de le découvrir [1]. Mais la question posée de cette manière est fort compliquée ; nous arriverons à un résultat suffisamment exact en choisissant des valeurs de θ inférieures à 100° ; les équations (*a*) et (*b*) ne renfermeront plus que les inconnues V et y, et nous pourrons former, pour des valeurs de t_1, x_1 et t choisies à l'avance, un tableau des valeurs de y et V qui correspondent à différentes valeurs de θ.

Admettons, par exemple, que la vapeur soit sèche, nous aurons $x_1 = 1$, et nous calculerons pour toutes les valeurs possibles de t_1 et de t, un tableau analogue au suivant :

	$t_1 = 165°,34$ (7 atm. *abs*) $w = 780$				$t_1 = 133°,91$ (3 atm. *abs*) $w = 596$			
	$1+y$	V	y	Hauteur de ref. $\frac{V^2}{2g}$	$1+y$	V	y	Hauteur de ref. $\frac{V^2}{2g}$
$t = 15°, \theta =$ 90	7.6	102	6.6	530	7.7	76	6.7	293
70	10.3	77	9.3	294	10.4	56.5	9.4	157
50	14.6	53	13.6	143	15	39.7	14	80
30	26.7	29	25.7	43	28.7	20.7	27.7	38
$= 40°, \theta =$ 90	10.4	75	9.4	286	10.6	56	9.6	160
70	15.8	49	14.8	122	16.4	36.2	15 4	67
50	32.5	24	31.5	29.4	36	16.5	35	13.9

La deuxième partie de l'injecteur est un tube divergent qui, par un ralentissement progressif du jet, produit une augmentation correspondante de pression.

Soient ω et Ω les sections à l'origine et à l'extrémité de la partie conique D ; le jet étant liquide, les variations de chaleur interne n'entrent plus en ligne de compte, et, si l'on appelle p la pression dans la section Ω, on aura la relation :

$$\frac{p}{1000} + \frac{\omega^2}{\Omega^2}\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{1000} + \frac{V^2}{2g}$$

1. M. E. Haerens, *Annales des Ingénieurs de Gand*, 1887, a donné une théorie complète de l'injecteur Giffard.

ou :

$$\frac{p - p_a}{1000} = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$$

pour

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire pour un rapport égal à 2 entre les diamètres, on a :

$$\frac{p - p_a}{1000} = \frac{15}{16}\frac{V^2}{2g}$$

qui indique que l'on peut refouler l'eau à une pression à peu près équivalente à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$.

L'examen du tableau montre que l'on peut alimenter des chaudières dont la pression est bien supérieure à celle de la vapeur admise dans l'injecteur Giffard; le même tableau indique que l'appareil cesse de fonctionner, quelle que soit la pression, lorsque θ descend assez bas; la limite inférieure de θ est plus vite atteinte lorsque la pression est élevée, et, à pression égale, lorsque l'eau d'alimentation est plus chaude à l'aspiration. On peut néanmoins encore alimenter des chaudières à pression assez basse même en prenant l'eau d'alimentation à 40° (température souvent atteinte par l'eau de décharge des pompes à air). Enfin, le rapport y de la quantité d'eau entraînée, à celle de la vapeur qui sort de la chaudière pour y rentrer liquéfiée, diminue lorsque θ augmente.

80. — *Rendement de l'injecteur employé comme appareil d'alimentation.* — Le travail utile effectué correspond à l'introduction, dans la chaudière, d'un poids d'eau y, se trouvant à la pression atmosphérique, et qui doit être refoulé à la pression p; pour simplifier le calcul, nous pouvons supposer que le fonctionnement est réglé de telle manière que l'eau arrive sans vitesse dans la chaudière; le poids d'eau y est échauffé par l'injecteur, de la température t à la température θ. L'énergie calorifique ajoutée à celle que contenait la chaudière est, par conséquent :

$$Ay\,(p_1 - p_a)\,u + y\int_t^\theta l\,dt$$

Nous n'avons pas à compter, dans l'effet utile produit, le kilogramme d'eau provenant de la vapeur condensée, car il est sorti sous forme de vapeur; mais nous devons, pour obtenir la dépense d'énergie, évaluer la

quantité de chaleur nécessaire pour ramener à son état primitif la vapeur condensée à la température θ; cette quantité de chaleur est :

$$\int_{\theta}^{t_1} l dt + r_1 x_1$$

Le rendement de l'appareil est le rapport des deux énergies que nous venons d'évaluer :

$$R = \frac{Ay (p_1 - p_a) u + y \int_t^{\theta} l dt}{\int_{\theta}^{t_1} l dt + r_1 x_1}$$

Nous pouvons obtenir, par l'équation (a), la valeur du numérateur de R en observant qu'en vertu de l'hypothèse faite, nous devrons faire dans cette équation :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_1 - p_a}{1000} = (p_1 - p_a) u$$

On trouve, après réductions :

$$R = 1$$

L'injecteur est donc un appareil parfait, et ce résultat n'a rien de paradoxal, car la perte au réfrigérant, qui abaisse le rendement des machines thermiques, est utilisée ici d'une manière complète. Nous serions arrivés à la même conclusion en supposant que la vitesse V est plus grande que celle qui équivaut à la hauteur de refoulement à réaliser; l'eau pénètre alors dans la chaudière avec une certaine force vive qui se transforme en chaleur, sans qu'il en résulte aucune perte. Enfin, le rendement ne dépend pas de la température θ, c'est-à-dire de y. En réalité, les parois rayonnent de la chaleur (dont une partie provient du frottement de la vapeur); ces pertes sont faibles en valeur absolue, mais elles sont assez grandes en comparaison du travail de refoulement effectué.

La plus grande imperfection de l'injecteur provient d'une cause dont nous n'avons pas parlé et qu'il serait impossible d'évaluer, c'est la perte du trop plein lors de l'amorçage. Lorsque l'on fait fonctionner un injecteur, on commence par ouvrir en grand l'arrivée de l'eau froide, ce qui s'obtient en général par un mouvement longitudinal de la lance de va-

peur par rapport à la chambre C; la quantité y commence donc par être très grande, et la vitesse du mélange est insuffisante pour produire le refoulement; la veine, au lieu de pénétrer dans la tuyère, est rejetée à l'extérieur, et avec elle la quantité de chaleur interne amenée par la vapeur et par le travail de condensation; on diminue peu à peu la quantité d'eau froide jusqu'à ce que, par l'augmentation de V, l'injecteur s'amorce.

Dans une expérience faite par *Reech*, et rapportée par plusieurs auteurs, on a mesuré expérimentalement y et θ; on a donc pu déterminer, pour 1 kilogramme de vapeur dépensée dans des conditions données de pression, la valeur de R; on a trouvé :

$$R = 0,865, \text{ avec } y = 15$$

D'autres expériences ont été beaucoup moins favorables à l'injecteur; lorsque l'on compare cet appareil à une pompe alimentaire mue par un moteur à vapeur (soit un moteur spécial, ou, ce qui vaut mieux, au point de vue du rendement, le moteur principal), on lui trouve théoriquement une grande supériorité provenant de ce que, dans le moteur, la chaleur versée au réfrigérant est perdue [1]; cette chaleur représente au moins les 0,9 de celle empruntée à la chaudière; mais, dans l'application, les pertes de l'injecteur annulent cet avantage dans la plupart des cas.

81. — *Éjecteur ou éjecteur-injecteur employé pour l'élévation des eaux* [2]. — La chaleur, communiquée à l'eau refoulée est ici entièrement perdue pour l'effet que l'on veut produire; en supposant que l'appareil soit placé, ainsi que la chaudière, au niveau de la nappe à aspirer, le travail utile effectué sera, pour chaque kilogramme de vapeur dépensé :

$$(1 + y)\frac{V^2}{2g}$$

Nous supposerons que l'injection est réglée de manière à ce que $\frac{V^2}{2g}$ corresponde à la hauteur d'élévation: s'il n'en était pas ainsi, l'eau arriverait au niveau supérieur animée d'une certaine force vive, qui serait évidemment perdue.

1. Il n'est pas impossible, cependant, d'employer l'échappement du petit moteur pour échauffer l'eau de la pompe, mais cette disposition n'est pas usitée.
2. Voir 7e Fascicule.

La chaleur dépensée est celle nécessaire pour remplacer, dans la chaudière, le kilogramme de vapeur disparu, c'est-à-dire, puisqu'il faut d'abord le refouler de la pression p_a à la pression de la chaudière :

$$A(p_1 - p_a)u + \int_t^{t_1} l dt + r_1 x_1$$

le rendement est :

$$R = \frac{A(1+y)\frac{V^2}{2g}}{A(p_1 - p_a)u + \int_t^{t_1} l dt + r_1 x_1}$$

ou, en tenant compte de l'équation (a) :

$$R = 1 - \frac{(1+y)\int_t^{\theta} l dt}{A(p_1 - p_a)u + \int_t^{t_1} l dt + r_1 x_1}$$

On peut trouver des valeurs de R en opérant comme nous l'avons fait au n° 79 : on forme ainsi le tableau suivant, calculé en négligeant le terme $A(p_1 - p_2)u$ qui est très faible, et en supposant que $x_1 = 1$.

	$t_1 = 165°,34$ ($7^{atm}.abs$)				$t_1 = 133°,91$ ($3^{atm}.abs$)			
	$1+y$	$\frac{V^2}{2g}$	$A(1+y)\frac{V^2}{2g}$	R	$1+y$	$\frac{V^2}{2g}$	$A(1+y)\frac{V^2}{2g}$	R
$t=15°, \theta=$ 90. .	7.65	530	9.51	0.015	7.75	293	5.35	0.0085
70. .	10.30	294	7.10	0.011	10.40	157	3.85	0.006
50. .	14.60	143	4.90	0.007	15	80	2.80	0.0045
30. .	26.70	43	2 70	0.004	28.7	38	2.55	0.004

On constate que le rendement est toujours extrêmement faible ; dans les meilleures conditions du tableau ci-dessus, il n'est que le $\frac{1}{5}$ de celui d'une pompe actionnée par un bon moteur à vapeur à condensation.

Il est vrai qu'on trouve avantage, dans le cas qui nous occupe, à faire

agir l'appareil par *aspiration* (éjecteur); on crée ainsi, dans la chambre de mélange, une dépression correspondante; la vitesse w est augmentée, mais il est nécessaire, dans l'équation (b) du numéro 79, de tenir compte de l'impulsion des pressions. On trouve ainsi que le rendement s'améliore, sans acquérir toutefois une valeur satisfaisante. Les éjecteurs sont essentiellement des appareils de secours; on les emploie pour des opérations peu importantes, ou pour utiliser de la vapeur perdue.

Éjecteurs à air ou à gaz. — Ils sont d'un emploi assez répandu pour les souffleries, la ventilation [1] ou pour l'amorçage des pompes centrifuges [2]. Leur théorie exacte présente de grandes difficultés [3].

1. 7e Fascicule no 137.
2. 7e Fascicule no 138.
3. Zeuner. — *Das Locomotiven Blasrohr*, Zurich, 1863.

CHAPITRE III

Machines à air chaud.

§ I.

Machines à cycle fermé.

82. — *Cycles de rendement maximum.* — Le choix de l'air comme corps travailleur se justifie par sa gratuité absolue, son inocuité, etc. On peut concevoir que l'air agisse comme au n° 20 : ses états successifs sont figurés par un point décrivant un cycle fermé (1); lorsque ce cycle est celui de Carnot, ou appartient à la famille de ceux étudiés au n° 41, le rendement est maximum, et a pour valeur :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Au point de vue de la transformation de la chaleur en travail, les cycles de rendement maximum sont équivalents; celui de Carnot présente l'avantage de n'exiger aucun régénérateur de chaleur; par contre, il conduit à des machines plus encombrantes que les cycles dans lesquels les isodiabatiques sont des lignes d'égal volume ou d'égale pression (fig. 35).

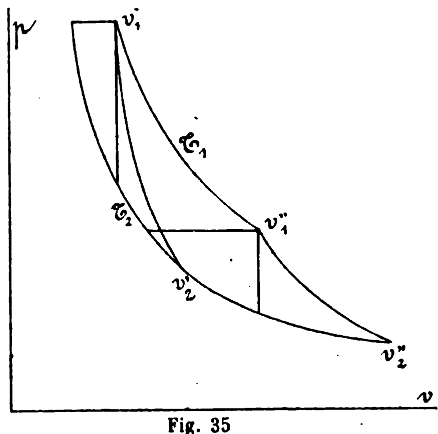


Fig. 35

Pour le même travail développé, les mêmes températures T_1 et T_2, et la même pression

1. Nous pouvons toujours nous borner à considérer les transformations de l'unité de poids du fluide, car si le poids qui évolue est *m* kilogrammes, chaque unité se transformant de la même manière, tout se passe comme si l'on avait *m* machines identiques, chacune d'elles renfermant 1 kilogramme de fluide.

maximum, le volume du fluide, au moment de sa plus grande expansion, est v''_2 pour le cycle de Carnot, et v''_1 seulement pour les autres cycles.

Indépendamment de la question d'économie, il y a lieu de se préoccuper de l'encombrement des machines, et, à ce point de vue, il est utile d'examiner l'effet de l'étendue plus ou moins grande donnée aux transformations isothermiques.

83. — Lorsqu'il s'agit de machines ayant des cycles de Carnot de même rendement, le travail développé par chacune d'elles est proportionnel , pour un parcours du cycle, à la quantité de chaleur Q_1, prélevée à la source; or, on a (n° 14) :

$$Q_1 = T_1 (C - c)\, l_n \frac{v_1''}{v_1'}$$

Il y a donc intérêt à diminuer le volume initial v'_1, et à augmenter le volume v''_1; la première condition revient à dire qu'il faut, autant que possible, *élever la pression initiale* du fluide ; on réalisera ainsi pour le même volume v''_1 [donc pour le même volume v''_2 (éq. 10)] c'est-à-dire pour le même encombrement, un travail plus grand.

Quant au volume v''_1, il est limité par les considérations suivantes : plus le volume v''_1 augmente, toutes choses égales d'ailleurs, et plus la pression correspondante p''_1 s'abaisse, car :

$$p_1'' = \frac{RT_1}{v_1''}$$

On a, par l'équation (11) :

$$p_2'' = \frac{RT_1}{v_1''}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

La pression p''_2 est la plus basse du cycle; si la machine était rigoureusement étanche, il n'y aurait aucun inconvénient à descendre sous la pression atmosphérique; mais les joints ont toujours été le point délicat des moteurs à air chaud; les pistons ne s'y trouvent pas dans d'aussi bonnes conditions de fonctionnement que dans les machines à vapeur; p''_2, pour cette raison, ne descend guère au-dessous de la pression atmosphérique, et v''_1 est limité par le fait.

Une autre circonstance contribue à diminuer la longueur du cycle :

la valeur de Q_1 indique que le travail effectué, en partant d'un volume initial donné, n'augmente que proportionnellement au logarithme du rapport :

$$\frac{v_1''}{v_1'}$$

Nous pouvons prendre tout aussi bien, comme mesure de ce travail, le logarithme de $\frac{v''_2}{v'_1}$, car v''_2 est dans un rapport constant avec v''_1; la longueur du cycle, qui représente le volume engendré par le piston de la machine, augmente comme $v''_2 - v'_1$; ainsi, lorsque l'on représente par 1 le volume initial v'_1, on a :

pour $v''_2 =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l_n \frac{v''_2}{v'_1} =$	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20	2.30
$v''_2 - v'_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

La pression moyenne du cycle est proportionnelle au travail effectué, et en raison inverse du volume engendré par le piston ; on obtiendra donc des nombres proportionnels à cette pression, en divisant l'un par l'autre les chiffres des dernières lignes, ce qui donne :

pour $v''_2 =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.69	0.55	0.46	0.40	0.36	0.32	0.30	0.28	0.26

La pression moyenne diminue donc dans une proportion assez forte au fur et à mesure que l'on prolonge la première transformation; comme, d'autre part, les résistances passives produites par les mécanismes correspondent à une pression résistante à peu près constante, répartie sur la surface du piston, on conçoit qu'il y ait intérêt à limiter la longueur du cycle.

84. — *Régénérateurs.* — On aperçoit immédiatement l'infériorité



pratique du cycle de Carnot, qui se traduit, relativement aux autres cycles de la figure 35, par un plus grand encombrement, et un rendement organique plus faible. Le cycle réalisant la pression moyenne la plus élevée, et par conséquent le meilleur, aux deux points de vue qui nous occupent, est celui qui se trouve limité par deux lignes de pression constante; il présente, relativement aux deux autres, pour une même quantité de chaleur empruntée à la source T_1, un minimum de volume engendré par le piston.

Par contre, les deux modes de fonctionnement qui viennent d'être examinés exigent l'emploi de régénérateurs de chaleur, seul moyen d'accomplir les transformations remplaçant les adiabatiques sans qu'il en résulte aucune perte. Ces *régénérateurs* comprennent un faisceau de toiles métalliques ou de tôles perforées, qui, à cause de leur grande surface, absorbent, en s'échauffant, la chaleur de l'air qui les traverse pendant la deuxième transformation du cycle, et restituent cette chaleur à l'air qui les traverse encore pendant la quatrième transformation.

Il y a lieu de remarquer qu'un corps ne peut céder de la chaleur qu'à des corps de température notablement inférieure, lorqu'il s'agit des gaz; le régénérateur, pour soustraire de la chaleur au fluide, lorsque sa température est déjà voisine de celle du réfrigérant, devrait donc être lui-même refroidi, et il ne pourrait évidemment céder de la chaleur pour effectuer une transformation qui a lieu tout entière à une température qui augmente depuis T_2 jusqu'à T_1.

Le régénérateur ne peut donc avoir l'efficacité nécessaire pour réaliser les lignes isodiabatiques; pratiquement, son emploi est cependant motivé, mais il n'intervient qu'au début des transformations qui nécessitent son emploi.

85. — *Autres cycles possibles des machines fermées.* — On peut, entre les températures T_1 et T_2 des sources, accomplir une infinité de cycles, parmi lesquels il est utile d'examiner ceux qui sont formés d'*adiabatiques* et de lignes d'égale pression ou d'égal volume, ou même de lignes plus générales, comprenant ces deux genres de transformations, et qui répondent à l'équation :

$$pv^k = C_o$$

k étant un nombre quelconque (n°s 36 et 41).



La transformée entropique de ces lignes a pour équation :

$$S - S_o = \int_{T_o}^{T} \frac{dQ}{T} = c\ \frac{k - \gamma}{k - 1} l_n \frac{T}{T_o}$$

ou, en simplifiant l'écriture :

$$S - S_o = M l_n \frac{T}{T_o}$$

pour les lignes de volume constant, $M = c$;

» de pression constante, $M = C$.

La figure 36 représente, entre les températures T_1 et T_2, le cycle entropique ABCD, formé des deux adiabatiques AB, CD, et des deux transformations, BC, DA, correspondant aux courbes de détente et de compression :

$$pv^k = C_o$$
$$pv^k = C'_o$$

et ayant, par conséquent, pour transformées entropiques :

$$S - S_o = M\ l_n \frac{T}{T_o}$$

$$S - S_o' = M\ l_n \frac{T}{T_o}$$

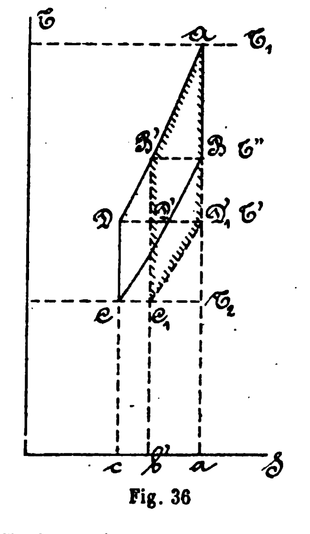


Fig. 36

Les courbes CB, DA sont donc identiques, car leurs abscisses ne diffèrent, pour la même valeur de T, que d'une quantité constante; il en résulte que les arcs BD', DB', compris entre les mêmes valeurs de T, sont superposables, et que ces deux transformations peuvent s'accomplir, dans l'hypothèse d'un régénérateur parfait, sans aucun emprunt extérieur de chaleur.

L'arc CD' peut être transporté horizontalement en $C_1D'_1$, entre les parallèles b'B', aA. La quantité de chaleur réellement empruntée à la source supérieure est :

$$Q_1 = \text{surf. B'A}\ ab'$$

La quantité abandonnée au réfrigérant est :

$$Q_2 = \text{surf. } C_1D_1'\ ab'$$

La quantité de chaleur équivalente au travail effectué est :

$$Q_1 - Q_2 = \text{surf. } AD_1' \, C_1B'$$

et l'on a, en effet, d'après les relations existant entre les éléments de la figure :

$$ABCD = AD_1'C_1B'$$

Le rendement du cycle considéré, rapport de la surface bordée de hachures à la surface A*ab*'B' est évidemment inférieur à :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Ce rendement varie, d'ailleurs, entre les mêmes températures T_1, T_2: lorsque les courbes DA, BC, se rapprochent, il tend vers la limite que réaliserait l'un des cycles de rendement maximum, mais la machine produit de moins en moins de travail, et perd sa raison d'être.

La machine ci-dessus, fonctionnant ***sans régénérateur***, donnerait un rendement très inférieur, puisque la dépense de chaleur serait augmentée de la surface DB'*b'c*, tandis que le travail recueilli ne serait pas plus grand.

86. — On peut, pour l'un des cycles envisagés au numéro précédent, chercher à régler les températures des points B et D de manière que le travail accompli par la machine soit maximum ; ces températures, T'' et T', dépendent du reste l'une de l'autre, car la différence des entropies des points B et C, D et A étant la même, on a, par les équations de ces lignes :

$$\frac{T_1}{T''} = \frac{T'}{T_2}$$

La quantité de chaleur transformée en travail a pour expression :

$$Q_1 - Q_2 = M\,[T_1 - T'' - (T' - T_2)]$$

en remplaçant, dans cette équation, T'' en fonction de T' et posan :

$$\frac{d\,(Q_1 - Q_2)}{dT'} = o$$

on trouve :

$$T' = T'' = \sqrt{T_1\,T_2}$$

Le cycle qui en résulte est représenté, dans le diagramme entropique, par ABCD (fig. 37) ; on voit qu'il ne comporte plus l'emploi du régénérateur; son rendement est :

$$\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}$$

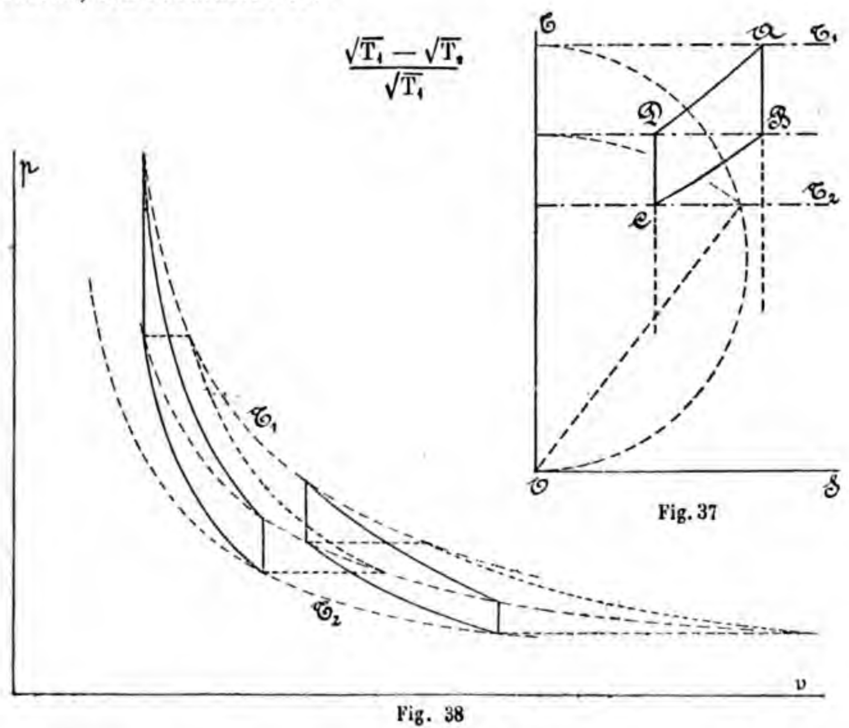


Fig. 37

Fig. 38

Entre deux températures données, ces cycles jouissent de la propriété de fournir le *même travail* quelle que soit la pression initiale, mais ils donnent des machines dont l'encombrement augmente rapidement au fur et à mesure que la pression initiale diminue. On a représenté, dans la figure 38, des cycles limités respectivement par des transformations à volume constant et à pression constante; les premiers sont ceux qui donnent le moindre encombrement et la pression moyenne la plus élevée, mais lorsque l'on s'impose la condition que la pression la plus basse du cycle ne peut descendre en-dessous de la pression atmosphérique, ils obligent à employer une pression initiale beaucoup plus élevée.

87.—*La machine de Stirling*, l'une des plus anciennes (1816) [1],

1. L'idée des machines à air chaud remonte à Sadi Carnot. — *Réflexions*, p. 60.

est représentée en *schéma* (fig. 39). C est un cylindre uniquement destiné aux échanges calorifiques, dans lequel se meut un piston P, appelé *déplaceur* ; l'intérieur de ce piston est rempli de tôles minces R, percées de trous, dont l'ensemble constitue le régénérateur; ce piston peut être traversé par l'air, et n'empêche pas la communication entre les deux compartiments C_1 C_2 du cylindre. Le fond concave de ce dernier récipient est exposé à l'action du foyer, tandis que sa paroi supérieure, ou couvercle, est refroidie par une circulation d'eau.

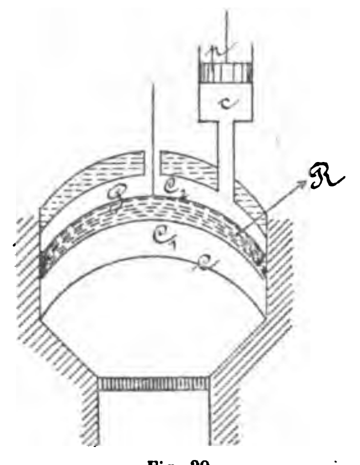


Fig. 39

Lorsque le piston P est à fond de course, la plus grande partie de l'air est soumise à la température de l'eau réfrigérante; si on déplace le piston vers le haut, l'air se rend de la capacité C_2 vers la capacité C_1 en traversant le piston R, et continue ensuite à prendre de la chaleur au contact de la paroi chaude.

Le cylindre *c* est le cylindre moteur; la face inférieure du piston *p* est en communication avec le cylindre C, et la pression y varie de la même manière que dans ce récipient; le piston *p* reçoit les effets dynamiques résultant des variations de pression de l'air, tandis que le piston P est une sorte de distributeur, dont les deux faces sont en équilibre de pression, et dont la manœuvre, effectuée par la machine elle-même, ne demande qu'un effort insignifiant.

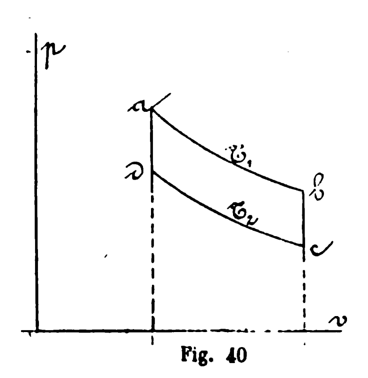


Fig. 40

Le fonctionnement de la machine est approximativement le suivant:

Le piston P se trouve arrêté au bas de sa course, il en est de même du piston *p*, la température de l'air est T_2.

Première phase. — Le déplaceur est amené brusquement au sommet de sa course, *p* restant immobile; l'air traverse le déplaceur en s'échauffant à la température T_1, en partie par l'action du régénérateur, en partie par l'action du

foyer. Pendant cette opération, le volume est constant, et la transformation *da* (fig. 40), s'accomplit.

Deuxième phase. — Le déplaceur est immobile au sommet du cylindre, le piston *p* se meut vers le haut sous l'action de la pression, et accomplit du travail pendant que le foyer continue à communiquer de la chaleur à l'air enfermé dans la machine ; la transformation *ab*, du cycle, est approximativement une ligne isothermique.

Troisième phase. — Le piston *p* est au sommet de sa course, le déplaceur est amené brusquement vers le bas ; l'air repasse à travers le régénérateur, qu'il échauffe, et reprend (au moins théoriquement) la température T_2; le piston est immobile, et la transformation a donc lieu à volume constant (ligne *bc* du cycle).

Quatrième phase. — Le piston *p* descend, P étant immobile ; l'air de la machine est maintenu, par le couvercle à circulation d'eau, à la température T_2, la quatrième transformation (*cd* du cycle) peut donc être considérée comme une ligne de compression isothermique.

Il est évident que nous venons d'indiquer un mode de fonctionnement idéal, qui n'a jamais pu être réalisé. Les lignes *da*, *bc*, du cycle, qui devraient s'accomplir par l'action du régénérateur, ont lieu partiellement à l'intervention de la chaleur des sources ; ainsi, en admettant que les premières parties de ces lignes s'opèrent par l'action de l'échangeur, on voit, par le cycle entropique (fig. 41), que la source T_1 fournit de la chaleur dans tout le trajet $d_1' \, a_1 \, b_1$ et que la source T_2 en reçoit pendant le parcours $b_1' \, c_1 \, d_1$; il est facile de tirer, de cet état de choses, des conclusions qui sont au désavantage du rendement. D'ailleurs, les gaz conduisent mal la chaleur, et il est fort difficile de réaliser les isothermiques T_1 et T_2; ces lignes ne sont décrites qu'approximativement, la ligne supérieure restant en dessous de la température réelle de la source, et la ligne inférieure au-dessus de la température du réfrigérant. On peut dire, enfin, que les mouvements brusques du déplaceur, séparés par des périodes de repos, et les mouvements d'arrêt du piston *p*, pendant le parcours des *isodiabatiques*, ne sont réalisés que d'une manière approchée par les combinaisons cinématiques accepta-

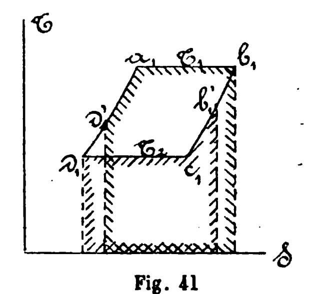


Fig. 41

bles dans le jeu d'une machine. On est donc obligé de remplacer les périodes d'arrêt par des périodes de mouvement lent.

Rankine rapporte qu'une machine de Stirling, ayant un piston travailleur de 400 millimètres de diamètre et $1^m,20$ de course, fonctionnant à raison de 28 révolutions par minute, entre des températures de 370° et 100° centigrades, développait 21 chevaux en consommant un peu plus d'un kilogramme de charbon par cheval et par heure.

Le rendement du cycle théorique eut été :

$$\rho = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{370 - 100}{273 + 370} = 0.42$$

tandis que la machine n'a donné que 270.000 kilogrammètres pour 7.500 calories dépensées, ou 36 kilogrammètres par calorie, soit environ 20 % de la *quantité utilisable* d'après le cycle ; les 80 % de la chaleur utilisable auraient donc été dissipés par les imperfections du cycle.

Il est vrai de dire que le rendement du foyer, que nous supposons ici égal à l'unité, n'avait probablement qu'une valeur très faible, et que, pour apprécier la perfection du cycle réellement effectué, il ne faudrait compter, comme chaleur reçue par la machine, que celle développée par la combustion, diminuée des pertes par rayonnement, par la cheminée, etc.; les données que l'on possède sur le plus ancien des moteurs à air chaud ne permettent pas de l'apprécier complètement (1).

Le moteur de Stirling avait un cycle théoriquement parfait, le plus satisfaisant, en outre, au point de vue du moindre encombrement et des résistances passives. Pour rendre la machine à double effet, il y avait deux cylindres C et deux cylindres déplaceurs; le cylindre de travail était à double effet, et chacune des faces du piston *p* était en communication avec chacune des chambres C. Il y avait, en outre, une pompe à air destinée à compenser les fuites.

88. — *La machine de Lehmann* (1868) (2), peut être considérée comme une réalisation moderne de la machine de Stirling. Le cylindre déplaceur et le cylindre de travail forment une seule pièce C (fig. 42), P est le déplaceur, *p* est le piston proprement dit : la culasse du cylindre C est chauffée d'une manière permanente par le foyer F ; l'avant est refroidi par une circulation d'eau *e*.

1. *Revue technique de l'Exposition de 1889*. 6e partie, t. II, p. 307. Etude très complète par M. G. Richard.
2. Knoke.— *Kraftmaschinen des Kleingewerbes*, Springer, 1887, p. 73 et suiv. J. Hirsch. — *Théorie des machines aérothermiques*.

Les deux pistons p, P, sont cinématiquement liés par le système de leviers représenté sur la figure (système plus ou moins imité de la machine d'*Ericsson* de 1855). Le but de cette liaison est d'obtenir, pour les organes P et p, des déplacements relatifs analogues à ceux que nous avons indiqués pour la machine de Stirling, sans nous préoccuper de

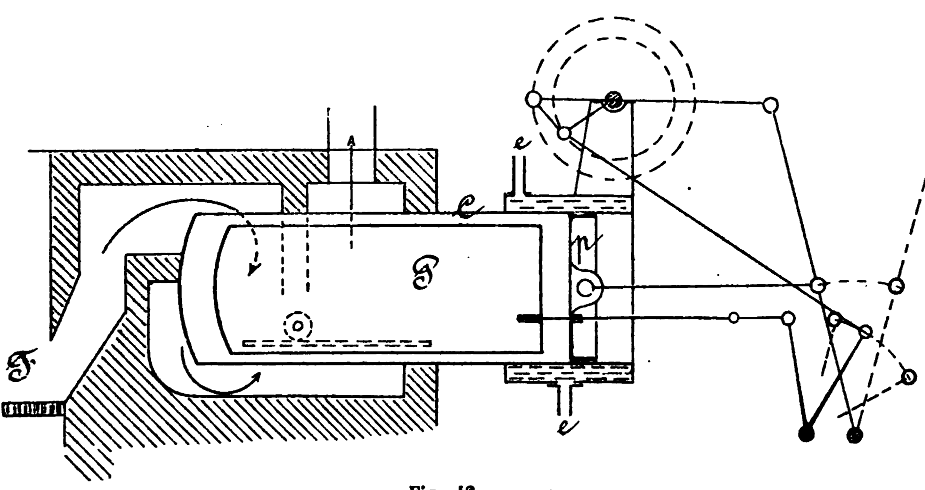
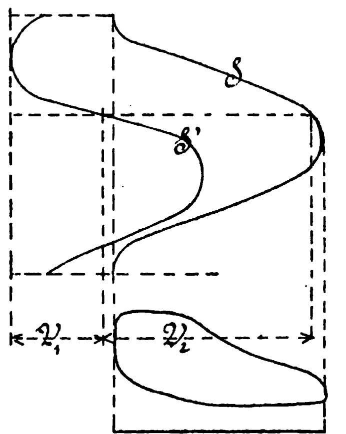


Fig. 42



leur réalisation ; en outre, l'arbre sur lequel les deux manivelles sont calées peut servir à transmettre le travail disponible développé sur le piston p, ou plutôt l'excès de ce travail sur celui qui est absorbé par les résistances passives de la machine et les fonctions auxiliaires.

Il est commode de représenter, pour chaque position de la manivelle, le volume V_1 de l'espace chaud, donné par la loi des déplacements de P, le volume total de l'air, $V_1 + V_2$, donné par la loi des déplacements de p, et, enfin, le volume V_2 de l'espace froid, donné par la différence des quantités précédentes.

Pour l'espace $V_1 + V_2$, le déplacement est sensiblement proportionnel à la projection du bouton de manivelle, c'est-à-dire qu'il est donné par

la sinusoïde S (les arcs sont portés verticalement); le volume V_1 est fourni par les positions du déplaceur, qui donnent la courbe S'; la différence entre les abscisses des deux courbes fournit le volume V_2.

Soit Π le poids d'air (constant) contenu dans la machine, et qui se compose du poids π_1 d'air chauffé à la température T_1 et du poids π_2, refroidi à la température T_2: les volumes du kilogramme d'air sont respectivement, pour ces deux températures :

$$\frac{V_1}{\pi_1} \text{ et } \frac{V_2}{\pi_2}$$

Soit p la pression commune aux deux espaces séparés par le déplaceur, au pourtour duquel existe un certain jeu ; nous aurons, par l'équation fondamentale des gaz :

$$p\,\frac{V_1}{\pi_1} = RT_1 \qquad p\,\frac{V_2}{\pi_2} = RT_2$$

relations desquelles on tire facilement :

$$\Pi R = p\left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}\right)$$

Puisque Π est connu, de même que T_1 et T_2, on connaîtra, pour chaque groupe des valeurs V_1 et V_2, la valeur de p, et l'on pourra tracer, en fonction du volume $V_1 + V_2$, c'est-à-dire des déplacements du piston moteur, le diagramme des pressions, qui serait celui donné par un indicateur.

Dans cette machine, le cylindre déplaceur, qui présente une grande surface, joue le rôle de régénérateur.

On conçoit qu'il est impossible d'assimiler complètement le jeu du moteur Lehmann à celui de la machine idéale ayant le cycle de Stirling ; le déplaceur devrait se mouvoir brusquement ; comme il n'en est pas ainsi, le cycle du travail réel (le diagramme d'indicateur) subit les altérations indiquées dans la figure. Les températures T_1 et T_2 ne s'établissent d'ailleurs pas instantanément comme le suppose le calcul [1].

1. G. Zeuner. — *Ueber die Wirkung des Verdraengers bei Heiss- und Kalt-Luftmaschinen.* — *Civil Ingenieur,* 1883, p. 557 à 580.
Schmidt. — *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure,* 1871. Schrœter, *même recueil,* 1884.
Brauer et Slaby. — *Versuche ueber Leistung von Kleinmotoren,* Berlin, Springer, 1879.

Voici, d'après *Brauer* et *Slaby*, les données du travail du moteur Lehmann de la puissance d'un cheval :

Course du piston moteur.	175mm
Diamètre —	372
Course du piston déplaceur	248
Diamètre —	367
Longueur —	1m526
Angle d'avance de la manivelle du déplaceur. .	65°
Révolutions par minute. . . .	106
Pression moyenne	0k516
Puissance indiquée	2ch37
— au frein	1 31
Pression maximum	1atm903
— minimum	1 054

$$T_1 = 547 + 273 = 820°$$
$$T_2 = 273 + 100 = 373$$

Entre les températures ci-dessus, le rendement du cycle parfait eut été :

$$\rho = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{447}{820} = 0.55$$

c'est-à-dire que la machine parfaite devrait transformer en travail les 0,55 de la chaleur qu'elle reçoit (1); en réalité, elle n'a transformé, en travail développé sur le piston, que les 0,12 de cette chaleur; de plus, 45 % de ce travail sont absorbés par les frottements de la machine. Ce chiffre excessif provient de ce que le piston, eu égard à la faible pression moyenne du cycle, doit être très grand.

Il est difficile, dans les machines à air chaud, de réduire l'encombrement et les résistances passives qui en sont la conséquence. Il est vrai que le cycle des machines fermées comporte théoriquement telle pression initiale que l'on veut (83), mais on redoute l'effet de cette pression sur les parties de la machine chauffées souvent au rouge sombre (550° C.). D'autre part, tout le cycle s'accomplirait alors à des pressions supérieures à celles de l'atmosphère, et comme les fuites sont inévi-

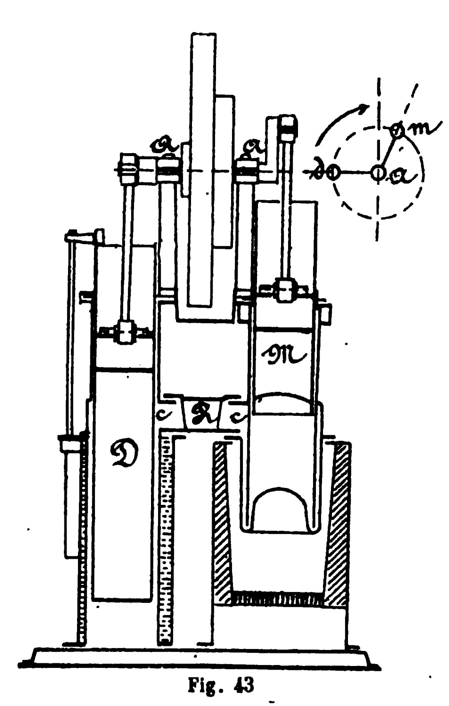
1. Qu'il ne faut pas confondre avec la chaleur développée par le combustible brûlé, car les gaz, devant maintenir la culasse du cylindre à une température d'environ 500° C., s'échappent au moins à cette température; la quantité de chaleur transmise à la machine ne dépasse guère la moitié de celle développée par le combustible.



tables, il serait nécessaire de les réparer au moyen d'une petite pompe de compression, comme dans la machine de Stirling [1]. Ce dispositif n'existe pas dans le moteur Lehmann, où la pression inférieure du cycle est celle de l'atmosphère; les fuites feraient descendre cette pression inférieure plus bas, c'est-à-dire qu'il se produirait alors du vide pendant une partie du cycle, mais un petit reniflard permet aux pertes de se réparer d'elles-mêmes.

La machine de Lehmann comporte aussi un type vertical. Dans ces moteurs, le régulateur à force centrifuge agit sur une petite soupape qui diminue la pression lorsque l'accélération est trop grande; le piston aspire alors de l'air par le reniflard pendant la ligne de basse pression.

89. — ***Machine de Rider.*** — Elle présente beaucoup d'analogie avec la précédente, mais elle est à deux cylindres (fig. 43). L'un d'eux renferme le piston moteur M, et est chauffé par le foyer; l'autre, dans lequel se meut le déplaceur D, est enveloppé d'une circulation d'eau froide; les deux cylindres communiquent d'une manière permanente par le conduit *cc*, dans lequel se trouve noyé le régénérateur R, que l'on peut facilement extraire pour le nettoyage.


Fig. 43

Les mouvements des pistons M et D sont reliés par un arbre A, sur lequel sont calées les deux manivelles *m* et *d*, sous un angle de 100° environ. Le fonctionnement est donc analogue à celui de la machine de Lehmann ; dans la position de la figure, l'air chaud est refoulé vers le réfrigérant par le piston M, il cède au régénérateur une partie de sa chaleur, et sa pression se maintient assez bas.

1. La machine de Woodbury (*Revue Technique de l'Exposition de 1889*) est la seule qui, à notre connaissance, fonctionne à haute pression, elle est nécessairement munie d'une pompe pour compenser les fuites, on la construit pour de grandes puissances, et son fonctionnement est économique.

La machine actionne une petite pompe à double effet, chargée d'entretenir la circulation d'eau froide.

Le moteur Rider est construit pour de faibles puissances $\left(\frac{1}{3} \text{ à } 1\frac{1}{4} \text{ ch.}\right)$ et est souvent lié à une pompe élévatoire; d'après les recherches de M. Schœttler, le cylindre déplaceur absorbe environ la moitié du travail indiqué, et le travail au frein n'est que les 0.40 de ce qui reste ; c'est-à-dire que 0.60 sont absorbés par le frottement des garnitures de piston ; celles-ci sont en cuir, et sont établies à l'entrée du cylindre, où elles ne sont pas exposées à une température trop élevée.

L'effet du régénérateur est très sensible, il a pour effet de doubler le travail pour la même consommation de combustible, mais celle-ci est encore très élevée (11 à 12 kilogrammes par cheval au frein). La quantité d'air est maintenue constante dans la machine au moyen d'un reniflard qui s'ouvre lorsque la pression devient inférieure à la pression atmosphérique.

90. — *Observations sur les machines à cycle fermé.* — Les expériences de consommation poursuivies sur les machines peuvent avoir pour objet de déterminer leur valeur industrielle; on se borne alors à mesurer le travail que les moteurs produisent au frein (premier fascicule n°s 157 a 170), et on pèse le combustible absorbé par le foyer.

Pour analyser l'emploi de la chaleur développée par le combustible, il faut étudier le diagramme du travail, soit par le procédé examiné au n° 24, soit par le diagramme entropique. Mais une difficulté se présente; le cycle entropique, par exemple, donne la valeur de la chaleur absorbée ou cédée par le gaz pour une transformation quelconque, mais il n'indique pas si la chaleur est empruntée ou restituée au régénérateur. Il est nécessaire, par conséquent, d'évaluer directement la chaleur abandonnée par la machine au réfrigérant; par comparaison avec le diagramme entropique, on déterminera la quantité de chaleur absorbée par le régénérateur et qui est restituée à la course motrice suivante. On peut donc également déduire du diagramme entropique la quantité de chaleur réellement absorbée à la source T_1 par le cycle.

Comme contrôle de cet essai, on peut mesurer directement la quantité de chaleur communiquée à la machine, mais cette détermination doit être basée sur la composition des produits de la combustion, et la mesure de leur volume et de leur température au moment où ils quittent la

machine. En opérant autrement, on s'exposerait à attribuer aux imperfections du cycle les pertes de chaleur qui sont dues à une combustion incomplète, ou à d'autres causes [1]. Pour la traduction, en diagramme entropique, du diagramme ordinaire du travail, on se servira avec avantage de l'équation donnée au n° 24; lorsque les lignes de détente ou de compression satisfont à l'équation :

$$pv^k = p_1 v_1{}^k$$

k ayant une valeur quelconque, la question a été résolue au n° 36.

Il y a cependant quelque difficulté, dans les machines à déplaceur, à utiliser les propriétés des cycles, attendu que le fluide n'est pas homogène, mais se compose de deux parties de température différente.

§ II

Machines à cycle ouvert.

91. — Nous désignons ainsi les machines dans lesquelles le cylindre est mis, à chaque évolution, en communication avec l'atmosphère, et expulse un poids d'air qui est remplacé par un poids équivalent emprunté à l'extérieur. Le fluide évoluant n'est pas ramené par la machine à son état initial, et c'est par une approximation plus ou moins justifiée que l'on peut assimiler ces machines sans cycle à celles du paragraphe précédent.

La machine d'Ericsson connue sous le nom de *premier type*, date de 1850, elle comprend un cylindre d'alimentation et un cylindre moteur; un régénérateur est placé sur le passage de l'air froid, et il est traversé à chaque tour par l'air chaud de l'échappement; l'inventeur avait construit aux États-Unis une machine de dimensions colossales destinée à la propulsion d'un navire; les pistons moteurs, au nombre de quatre, avaient $4^m,20$ de diamètre et $1^m,80$ de course; la puissance, qui devait être de 600 chevaux, n'atteignit que la moitié de ce chiffre, avec une consommation qui, paraît-il, était inférieure à celle des machines à vapeur de l'époque.

1. MM. Schroeter, Schoettler, Brauer et Slaby, ont étudié quelques moteurs à air chaud dans le sens qui vient d'être indiqué. Nous ne pouvons, sans sortir des limites imposées à cet ouvrage, rendre compte de leurs belles recherches; le lecteur en trouvera une excellente analyse dans l'ouvrage de Knoke, déjà cité: *Die Kraftmaschinen des Kleingewerbes*.



L'encombrement et le poids de cette machine étaient énormes.

Le second type du moteur Ericsson (1855) est plus connu, il a été décrit dans tous les ouvrages classiques, et a fait en France l'objet d'expériences conduites avec soin ([1]).

Le trait le plus caractéristique de cette machine était sa disposition de leviers, destinée à relier le déplaceur au piston moteur, disposition souvent imitée depuis lors (88).

La dernière machine d'Ericsson est à cycle fermé, comme celle de Lehmann; elle se construit sous le nom de *moteur domestique*, pour des puissances inférieures à un cheval ([2]).

92. — *Moteur à foyer intérieur.* — La première machine de ce genre a été produite en France, par Belou ([3]); la combustion a lieu dans une

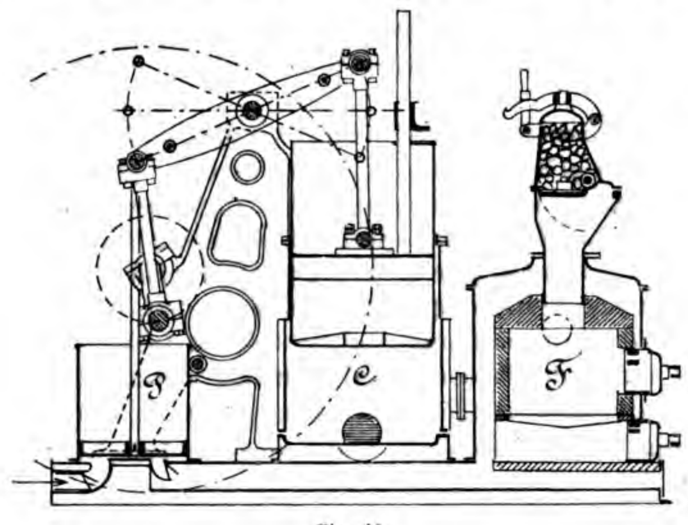


Fig. 44

chambre fermée dans laquelle l'air est refoulé par une pompe. On ne saurait concevoir, pour ces machines, aucun cycle fermé, attendu qu'une

1. Armengaud. — *Moteurs à vapeur*, t. II, pl. 49.

2. G. Richard. — Mémoire cité p. 344 à 348, *Revue Technique de l'Exposition de 1889.*

3. Ledieu. — *Les Nouvelles Machines marines.*

G. Richard. — Mémoire cité. Le moteur Hock est probablement le premier qui se soit répandu. La machine de Buckett, qui au début avait ses cylindres en *tandem*, comme le moteur Hock, ressemble aujourd'hui à celle de Brown.

certaine quantité d'air frais est nécessaire pour la combustion ; les produits admis au cylindre moteur sont donc expulsés à chaque course, et remplacés par un poids de fluide équivalent, envoyé par la pompe alimentaire.

Nous décrirons principalement le moteur de *Brown*, de New-York, qui constitue un type fort simple, dont on retrouve les dispositions dans plusieurs autres machines d'origine postérieure.

Cette machine, figure 44, est entièrement montée sur un bâti en fonte, sans aucune maçonnerie apparente; elle comprend un cylindre de travail C, et une pompe alimentaire P, dont les pistons sont reliés aux extrémités d'un balancier à bras égaux; l'un des bras du balancier actionne l'arbre moteur. Les sections du piston alimentaire et du piston moteur sont différentes, car les volumes engendrés par ces organes correspondent respectivement : l'un, à l'air froid aspiré dans la machine à chaque révolution, l'autre aux produits de la combustion, qui, au moment où ils s'échappent, possèdent encore une température assez élevée.

La pompe alimentaire refoule l'air au foyer F, partie en dessous, partie au dessus de la grille (seul moyen de ne pas déranger le combustible par des *à-coups* dus au mouvement du fluide); le foyer est entièrement clos; il est alimenté au coke, que l'on introduit par une trémie, et est disposé dans une enveloppe en fonte à joints étanches, dont les parois sont préservées par une maçonnerie réfractaire. Cette enveloppe est en communication, par un tuyau, avec une chapelle de distribution munie de deux soupapes : l'une sert pour l'introduction dans le cylindre C, l'autre pour l'échappement des gaz de ce cylindre dans l'atmosphère.

Le fonctionnement de la machine comprend donc les phases suivantes :

1°) *Aspiration*, par la pompe alimentaire, d'un certain volume d'air, AB, figure 45 (la pompe est supposée sans espace nuisible); cet air est à la pression et à la température de l'atmosphère;

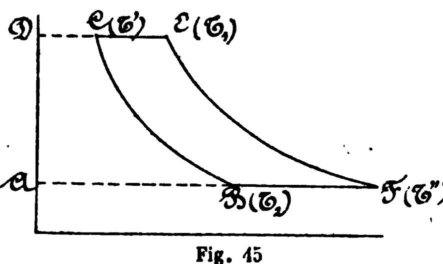


Fig. 45

2°) *Compression adiabatique* (donc avec élévation de température) de ce volume d'air, jusqu'au moment où sa pression est égale à celle du foyer; à partir de ce moment, la soupape

de refoulement de la pompe s'ouvre, et le volume CD pénètre dans le foyer. Pendant ce refoulement, la pression n'augmente pas beaucoup, bien que l'admission au moteur soit déjà fermée, et que l'air refoulé s'échauffe et s'unisse au combustible; cette circonstance tient en partie à ce que le volume du cendrier, du foyer et des conduits, interposé entre le piston alimentaire et la soupape d'introduction au cylindre, est assez considérable ;

3°) *Échauffement* de l'air au contact des parties chaudes du foyer et du combustible, union de l'air refoulé avec le combustible et formation d'un volume gazeux à haute température, composé de l'azote formant le résidu abandonné par l'oxygène, de l'excès d'air, de l'acide carbonique, et probablement d'oxyde de carbone et d'un peu de vapeur d'eau;

4°) *Admission* de ce mélange, (dont le poids est supérieur à celui de l'air refoulé de tout le carbone brûlé), sous le piston moteur. Les diagrammes souvent relevés sur cette machine montrent que la pression d'admission est à peu près constante;

5°) *Détente* adiabatique du fluide enfermé dans le cylindre jusqu'au moment où le piston arrive à l'extrémité de sa course;

6° *Échappement*, dans l'atmosphère, du poids de fluide admis ; cette période est suivie, dans le réglage adopté par M. Brown, d'une compression incomplète, dans l'espace mort, analogue à celle que l'on réalise presque toujours dans les machines à vapeur.

On peut se demander d'abord jusqu'à quel point l'opération complexe indiquée au 3° ci-dessus, est comparable à l'échauffement d'un gaz permanent, attendu qu'une transformation chimique s'accomplit en même temps. Or, supposons que l'on brûle précisément la quantité de carbone correspondant à l'oxygène de l'air [1], la composition en poids sera après combustion :

Carbone. . . .	6	Acide carbonique
Oxygène . . .	16	
Azote	51.6	
	73.6	

soit pour un poids total égal à l'unité :

Acide carbonique . . .	0.297
Azote	0.703

1. On rappelle que la composition en poids de l'air est 23,58 d'oxygène pour 76,42 d'azote.

Soient C' le calorique spécifique moyen, sous pression constante, des produits de la combustion définis comme ci-dessus, C_a la chaleur spécifique de l'acide carbonique et C_n celle de l'azote, toutes deux à pression constante, on a :

$$C' = 0.297\ C_a + 0.708\ C_n$$
$$C_a = 0.2169\ C_n = 0.2438$$

d'où :

$$C' = 0.2358$$

et l'on voit que le calorique spécifique moyen des produits de la combustion diffère peu de celui de l'air (0.23741).

D'ailleurs, le poids du mélange n'est pas beaucoup plus considérable que celui de l'air nécessaire pour la combustion ; on voit, en effet, que le carbone n'entre, dans le kilogramme du mélange, que pour 0,082.

Cette remarque préliminaire étant admise, nous pouvons approximativement envisager de la manière suivante les opérations décrites plus haut.

Soient ABCD le diagramme des pressions dans la pompe, DEFA le diagramme des pressions dans le cylindre. La ligne DE représente le volume de l'air admis sous le piston moteur ; il correspond au poids refoulé par la pompe, et peut être considéré comme provenant du volume CD, dilaté sous pression constante [1] ; E F est la ligne de transformation adiabatique pendant la détente, FA correspond à l'expulsion, mais l'ensemble des deux lignes FA, AB, parcourues en sens contraire, équivaut à la contraction FB, sous une pression constante égale à la pression atmosphérique, du volume initial FA. L'ensemble des deux diagrammes équivaut donc au cycle fermé CEFB, car, au point B, le fluide est revenu à son état initial, il ne rentre pas dans le cycle, mais il est remplacé par un corps identique.

Le cycle fictif CEFB est formé de deux adiabatiques et de deux lignes de pression constante. En désignant les températures par les lettres inscrites sur la figure, et en s'imposant la condition que le travail recueilli doit être maximum, on a, comme au n° 86 :

$$T' = T'' = \sqrt{T_1\ T_2}$$

1. Il semblerait que la pression, stationnaire lorsque rien n'est demandé au foyer, dût baisser fortement lors de l'introduction, mais il est probable que l'air ne circule et ne s'échauffe que lors de l'appel du cylindre moteur, car la pression se maintient constante pendant cette période.

T_1 et T_2 peuvent être fixées à 723° et 323° abs. (450° et 50° C.) par exemple, d'où :

$$T' = T'' = 483$$

Or, en appelant p_1 et p' les pressions extrêmes, on doit aussi trouver :

$$\frac{T'}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

d'où :

$$p_1 = 3.89 \times p_2 = 3.89 \text{ atm.}$$

Les volumes du cylindre et de la pompe seraient dans le rapport des températures T'' et T_2, soit comme 1,5. Ce rapport est d'environ 1,65 dans la machine de Brown.

Le rendement du cycle serait, entre les températures indiquées:

$$\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = \frac{1}{3} \text{ environ}$$

celui du cycle de Carnot serait de 0,55.

Le rendement observé par M. Slaby entre 718° et 290° abs. a été environ le tiers de celui qu'aurait donné le cycle de Carnot, mais cette proportion de chaleur n'est pas transformée en travail utile, car la perte par les frottements est de 25 % environ.

Le foyer paraît avoir un rendement très médiocre, à cause de la difficulté de conduire le feu ; les pertes par rayonnement sont aussi très considérables, il n'est pas rare que le tuyautage de communication du foyer au cylindre prenne la température du rouge sombre.

Malgré toutes ces causes de déchet, les petits moteurs ne consomment guère que 2 kilogrammes de coke par cheval utile [1].

Le réglage du moteur Brown se fait au moyen d'un régulateur de Porter, ouvrant une petite valve sur le tuyau de communication de la pompe avec le foyer. Les garnitures de piston, autrefois en cuir comme

1. Nous avons obtenu sur les machines de 6 chevaux installées à bord des phares flottants de la côte belge: 1 k., 18 de coke par heure et par cheval utiles *Annales des Travaux publics de Belgique*, t. XLI. Les expériences faites au phare de Tino (Italie) ont cependant donné 1 k., 90 de coke pour des machine, de 9 chevaux. *Minutes of Proccedings of the Institution of C. E.*, vol. LXXXVII, 1886.

dans beaucoup de machines à air chaud, devaient être graissées à l'huile de baleine, qui résiste à de très hautes températures; les garnitures sont actuellement en métal, comme dans les machines à vapeur.

93. — Le moteur *Bénier* [2] est du même genre que celui de Brown, mais l'intérieur du cylindre communique directement avec le foyer, au dessous duquel il est installé; la distribution est donc appliquée sur le foyer, et non sur le cylindre; l'entrée de l'air comprimé est produite par un tiroir double, qui remplace en même temps les soupapes d'aspiration et de refoulement de la pompe (dans le moteur Brown, ces organes font beaucoup de bruit). L'échappement est réglé par une soupape, et il y a une circulation d'eau autour de la partie supérieure du foyer.

Le chargement du foyer est continu et automatique; il se fait au moyen d'un tiroir glissant, dans lequel une petite roue à godets distribue du coke concassé.

La position du cylindre diminue le rayonnement extérieur, mais elle expose le piston à une température élevée; le constructeur a tourné très ingénieusement l'inconvénient qui en résulterait pour les surfaces frottantes. Le moteur Bénier, le plus moderne de tous, parait fort économique; la consommation du moteur de 5 chevaux serait de 1 kilogramme de coke de bonne qualité par heure et par cheval; la dépense de graissage est fort minime.

94. — *Conclusions.* — Le moteur à air chaud emploie un fluide qu'on peut se procurer partout, il peut fonctionner entre des températures très écartées sans que la pression devienne excessive; cet écart de température est tout à l'avantage du rendement calorifique. Mais le cycle est très imparfaitement réalisé, c'est-à-dire que la machine réelle s'écarte toujours beaucoup de la machine parfaite qui fonctionnerait entre les mêmes limites de température; ce inconvénient compense dans une certaine mesure la supériorité due à l'écart des températures T_1 et T_2. Le défaut capital du moteur à air chaud est son encombrement, qu'il est difficile de réduire, même en adoptant des cycles fermés, soit parce que l'on craint l'effet des hautes pressions sur un système qui a déjà beau-

2. *Porte feuille des Machines*, 1888, et *Revue de l'Exposition de 1889*. Article cité p. 291.



coup à souffrir par suite de la température élevée à laquelle il est soumis, soit que l'on désire, en abaissant la pression inférieure du cycle, réparer automatiquement les fuites d'air.

Le moteur à air chaud l'emporte, pour l'économie, sur les machines à vapeur de faible puissance; son encombrement, et quelques difficultés d'ordre pratique [1] font qu'il ne se répand que lentement, et pour des cas spéciaux.

1. Ces difficultés sont très relatives; le personnel ouvrier est plus familiarisé avec la conduite et l'entretien des machines à vapeur; dans beaucoup de moteurs, certaines parties fréquemment portées au rouge, finissent par se ruiner, et leur renouvellement est difficile. La question du graissage des garnitures et du chargement automatique est plus ou moins heureusement résolue.

CHAPITRE IV.

Machines à gaz ou à mélanges détonants.

95. — Ces moteurs sont des machines thermiques à combustion intérieure; le combustible est le gaz d'éclairage, qui forme avec l'air un mélange détonant; mais on se sert également des gaz pauvres fabriqués spécialement pour la production de la force motrice, ainsi que de la vapeur de pétrole, que l'on enflamme à l'intérieur du cylindre.

On a fait remonter la première idée des machines à gaz à Huyghens et à l'abbé Hautefeuille, qui, vers la fin du XVIIe siècle, avaient signalé comme possible l'emploi de la poudre à canon; à la fin du siècle dernier, Lebon, inventeur du gaz d'éclairage, paraît avoir eu des idées assez nettes sur l'emploi du gaz comme force motrice, puis Niepce, en 1806, revient à l'idée d'employer la poudre de lycopode [1]. Quelques inventeurs, et notamment Barnett, qui, en 1838, indique l'allumage par transport de flamme, Barsanti et Matteucci, Hugon et Sir W. Siemens, ont préparé la réalisation pratique de la machine à gaz, mais sans parvenir à aucun résultat pratique. La période industrielle du nouveau moteur date de Lenoir, qui produisit, en 1860, sa machine à air dilaté, la première qui ait fonctionné régulièrement [2].

Le moteur *Lenoir* (qu'il ne faut pas confondre avec le moteur récent du même inventeur), était à double effet; chaque extrémité du cylindre comportait un tiroir d'admission disposé de manière à opérer le mélange intime du gaz et de l'air aspirés par le piston à la pression atmosphérique; une étincelle électrique, provoquée par un contact automatique, faisait détoner la charge, qui fournissait son travail de détente; l'échappement s'opérait pendant la course rétrograde.

Les résultats obtenus sur ce moteur dans les expériences du Conservatoire des Arts et Métiers furent les suivants:

1 Voir les *Réflexions* de Sadi Carnot.
A. Witz. — *Traité des Moteurs à gaz*, 3e édit., Paris, E. Bernard et Cie.
2. Armengaud. — *Traité des Moteurs à vapeur*, t. II, p. 441, pl. 50.

DIAMÈTRE	COURSE	TOURS par minute	TRAVAIL au frein	CONSOMMATION de gaz par cheval-heure
0.18. . .	. 0.10 .	. . 130 . .	. . 0.57 . .	. 8^{m3}
0.24. . .	. 0.12 .	. . 107 1/2 .	. . 1 . .	. 2.700

Les moteurs *Hugon*, puis la machine atmosphérique de *Langen et Otto*, (1867) consommaient moins de gaz que la machine de Lenoir, mais après avoir joui d'une certaine vogue, ils disparurent en 1878 devant le moteur à *quatre temps*, de Otto, qui a servi de modèle à un très grand nombre de machines produites depuis cette époque.

Le type original, très peu modifié par ses inventeurs, peut encore être considéré comme l'un des meilleurs qui existent; il paraît établi que le principe de fonctionnement du moteur à quatre temps est dû à M. *Beau de Rochas* (1862), qui l'avait fait breveter, mais sans jamais le réaliser.

Les moteurs à gaz diffèrent théoriquement par leurs cycles; aucun d'eux ne comporte du reste un cycle fermé, puisque les produits de l'explosion sont impropres à alimenter une nouvelle combustion, et doivent être expulsés du cylindre après la phase motrice, pour être remplacés par un nouveau mélange.

Les gaz que l'on peut utiliser sont surtout le gaz d'éclairage, les hydrocarbures volatils (vapeur de naphte, de benzine, de pétrole), les gaz pauvres, etc.

§ 1.

Combustion et explosion.

96. — Le gaz d'éclairage est un mélange, en proportions variables, d'hydrogène, d'oxyde de carbone, de gaz des marais, de gaz oléfiant; il renferme quelquefois, mais en faible quantité, des gaz inertes comme l'azote et l'acide carbonique, et lorsqu'il est mal épuré, de l'hydrogène sulfuré [1]; ce dernier élément est combustible, mais il est toujours dans le gaz en quantité négligeable.

1. Pour la détermination de la puissance calorifique des combustibles en général, la méthode expérimentale rapide se substitue de plus en plus au procédé basé sur l'analyse. M. Mahler, sous les auspices de la Société d'Encouragement a perfectionné fort heureusement la bombe calorimétrique de MM. Berthelot et Vieille. — Voir son mémoire (Baudry, 1893).



Les éléments combustibles sont l'hydrogène, l'oxyde de carbone, le gaz des marais, l'éthylène et les autres carbures d'hydrogène. Il n'y a cependant pas intérêt à augmenter la proportion d'hydrogène, malgré le grand pouvoir calorifique de ce corps, car l'hydrogène est fort léger, et il abaisse le pouvoir calorifique du gaz rapporté à l'unité de volume.

Lorsque l'on tient compte de la vapeur d'eau formée, les produits volumétriques de la combustion des divers éléments composants avec l'oxygène s'établissent d'après le tableau suivant :

COMBUSTIBLE	COMBURANT	PRODUITS	
		H_2O	CO_2
H 2 volumes .	O 1 volume . .	2 volumes . . .	
CO 2 » .	O 1 » . .	. . . .	2 volumes
CH_4 1 volume .	O 2 volumes .	2 volumes . . .	1 volume
C_2H_4 1 » . .	O 3 » . .	2 volumes . . .	2 volumes

On voit que l'hydrogène et l'oxyde de carbone sont les seuls gaz qui s'unissent à l'oxygène avec réduction de volume.

La composition moyenne du gaz d'éclairage est très variable, non seulement d'une ville à l'autre, mais souvent d'une semaine à l'autre dans une même usine ; on peut s'en faire une idée d'après le tableau suivant, qui donne la composition du gaz en volume ; la densité varie naturellement aussi, le mètre cube de gaz à 0° sous la pression atmosphérique pèse en moyenne 0 k., 470.

ÉLÉMENTS	MANCHESTER (1)	NEW-YORK (1)	KILMARNOCK (2)	LONDRES (3)
H. . . .	45.58	30.30	43.6	48.56
CH_4 . . .	34.9	24.30	42.8	37.73
CO . . .	6.64	26.50	4.3	4.19
C_2H_4. . .	4.08	15 »	5.55	4.07
C_4H_8. . .	2.38	—		
H_2S . . .	0.29	. .	. .	. .
N. . . .	2.46	2.40	2.70	4.93
CO_2 . . .	3.67	1.00	1.05	0.52
O. . . .	. .	—		
H_2O . . .	. .	0 50		
	100.00	100.00	100.00	100.00

Si l'on prend, par exemple, la composition donnée par la dernière colonne, on peut comparer les volumes des corps combustibles et celui de l'oxygène nécessaire pour les brûler, au volume des produits de la combustion, et l'on trouve, d'après les réactions qui se produisent et les données du premier tableau :

VOLUMES DES COMPOSÉS	VOLUMES DE L'OXYGÈNE	VOLUMES DES PRODUITS H_2O	VOLUMES DES PRODUITS CO_2
H 48.56. .	24.28	48.56	
CH_4 37.73. . .	75.46	75.46	37.73
CO 4.19 . . .	2.10	. . .	4.19
C_2H_4 4.07. .	12.21	8.14	8.14
94.55	114 05	132.16	50.06
208.6		182.22	

1. D'après Dugald Clerk. — The Gas Engine. — London, Longmans Green et C°, 1886.

2. Essai du 9 mars 1888, par MM. Kennedy et C.-J. Wilson. — Essai du moteur Griffin.

3. Essai du 21 septembre 1888, par les mêmes auteurs. — Essais effectués sous les auspices de la *Society of Arts*. Voir Journal de cette Société, 15 février 1889.

Cette série d'essais, à laquelle nous ferons plusieurs fois allusion, se trouve rapportée dans le nouveau Traité de M. G. Richard 1897, 1er vol., pp. 174 à 217.

Il faut observer que l'oxygène est pris à l'air atmosphérique, dans lequel les proportions relatives d'oxygène et d'azote, en volume, sont 21,33 et 78.67.

Le volume d'oxygène qui résulte de la deuxième colonne est donc mélangé avec un volume d'azote égal à 420,64, qui reste parmi les produits de la combustion; le volume primitif et le volume final sont augmentés d'autant, ce qui donne :

Volume des gaz combustibles avant la combustion.			94.55	629.24
» de l'oxygène de l'air	114.05		534.69	
» de l'azote	420.64			
Volume des produits :	Eau		132.16	
	Acide carbonique		50.06	
	Azote		420.64	
			602.86	

La contraction produite par la combustion ou l'explosion est donc:

$$\frac{629.54 - 602.86}{629.24} = 0{,}04 \text{ environ.}$$

Comme conclusion très importante de cette étude, nous pouvons retenir ces deux faits: le volume d'air rigoureusement nécessaire pour brûler le gaz d'éclairage est de cinq à six fois le volume du gaz (1), et la combustion s'opère presque sans contraction.

La contraction relative diminue encore lorsque l'on suppose que le mélange est plus dilué, c'est-à-dire qu'il renferme plus d'air; comme le volume d'air admis généralement est environ le double de la proportion théorique, on voit que la contraction sera tout à fait négligeable.

La quantité d'air peut augmenter notablement (jusqu'à 14 volumes d'air pour un de gaz) sans que le mélange cesse de détoner par l'allumage, ou par l'étincelle électrique. Davy avait déjà trouvé que la raréfaction diminue l'inflammabilité; inversement, la compression l'augmente, c'est-à-dire que tel mélange, renfermant trop de gaz inerte pour détoner à la pression atmosphérique, fait encore explosion lorsqu'il a été porté, par une compression préalable, à une pression supérieure. Cette propriété est utilisée dans les moteurs alimentés aux gaz pauvres.

1. Au volume des produits combustibles, il faut en effet ajouter le volume des gaz inertes, de sorte que 100 volumes de gaz doivent être mélangés avec 534 volumes d'air.

97. — *Circonstances de l'explosion.* — M. Dugald Clerk a relevé la pression produite ainsi que durée de l'explosion en vase clos, en se servant d'un indicateur Richards dont le tambour était mû par un appareil d'horlogerie; il a obtenu des courbes analogues à celles de la figure 46, dans lesquelles les abscisses représentent, à une échelle

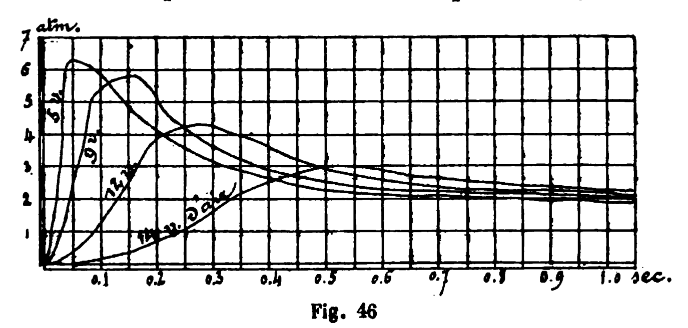


Fig. 46

connue, les temps écoulés depuis l'allumage; les ordonnées représentent les pressions. Les différentes courbes correspondent à des richesses différentes du mélange, depuis 1 *vol.* de gaz pour 5 *vol.* d'air jusqu'à 1 *vol.* de gaz pour 14 *vol.* d'air.

La température T_1 à l'instant initial étant connue, ainsi que la pression, qui est celle de l'atmosphère, on pourrait déduire des courbes la température à chaque instant; en effet, si le mélange ne subissait pas de contraction, on aurait, puisqu'il s'agit d'une transformation à volume constant, et que les valeurs de R seraient les mêmes avant et après l'explosion[1] :

$$\frac{p}{p_a} = \frac{T}{T_1}$$

mais, à cause de la contraction, on devra écrire :

$$\frac{p}{p_a} = \frac{R'T}{RT_1} = 0.96\frac{T}{T_1}$$

1. Dans un mélange de plusieurs gaz, la valeur de R à considérer dans l'équation fondamentale est celle que donnerait un gaz ayant la densité moyenne du mélange; comme il y a contraction, la valeur de R, après combustion, sera un peu plus faible; si on l'appelle R', on aura :

$$\frac{R'}{R} = \frac{96}{100} \text{ environ}$$

Ce rapport augmente, et se rapproche de l'unité, au fur et a mesure que la richesse du mélange diminue.

Le degré de contraction ne serait connu que si l'on possédait, en chaque point de la courbe, la quantité de gaz brûlé; il est très probable que la combustion n'est pas complète au moment où la pression atteint son maximum, la chute de la courbe, au-delà de ce point, est due à ce que l'effet refroidissant de la paroi l'emporte sur la chaleur développée par la combustion ultérieure.

Toutefois, le degré de contraction étant très faible, ne peut altérer beaucoup le résultat; M. Dugald Clerk a trouvé, pour le gaz de Glasgow, les résultats suivants, la température centigrade initiale étant 18°,7, et le mélange étant à la pression atmosphérique:

NATURE DU MÉLANGE		PRESSION au-dessus de l'atmosphère	PRESSION ABSOLUE	TEMPERATURE CENTIGRADE correspondante
Gaz	Air			
1 vol.	13 vol	3.53 atm.	4.53 atm.	1047°
1 —	11 —	4.37 —	5.37 —	1265
1 —	9 —	4.7 —	5.7 —	1384
1 —	7 —	6.05 —	7.05 —	1780
1 —	5 —	6.5 —	7.5 —	1918

La température théorique au moment où la combustion est complète pourrait être calculée au moyen des pouvoirs calorifiques de tous les éléments combustibles du mélange, car toute la chaleur développée par la combustion est employée à élever à la température inconnue, sous volume constant, tous les produits formés, y compris l'eau provenant de l'hydrogène, ainsi que les gaz inertes.

Le pouvoir calorifique du gaz est variable d'après sa composition; on a, par exemple, pour celui de Londres, dont l'analyse est indiquée au n° 97:

ELEMENTS combustibles	PROPORTION en volume	POIDS spécifiques	POIDS par mètre cube	POUVOIR calorifique (1)	CHALEUR dégagée
H. . . .	0.4856	0.0896	0.0437	29000	1267.30
CH_4 . . .	0.3773	0.716	0.2701	12000	3241.20
CO . . .	0.0419	1.254	0.0525	2435	127.84
C_2H_4. . .	0.0407	1.254	0.0510	11500	586.50
					5222.84

1. Pour les éléments qui donnent lieu à la formation de vapeur d'eau, le pouvoir calorifique est obtenu en tenant compte de ce que la vapeur existe à l'état gazeux. — V. *les Tables* de M. Berthelot, 1892.



Ce gaz renferme en outre $0^{m^3},0493$ d'azote et $0^{m^3},00052$ d'acide carbonique.

Pendant la combinaison du gaz avec $1^{m^3},1405$ d'oxygène, il y a formation de $1^{m^3},3216$ de vapeur d'eau et de $0^{m^3},5006$ d'acide carbonique; l'azote ($4^{m^3},2064$) s'ajoute à celui qui se trouvait dans le gaz. La composition en poids des produits de la combustion est donc :

PRODUITS	VOLUMES	POIDS SPÉCIFIQUES	POIDS
Eau	$1^{m^3}3216$	0.8064 [1]	1^k0657
Acide carbonique	0 . 5011	1.977	1.0000
Azote	4 . 2557	1.254	5.3408

Le poids spécifique moyen des produits brûlés, ramenés à zéro, la vapeur étant condensée, est de 1,33 par rapport à l'eau.

La chaleur spécifique à volume constant de la vapeur d'eau surchauffée est variable (nº 63), elle augmente et tend vers la valeur 0,36 au fur et à mesure que la vapeur est plus surchauffée.

Le problème de la détermination finale de la température serait complètement résolu si l'on connaissait les chaleurs spécifiques, car, en appelant x la température réalisée, et en admettant que les corps en présence soient à 0° C. avant l'explosion, il suffirait d'introduire les données des tableaux précédents dans l'équation :

$$Q = x\,(pc + p'c' + \ldots.)$$

en appelant Q la chaleur dégagée, $p p'$ etc., les poids des gaz formés, $c\,c'$... leurs chaleurs spécifiques sous volume constant.

Lorsqu'on adopte le chiffre de 0,36 indiqué plus haut pour la chaleur de la vapeur à volume constant, et que l'on prend les autres valeurs de c dans le tableau donné au numéro 11, on trouve pour x une température au moins double de celle obtenue par M. Dugald Clerk dans les expériences relatées.

98. — Cette grande différence ne tient pas à la composition du gaz,

1. La densité de la vapeur est celle qu'elle aurait à 0° sous la pression atmosphérique, c'est-à-dire si elle se comportait comme un gaz ; le poids spécifique peut donc se déduire du poids moléculaire.

le chiffre de 5.200 calories environ par mètre cube est du reste normal [1]; on a beaucoup discuté pour en trouver les causes et différentes opinions ont été émises :

1° Hirn attribuait la grande différence signalée à l'effet refroidissant de la paroi.

2° La combustion, au lieu d'être complète au moment où la courbe accuse le maximum de pression, n'est probablement effectuée qu'en partie ; il est impossible de baser sérieusement les calculs sur les pressions accusées par la courbe, parce que l'action refroidissante de la paroi se combine avec l'effet du retard signalé ici dans la combustion.

3° L'arrêt de la combustion est attribué par quelques savants à la *dissociation* ; ce phénomène, cependant, paraît peu probable aux températures réellement produites, car il ne commence, pour l'eau et l'acide carbonique, qu'à des températures plus élevées.

4° Les expériences de MM. Mallard et Le Châtelier [2] ont prouvé que les chaleurs spécifiques augmentent pour les températures très élevées que nous considérons ici; rapportée au volume moléculaire, la chaleur spécifique à volume constant serait, pour les gaz simples :

$$c = 4.8 + 0.0006\,t$$

t étant la température centigrade.

Pour les gaz simples, le poids moléculaire étant le double du poids atomique, il suffira de diviser la valeur ci-dessus par le double du poids atomique, pour obtenir la valeur usuelle, c'est-à-dire rapportée à l'unité de poids. La différence $C - c$ reste constante [3].

Pour les corps que l'on peut avoir à considérer dans les machines à gaz, les valeurs de c et C sont, rapportées au kilogramme :

1. M. Slaby, dans une de ses expériences, a trouvé 4.875 calories seulement par mètre cube; par contre, beaucoup d'analyses et d'essais directs (V. Witz. ouvrage cité, p. 90) donnent des puissances calorifiques comprises entre 5.000 et 6.000 calories.

2. *Annales des Mines*, 8e série, 1883, t. IV. — Les trois mémoires insérés dans ce volume sont relatifs à la température d'inflammation, à la vitesse de propagation de la flamme, et aux chaleurs spécifiques.

3. Cette différence n'est plus rigoureusement celle qui résulterait de l'équation $C - c = AR$, mais elle ne s'en écarte pas beaucoup.

NOMS DES CORPS	c	C
Acide carbonique	$0.0232\sqrt{T}$	$0.0446 + c$
Vapeur d'eau	$0.2619 + 0.000182\,T$	$0.1091 + c$
Azote.	$0.1651 + 0.0000214\,T$	$0.06995 + c$
Oxygène.	$0.14488 + 0.00001875\,T$	$0.06138 + c$

On pourrait aisément s'assurer que l'écart entre les chiffres ci-dessus et ceux donnés au n° 11 est très faible pour les températures *ordinaires*, et même pour celles réalisées dans les *moteurs à air chaud*.

Le rapport $\frac{C}{c}$ diminue lorsque la température augmente, puisque c augmente et que la différence $C - c$ est constante; ce rapport n'est donc pas constant, comme on l'admet pour les températures ordinaires. Pour les températures réalisées dans les machines à gaz, $\frac{C}{c}$ se rapproche de 1,3.

M. Witz a calculé les températures théoriques d'explosion à volume constant et à pression constante dans le cas de dilutions plus ou moins grandes; il a envisagé l'ensemble des produits comme un seul gaz homogène, dont les caloriques spécifiques c' et C' seraient :

$$c' = \frac{\Sigma pc}{\Sigma p}$$

$$C' = \frac{\Sigma pC}{\Sigma p}$$

p, c, C se rapportant à chacun des gaz composants, ce qui donne les valeurs :

$$c' = 0.285$$

$$C' = 0.37$$

$$\gamma = \frac{C'}{c'} = 1.3$$

Sans tenir compte d'aucun effet de paroi, et en supposant la combustion complète, M. Witz a trouvé, à *volume constant*, avec un gaz ayant un pouvoir calorifique (vapeur d'eau condensée) de 5.250 calories:

Pour 1 vol. de gaz avec 6 vol. d'air { tempér. centigr. : 2064° ; pression abs. : 8.6 atm.

résultat qui ne s'écarte plus trop de celui trouvé par M. Dugald Clerk, et dont les différences avec ce dernier s'expliquent très bien par l'effet de paroi, et par la combustion incomplète.

Les températures théoriques à pression constante se déduisent des précédentes en remarquant que la chaleur développée étant la même dans les deux cas, les températures doivent être dans le rapport de C, et *c'*.

Pour étudier les cycles des machines à gaz, il faudrait tenir compte, dans les transformations qui se produisent, de la variabilité de C' et *c'*, ce qui amènerait de grandes difficultés, mais comme la majeure partie des transformations s'effectuent à très haute température, nous ferons dès maintenant une convention importante : c'est que le mélange, avant comme après l'explosion, se comporte comme un seul gaz homogène, dont les chaleurs spécifiques seraient C' et *c'*

99. — *Composition de la charge.* — La composition la plus avantageuse n'est pas celle dans laquelle on associe au gaz le volume d'air strictement nécessaire à sa combustion, c'est-à-dire celle qui donne la température et la pression les plus élevées. Lorsqu'on augmente la dilution, le rendement du *cycle parfait* correspondant est abaissé, il est vrai ; mais aux températures très élevées, les imperfections des cycles réels augmentent, parce qu'on est obligé de refroidir le cylindre plus qu'on ne le ferait sans cela ; nous verrons, en effet, que pour permettre le fonctionnement les surfaces frottantes doivent être enveloppées d'eau. L'expérience établit qu'il vaut mieux, en somme, disséminer la chaleur dans un volume d'air inerte (ou même dans les gaz brûlés qui proviennent d'une explosion précédente) que de l'enlever par un excès de circulation d'eau autour du cylindre, parce que, dans ce dernier cas, la chaleur est totalement perdue pour le cycle, tandis que, dans le premier, elle ne fait que baisser de niveau.

Le refroidissement des parois pendant la course directe est, jusqu'aujourd'hui, un inconvénient nécessaire et accepté.

§ II

Cycles théoriques des machines à gaz.

100. — Pour cet exposé, nous suivons la marche indiquée par M. Witz ([1]) dans sa classification, c'est aussi à peu près celle de M. Dugald Clerk ; nous rencontrons les cycles théoriques dans l'ordre suivant:

Cycles à explosion, sans compression (Lenoir);

Cycles à explosion, avec compression (Otto);

Cycles à combustion avec compression (Dugald Clerk);

Cycles atmosphériques (Otto et Langen).

Nous avons fait remarquer (95) que toute machine à gaz est à cycle ouvert; néanmoins, comme l'entrée et l'échappement du mélange ont lieu à la même pression (celle de l'atmosphère), que le poids des gaz qui s'échappent à chaque période est égal au poids du mélange admis, et que la contraction est négligeable, on peut, moyennant certaines précautions, ramener les cycles ci-dessus à des cycles fermés.

a. — Cycles à explosion, sans compression. — En suivant la marche des pressions sur une courbe d'indicateur, fig. 47, on reconnaît que la ligne AB correspond à l'admission du mélange, à la pression atmosphérique; BC représente l'accroissement subit de pression produit par l'explosion, CD est la loi des pressions décroissantes pendant la détente supposée complète; la ligne DA est celle de l'échappement.

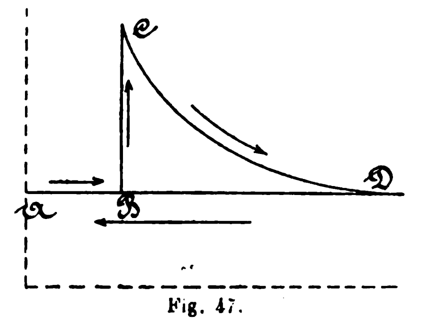


Fig. 47.

Abstraction faite de tout effet de paroi, la chaleur perdue à la source inférieure T_2 est celle qu'abandonne à l'atmosphère le mélange qui a travaillé, elle est la même que celle qu'il faudrait soustraire à la cylindrée pour abaisser sa température, sous la pression constante de l'atmosphère, jusqu'à sa valeur initiale; comme nous négligeons la contraction, cette transformation ramènerait précisément l'état du corps au point B, où il possède le même volume qu'à l'entrée. Pour achever d'expulser les gaz brûlés, il faut emprunter à la machine une quantité de travail égale

1. *Études sur les moteurs à gaz tonnant.* — Gauthier-Villars, 1884.

à celle que produit l'atmosphère pendant l'entrée du mélange. La ligne AB peut donc disparaître du cycle, qui équivaut au cycle fermé BCD.

b. — Cycles à explosion avec compression. — Lorsque la première course directe du piston, AB, commence (fig. 48), le volume A_0A d'une partie des produits de la combustion antérieure remplit l'espace nuisible; AB représente l'introduction, dans le cylindre, du mélange frais. La deuxième course est rétrograde, et comprime, suivant l'adiabatique BC, le volume des gaz emprisonnés dans le cylindre; puis, l'explosion CD, qui se produit au début de la troisième course, élève la pression et la température à volume constant; la troisième course accompagne la ligne de détente DE (nous supposons que la détente soit complète); la dernière course expulse dans l'atmosphère une partie du mélange brûlé, ce qui reste est maintenu dans l'espace nuisible, dont le volume est A_0A.

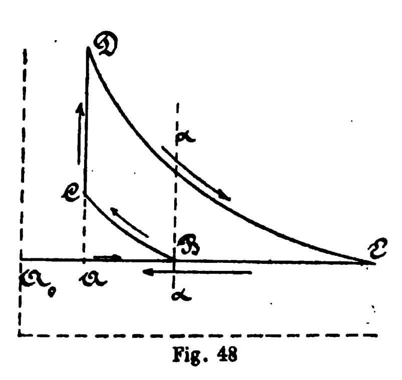


Fig. 48

Le cycle théorique que nous substituons à l'opération commence et se ferme au point B, et cette substitution se justifie absolument comme au numéro précédent; le contour du cycle fermé fictif remplaçant le cycle réel est donc BCDE.

c. — Machines à combustion et compression. — Le cycle fictif de ces machines ne diffère en rien de celui des machines à air chaud à foyer intérieur (Hock, Brown, Bénier, etc.), examinées au numéro 92; il comprend (fig. 49), une aspiration de gaz et d'air AB, la compression du volume $A_0A + AB$ dans l'espace nuisible suivant l'adiabatique BC; puis le mélange brûle progressivement et non en masse, ce qui produit la ligne d'échauffement sous pression constante CD; la détente adiabatique, DE, supposée complète, est suivie de l'expulsion des produits; cette dernière opération est indiquée au diagramme du travail par la ligne EA, mais, par un raisonnement identique à celui

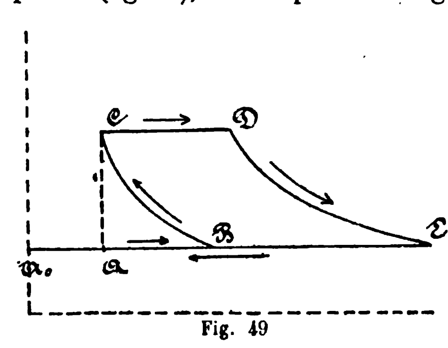


Fig. 49

qui a été fait déjà plusieurs fois, nous pouvons considérer la machine comme ayant le cycle fermé BCDE.

d. — *Moteurs atmosphériques.* — Le piston aspire la charge à la pression atmosphérique, opération traduite par la ligne AB (fig. 50), nous supposons qu'il n'y ait pas d'espace nuisible ; l'explosion se produit comme dans les moteurs du premier genre, mais la détente CD est beaucoup plus prolongée, et amène le mélange sous la pression atmosphérique, puis le piston comprime lentement les produits de la combustion, dont la température reprend peu à peu la valeur initiale ; à ce moment, le piston sera revenu au point B, et l'échappement BA neutralise totalement, comme dans les cycles précédents, la ligne AB d'introduction. Le cycle fictif est donc BCD ; la ligne DB peut ne pas différer beaucoup d'une ligne isothermique.

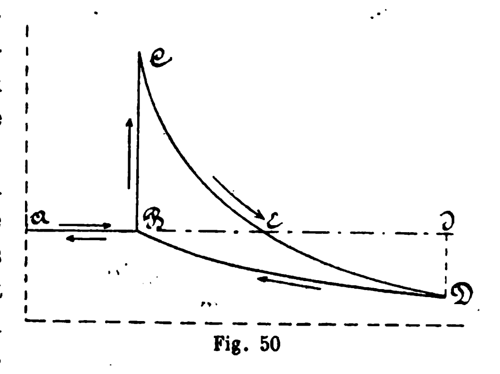


Fig. 50

101. — *Effet d'une détente incomplète.* — Lorsque la détente, au lieu d'abaisser le mélange à la pression d'échappement, se termine au moment où la pression p' est supérieure à la pression atmosphérique, la pression tombe brusquement suivant EG (fig. 51) ; cette modification est la seule que l'on aperçoive sur le diagramme du travail, et celui-ci est le même que si l'on avait refroidi le mélange en lui conservant un volume constant égal à A_0G. Mais comme les choses ne se passent pas ainsi en réalité, il importe de vérifier si la chaleur abandonnée par les gaz qui s'échappent, dans le procédé réel, est la même que celle qu'il faudrait leur soustraire, en supposant que la ligne EGB représente leur ligne de transformation. Nous allons démontrer que ces quantités de chaleur sont bien égales, et qu'on peut tenir compte de l'effet de la détente incomplète, en supposant que la chaleur enlevée et versée au

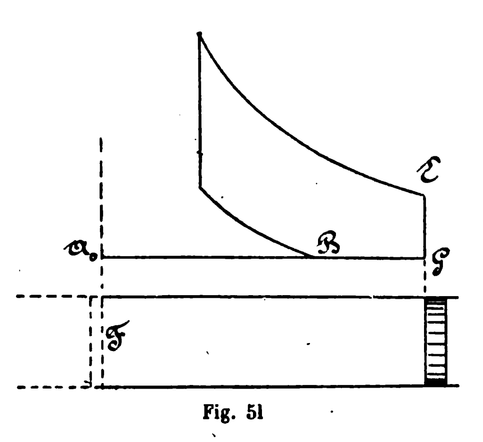


Fig. 51

réfrigérant est celle que l'on devrait soustraire pour transformer le gaz à volume constant (ligne EG) augmentée de celle qui correspond à la contraction à pression constante GB.

La chaleur à soustraire dans ce dernier procédé, que nous pouvons appeler le procédé fictif, est, pour la transformation EG, à volume constant :

$$q = c\,(T' - T'')$$

T' étant la température pour l'état E à la fin de la courbe de détente, et T'' la température pour l'état G, lorsque la pression est égale à celle de l'échappement ; soit T_2 la température à l'état B, lorsque le gaz a repris l'état initial, ce qui arrive forcément lorsqu'il est revenu à son volume primitif sous la pression atmosphérique.

Soit V le volume A_0G, ou le volume du cylindre au moment où la transformation commence ; on a, en appelant p_a la pression d'échappement (pression atmosphérique) :

$$p_a V = RT''$$

d'où :

$$q = c\left(T' - \frac{p_a V}{R}\right)$$

Dans le procédé réel, au moment où l'échappement s'ouvre, le gaz possède la pression p' du point E, il se précipite par conséquent dans l'atmosphère dont la pression p_a est inférieure, et tout se passe comme si le piston étant immobile, le fond du cylindre, F, se déplaçait vers la gauche comme un véritable piston, soumis de la part du gaz à une pression p' au moment où commence sa projection, et de la part de l'atmosphère à une résistance p_a. La transformation n'est pas réversible, mais lorsqu'elle s'arrête, le piston F est immobile, et l'équilibre des pressions existe ; le gaz a pris un accroissement de volume V', et il occupe, par conséquent le volume V + V' ; soit T''' sa température, qui est inconnue ; le gaz a perdu, par la diminution de son énergie, une quantité de chaleur équivalente au travail effectué, ce qui donne :

$$c\,(T' - T''') = A p_a V'$$

La quantité de chaleur à enlever au gaz pour le ramener au volume V sous la pression constante p_a, enlèvement qui s'opère effectivement par l'atmosphère, est :

$$q' = C\,(T''' - T'')$$

le fond du cylindre F est alors revenu à sa place, et l'état du fluide est

caractérisé par le point G, comme après la transformation EG, à volume constant.

D'ailleurs, on a :

$$p_a(V + V') = RT'''$$

En éliminant T''' et V' entre les trois dernières équations, après avoir remplacé T'' par sa valeur trouvée plus haut, et en utilisant la relation des gaz :

$$C - c = AR$$

qui est très approximativement exacte, même à haute température (98), on trouve :

$$q' = c\left(T' - \frac{p_a V}{R}\right)$$

ce qui est aussi la valeur trouvée pour q, c'est-à-dire pour la transformation à volume constant.

Quant à la transformation GB, elle entraîne, soit dans le procédé du cycle fictif, soit dans le procédé réel, la même perte de chaleur au réfrigérant ; dans le premier cas, la chaleur est soustraite au gaz par conductibilité à travers les parois, tandis qu'en réalité, elle est restituée directement à l'atmosphère.

102. — *Comparaison des quatre genres de cycles fictifs.* — Bien que les cycles fictifs ne se rapprochent pas beaucoup des transformations réelles, il est intéressant de les comparer; ceux qui présentent le rendement le plus élevé conservent leurs avantages relatifs dans les machines réelles, ainsi que l'expérience l'a du reste démontré [1].

Admettons que, pour chaque période, les cycles correspondent à la même dépense de mélange, celui-ci ayant la même composition pour toutes les machines, et la combustion étant complète; supposons que le mélange soit pris à la température de 300° absolus (27° C.) et à la pression atmosphérique; la chaleur développée est la même quel que soit le genre de cycle, et cette condition nous permet de trouver la température développée après l'explosion ou la combustion, en tenant compte

1. Les principales causes qui font que le cycle fictif ne traduit pas les phénomènes de la machine réelle sont : d'une part, l'imperfection de la combustion; d'autre part, l'impossibilité de réaliser des lignes adiabatiques pour les hautes températures produites dans les machines à gaz; on renonce du reste *a priori*, à poursuivre ce genre de tranformation, puisqu'on refroidit à dessein le cylindre, soit par un courant d'eau, comme dans la plupart des machines, soit en augmentant le rayonnement par des nervures à ailettes, comme dans quelques petits moteurs.



de la compression initiale, lorsqu'elle existe, ainsi que de la transformation (à volume constant ou à pression constante) qui s'accomplit pendant la communication de chaleur.

Comme les cycles empruntent à la source supérieure la même quantité de chaleur, leur rendement est d'autant meilleur qu'ils abandonnent moins de chaleur au réfrigérant; le diagramme entropique facilite la comparaison de ces pertes.

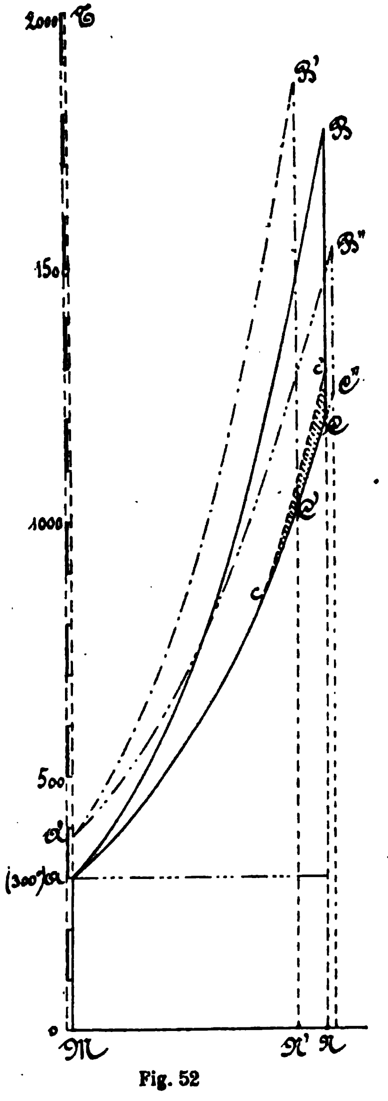


Fig. 52

1°. — Pour le cycle du ***premier genre***, l'explosion correspond à la ligne AB, figure 52; elle part de l'état initial, pour lequel nous supposons l'entropie nulle, et la température absolue T_A égale à 300°; cette ligne a pour équation (n° 36) :

$$S = c \, l_n \frac{T}{T_A}$$

Le maximum de température correspond à la fin de l'explosion; il est d'environ 1800° absolus lorsque le mélange comporte un volume de gaz et dix volumes d'air (98), condition qui permet de trouver le point B, qui termine la transformation.

La détente adiabatique est figurée par la ligne d'entropie constante BC, et le point C doit être tel que, par l'enlèvement de chaleur à pression constante, le mélange soit ramené à l'état initial. La ligne CA qui ferme le cycle est donc connue; elle a pour équation (n° 36) :

$$S = C \, l_n \frac{T}{T_A}$$

La chaleur développée par l'explosion est représentée par la surface

MABN; la portion ABC est transformée en travail, et ce qui reste, MACN, est abandonné à l'atmosphère.

2°. — Les cycles du *deuxième genre* comportent une compression adiabatique initiale AA', qui élève la température sans augmenter l'entropie; la ligne A'B' a pour équation :

$$S = c\, l_n \frac{T}{T_{A'}}$$

Les points des deux courbes AB et A'B' ayant même abscisse sont donnés par des températures proportionnelles à T_A et $T_{A'}$.

La température initiale dépend du taux n de la compression, on l'obtient facilement au moyen de la propriété des lignes adiabatiques :

$$\frac{T_{A'}}{T_A} = n^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Pour une pression de trois atmosphères absolues, on a $n = 3$, et $T_{A'} = 386°$.

La transformation A'B' s'arrête à la fin de l'explosion; comme la quantité de chaleur développée est la même que dans le cycle du premier genre, on voit que :

$$MA'B'N' = MABN$$

La température du point B' est plus élevée que celle de B, puisque :

$$T_{B'} - T_{A'} = T_B - T_A$$

au contraire, l'entropie de B' est plus petite que celle de B, car les surfaces ne pourraient être égales sans cette condition.

En raisonnant comme dans le premier cas, on trouve que la détente ainsi que la transformation fictive qui ramène le corps à son état initial, sont figurées par les lignes B'C', C'A. Dans les machines à compression, la température correspondant à la fin de la détente (C') est plus basse que dans les machines sans compression (C), et la chaleur perdue au réfrigérant MAC'N', est moindre; ces machines ont, par conséquent, un rendement d'autant plus élevé, que la compression initiale AA' est elle-même plus forte.

3°. — Dans les machines *à compression avec combustion*, la transfor-



mation A'B", pendant la communication de chaleur, part du point A', mais elle est à pression constante; elle peut donc se déduire de la ligne AC, en augmentant les ordonnées proportionnellement à $\frac{T_{A'}}{T_A}$; la température $T_{B''}$, à la fin de la transformation, s'obtiendra, relativement aux machines du second genre, par la condition que la quantité de chaleur Q engendrée est la même, donc :

$$Q = C\,(T_{B''} - T_{A'})\ \text{d'où}:\ T_{B''} = T_{A'} + \frac{Q}{C}$$

tandis que l'on aurait eu, pour les machines du second genre :

$$T_{B'} = T_{A'} + \frac{Q}{c}$$

et, pour celles sans compression :

$$T_B = T_A + \frac{Q}{c}$$

On a pour l'entropie :

$$S_{B''} = C\, l_n\left(1 + \frac{Q}{C\,T_{A'}}\right)$$

Cette entropie peut être plus grande, égale, ou même inférieure à l'entropie S_B des machines du premier genre, d'après l'importance de la compression initiale, auquel cas le rendement de la machine sera plus faible, égal ou plus grand que celui des machines du premier genre, car le cycle est fermé par le contour B" C" A.

Mais il faudrait réaliser une compression initiale beaucoup plus forte que dans les machines du second genre pour atteindre le même rendement que dans celles-ci, ce dont on s'assure très aisément par le diagramme; il est vrai que, dans les machines à combustion, la pression maximum du cycle ne dépasse pas celle de la compression initiale, tandis que dans celles du second genre, la pression augmente beaucoup pendant l'explosion. Il est donc facile de réaliser des machines du troisième genre à très forte compression, et dans ce cas, on peut atteindre les rendements des machines du second genre, ce que l'expérience des moteurs de Dugald Clerk a vérifié; mais les dispositifs qui produisent l'explosion sont plus simples que ceux qui réalisent la combustion.

4°. — Enfin, dans *les machines atmosphériques*, la première ligne de transformation, AB, est identique à celle des cycles du premier genre,

mais la détente se prolonge jusqu'à la température ambiante, du moins, lorsque l'on suppose que le retour du gaz à son état initial à lieu par une transformation isothermique ([1]). Au seul examen de la figure, on comprend que les machines atmosphériques puissent avoir un rendement relativement élevé, supérieur même, dans les limites pratiques de la compression, à celui des machines du second genre ; nous verrons, par l'étude organique des moteurs, que les machines du quatrième genre pêchent par leurs dispositifs mécaniques, mais que leurs résultats économiques confirment les déductions tirées de la comparaison des cycles.

La *détente incomplète* enlève, de chacune des figures qui représentent la chaleur transformée en travail, un triangle curviligne représenté, par exemple, pour les machines du premier genre, par cCc', elle abaisse le rendement en conséquence, et son influence relative est facile à déterminer ; la ligne cc', est une transformation à volume constant, ainsi que nous l'avons établi au n° 101.

103. — C'est l'expérience qui doit vérifier si les prévisions indiquées dans les théories précédentes sont effectivement réalisées ; ainsi que nous l'avons dit, les hypothèses qu'il importerait surtout de vérifier, sont celles relatives à la manière plus ou moins complète dont la combustion s'effectue, et à l'adiabaticité des courbes de détente. M. Witz, à la suite de ses expériences de laboratoire, qui ont été faites, non à volume constant, comme celles de M. Dugald Clerk, mais dans un cylindre dont le piston était muni d'une tige sur laquelle on pouvait faire frein, attribue une grande importance à la vitesse de la détente, qui se combinerait avec l'effet de paroi, et conclut en faveur des grandes vitesses de piston pour obtenir des combustions parfaites et des pressions élevées. M. Slaby, sans contester le résultat des expériences de M. Witz, met en doute l'exactitude des conclusions que leur auteur en a tirées, il a entrepris des essais établissant que la température plus ou moins basse des parois et la vitesse du moteur ne paraissent pas avoir d'influence sensible sur le rendement calorifique des moteurs Otto ([2]).

M. *Bousfield* conclut, de l'examen des lignes de détente, que la combustion n'est pas complète à la fin de l'explosion, mais qu'elle continue

1. Si cette transformation finale n'est pas isothermique, on trouvera aisément, par l'étude de la courbe d'indicateur, la valeur k de l'équation $pv^k = C^{te}$, qui la représente approximativement, et, par conséquent, sa transformée entropique (n° 36).

2. G. Richard, ouvrage cité pp. 78 à 103.

et tend à relever la pression, pendant que l'effet refroidissant de la paroi tend à l'abaisser; les deux influences peuvent donc se contrebalancer, et la courbe de détente, lorsqu'elle présente l'allure de l'adiabatique, établit à la fois et l'existence de la combustion incomplète, et celle du refroidissement par la paroi; dans ce cas, la concordance qui semble exister entre les diagrammes réels et les cycles supposés n'est qu'apparente.

Les différentes courbes relevées (en général sur des moteurs du deuxième genre) ont pour équation :

$$pv^{\gamma} = C^{te}$$

Avec des valeurs de γ qui sont données, d'après certains expérimentateurs, dans le tableau suivant :

	DÉTENTE	COMPRESSION
MM. Slaby . . . . $\gamma =$	1.3 à 1.4	—
Unwin, moteur Atkinson.	1.305	1.399
Kennedy, moteur Griffin, février 1888. . .	1.378	1.245
— — — février 1889. . .	1.350	1.262
— — Atkinson — . . .	1.264	1.205
— — Crossley (Otto)	1.435	1.380
Ayrton et Perry.	1.479	1.301

En général, les valeurs de γ données pour la compression ne présentent pas autant de certitude que celles données pour la détente, parce que l'espace nuisible, qui n'est pas toujours rigoureusement connu, a plus d'influence sur le résultat du calcul.

§ III

Étude organique des machines à gaz [1].

104. — Le moteur à explosion sans compression est, d'après ce qui précède, le seul dont l'infériorité est sans remède ; aussi la machine primitive de Lenoir ne présente-t-elle plus qu'une importance historique.

1. Nous ne décrirons pas le moteur du troisième genre, à combustion avec compression, que M. Dugald Clerk avait amené a un haut degré de perfection, mais qui paraît abandonné, et qui du reste n'a pas pénétré, à notre connaissance, sur le continent. Voir les divers ouvrages cités.

Le petit moteur de A. de Bisschop, produit en 1871, est à peu près le seul qui soit resté en usage, à cause de sa simplicité, encore est-il limité aux très faibles puissances : depuis trois kilogrammètres par seconde, jusqu'à un demi-cheval ; il est construit en France, en Allemagne et en Angleterre.

Le cylindre à simple effet A (fig. 53), est vertical, il est coulé avec le

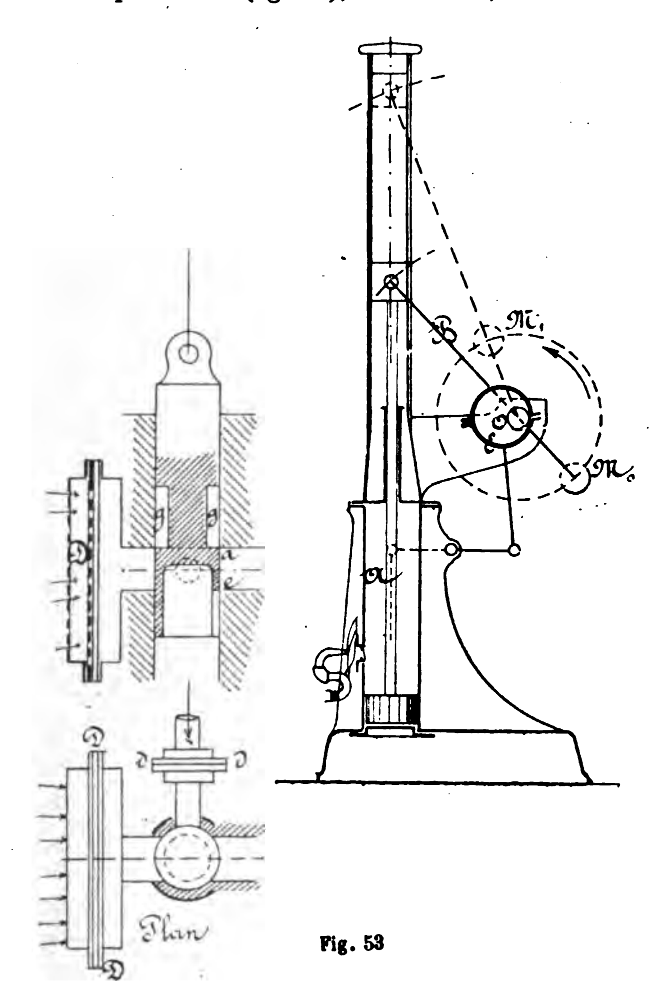


Fig. 53

socle creux formant le bâti, et il est muni d'ailettes pour faciliter le refroidissement. La partie supérieure du cylindre sert de guide à la crossette de la tige du piston, mais, en fait, cette partie du cylindre, munie

d'une fente latérale, peut-être considérée comme ouverte, et le piston ne s'y meut jamais.

La crossette est reliée, par une courte bielle B, à une manivelle M, calée sur l'arbre O du volant. Celui-ci est rejeté en dehors de l'axe du mouvement rectiligne, dans le but de donner au piston des vitesses différentes dans les deux courses. Ce système de liaison permet encore d'atteindre de grandes courses de piston au moyen d'une manivelle relativement courte, comme on s'en aperçoit facilement à l'examen de la figure, dans laquelle les positions inférieure et supérieure de la crossette sont déterminées au moyen d'arcs tracés du point O comme centre, et ayant pour rayons respectifs la longueur de la bielle, diminuée et augmentée de la longueur de la manivelle.

Les positions correspondantes du bouton de manivelle sont figurées en M_0 et M_1 ; l'arc qui correspond à la course montante du piston, l'arbre étant supposé tourner dans le sens de la flèche, est donc plus court que l'arc décrit pendant la descente, et, comme le mouvement du volant est à peu près uniforme, la durée de la course motrice est sensiblement plus courte que celle de la course rétrograde ; cette circonstance, d'après la théorie de M Witz (103), serait favorable au fonctionnement.

Dans le moteur le plus répandu [1] la distribution s'effectue au moyen d'un tiroir cylindrique, placé verticalement au pied du cylindre, et commandé par l'excentrique E. Dans la figure, le piston est au bas de sa course, et le tiroir occupe le milieu de la sienne en descendant ; l'admission va avoir lieu par l'arête *a*, car, lorsque le tiroir descend, la gorge *g* vient en face de la lumière et laisse pénétrer l'air et le gaz, qui ne se mélangent qu'à l'entrée du cylindre; la communication a lieu pendant toute la course ascendante du piston, mais l'admission ne se produit néanmoins que pendant le premier tiers de la course, ainsi que nous allons le voir.

L'air est aspiré à travers la diaphragme D, percé de petits orifices recouverts vers l'intérieur par une bande de caoutchouc, qui forme soupape lorsque la pression intérieure devient plus forte que la pression atmosphérique; une disposition analogue existe pour l'entrée du gaz qui traverse le diaphragme *d*.

Au moment donc où se produit l'allumage, le mélange ne peut s'é-

1. Le type de 1881 est à distribution par soupapes, et présente d'ingénieux détails d'allumage. Richard, ouvrage cité, t. 1, pp. 120-121. Voir aussi *Knoke*, ouvrage cité, p. 124, et *Chauveau*, *Traité théorique et pratique des Moteurs à gaz*. Baudry, 1891.



chapper, bien que la lumière du cylindre soit encore ouverte, mais l'air et le gaz ne peuvent plus entrer, parce que la pression intérieure est trop forte.

L'allumage se fait au moyen d'une flamme placée en face d'une petite ouverture percée au tiers de la course, dans la paroi du cylindre, et fermée de l'intérieur vers l'extérieur par un petit clapet très mobile; aussitôt que le piston franchit cette ouverture, la flamme est aspirée et fait détoner le mélange, le clapet se ferme, et la détente se produit sans aucune communication avec l'extérieur. L'allumeur est visible à gauche de la figure.

Pendant toute la course descendante, l'échappement s'opère par le bas du tiroir, qu'ouvre la lumière du cylindre par l'arête *e*. Le diagramme de ces machines, d'après M. Dugald Clerk, est représenté figure 54.

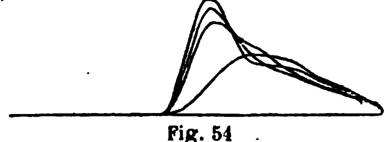


Fig. 54

Ces moteurs sans compression ne sauraient être économiques, leur consommation est quadruple environ de celle des bons spécimens du second type, mais, pour les puissances très faibles auxquelles le moteur de Bisschop est destiné, cette considération s'efface devant la simplicité, l'absence du graissage, etc.; il est même recommandé de ne jamais graisser les organes chauds, tels que le tiroir et le piston, parce que les huiles, en se charbonnant, arrêteraient la marche du moteur; il ne faut pas perdre de vue, en effet, que le cylindre n'est refroidi que par des ailettes en contact avec l'air et est à une température plus élevée que s'il était enveloppé d'eau.

Ce moteur n'a pas de régulateur, la résistance croissante à l'aspiration et à l'échappement font qu'il atteint une vitesse de régime qui n'est pas trop élevée, même à vide, la marche est donc, jusqu'à un certain point, auto-régulatrice.

105. — *Moteur Langen et Otto.* — Cette machine, qui appartient au quatrième genre, est le seul moteur atmosphérique ayant eu une certaine importance industrielle; il est aujourd'hui abandonné, mais ses dispositions sont intéressantes, et méritent d'être rappelées.

Le cylindre C est vertical, figure 55, il a une hauteur très grande, et est refroidi par une circulation d'eau. Le piston est muni d'une tige dentée engrenant avec le pignon P, mais celui-ci passe à frottement doux sur l'arbre A du volant, avec lequel il est lié par un embrayage qui rend le pignon solidaire de l'arbre pendant la descente du piston seulement.

Cet embrayage, très ingénieux, mais un peu compliqué, a été remplacé dans la figure par une roue à rochets calée sur l'arbre, et un cliquet entraîné avec le pignon.

Le but de cette disposition est de rendre la projection du piston tout à fait libre de bas en haut, pendant que le mouvement de l'arbre et du volant persiste en sens contraire; la crémaillère transmet donc la force motrice à l'arbre pendant le mouvement de descente seulement. Le mécanisme de distribution, fort remarquable, est décrit dans les traités spéciaux (1).

Le piston, projeté vers le haut par l'explosion, possède un mouvement de plus en plus ralenti, qui ne s'arrête que par le travail résistant de la pression atmosphérique, c'est-à-dire lorsque le piston a fait un vide partiel derrière lui; le travail d'élévation des masses pesantes contribue également à éteindre leur vitesse. La période motrice est produite à la descente, mais le travail développé est bien représenté par la surface du diagramme BCD (fig. 50), ou par celle du cycle fictif, car, pendant l'ascension du piston, si on appelle l le travail dû au poids des pièces, on a : $BCE = EDd + l$; or, le travail moteur à la descente du piston est $l + BDd$, ou $BED + ED\,d + l$, ou encore BCD. Certains auteurs ont versé sur ce point dans une erreur évidente.

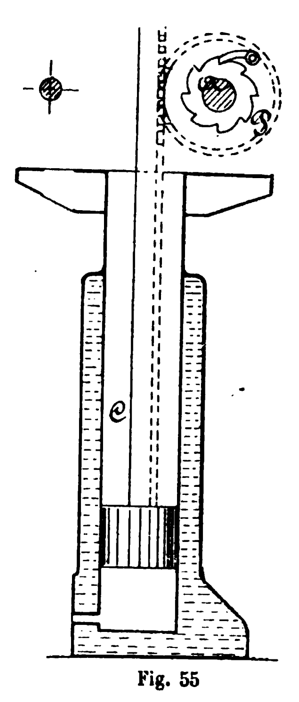


Fig. 55

Ce mécanisme a fonctionné d'une manière satisfaisante, en produisant cependant un bruit assez incommode; la consommation était peu supérieure à 1 mètre cube de gaz par heure et par cheval mesuré au frein, ce qui confirme les prévisions théoriques établies au numéro 102; le caractère des moteurs à piston libre est leur détente très prolongée (jusqu'à dix fois le volume du mélange).

Au point de vue de la stabilité, le moteur à piston libre est sujet à critique, car l'*accélération* que prend cette pièce, au moment de l'explosion, est considérable, vu qu'elle est produite par la pression maximum du gaz. Cette pression s'exerce aussi sur le fond du cylindre, et

1. Knoke, ouvrage cité, p. 214, et Dugald Clerk, pp. 135 à 150, et 228.

produit une réaction intense tout à fait analogue au recul d'un canon au moment du tir. Dans une machine ordinaire, dont le piston est relié à l'arbre par un système quelconque, une partie de la réaction est équilibrée par les paliers de l'arbre, qui font corps avec le bâti et sa fondation; le seul effort non équilibré correspond à celui qui est employé à accélérer les pièces à mouvement alternatif, mais il ne constitue ici qu'une très faible partie de la pression totale exercée sur le piston, tandis que, dans le moteur Langen et Otto, il est égal à la pression entière.

L'effet de recul signalé ici était assez considérable pour rendre impossible le montage du moteur sur un plancher.

106. — Le *moteur Otto* est le type le plus répandu des machines du deuxième genre. Les quatre opérations du cycle sont accomplies successivement dans le même cylindre, agissant à simple effet; elles exigent, par conséquent, deux tours de manivelle, et, comme la course de détente n'est pas plus longue que celle qui produit la compression, le cycle fictif de la figure 48 s'arrête à la verticale $\alpha\alpha$, c'est-à-dire que la détente est forcément incomplète; on ne pourrait la prolonger qu'en rendant la course du piston plus longue pour les périodes de détente et d'expulsion que pour celles d'aspiration et de compression (1). Ces machines sont appelées à *quatre temps*, c'est-à-dire que, de quatre courses du piston, une seule est motrice; les trois autres s'accomplissent par l'effet de l'inertie du volant.

Le cycle, réalisé en 1876-1877, est à peu près celui qui avait été indiqué en 1862 par Beau de Rochas (2), dans le texte d'un brevet passé inaperçu.

Les dispositions essentielles du moteur Otto, fabriqué d'abord exclusivement à Deutz, près Cologne, n'ont pas varié depuis l'origine; quelques perfectionnements de détail dans l'allumage, l'entrée du mélange, le régulateur, etc., ont cependant été apportés au moteur primitif, soit par les constructeurs allemands, soit par les maisons concessionnaires en France et en Angleterre.

Le cylindre C, ouvert à la partie antérieure, (fig. 56), est boulonné en

1. Ce dispositif est réalisé dans le moteur Atkinson par un moyen cinématique; on arriverait aussi au but en achevant la détente dans un cylindre séparé: on aurait ainsi une machine *compound*, ce moyen a été essayé sans succès.

2. Au sujet de cette question de priorité, et du procès célèbre (*Otto-Steel*) qu'elle a soulevé, voir l'ouvrage de M. Richard. pp. 25 à 54,



porte-à-faux contre la collerette du bâti; il est terminé, à l'arrière, par une culasse serrée contre le cylindre au moyen d'un joint à l'amiante; *e* est une enveloppe d'eau, destinée à refroidir le cylindre et la culasse.

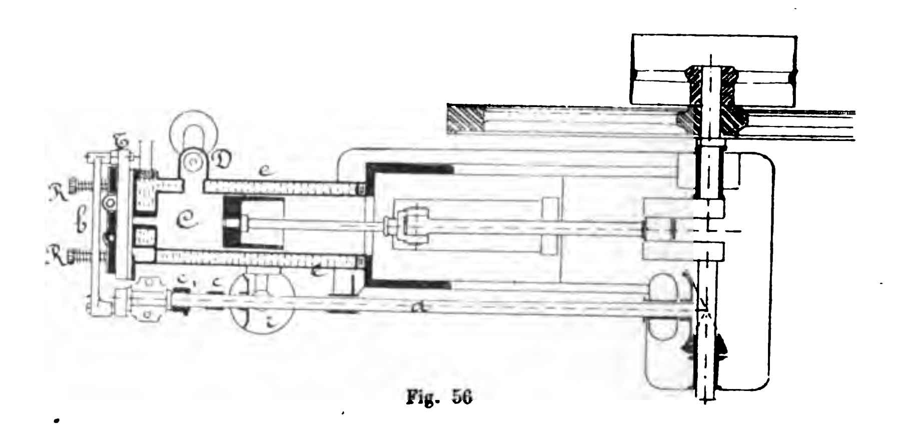


Fig. 56

Le mélange est distribué au cylindre par le tiroir T, qui sert aussi à produire l'allumage; c'est une plaque d'une certaine épaisseur, à faces parallèles, glissant horizontalement entre la culasse dressée du cylindre, et une contre-plaque dont le serrage est réglé au moyen des ressorts R, qui l'empêchent de se soulever pendant l'explosion.

Le tiroir est manœuvré par l'arbre *a*, parallèle à l'axe du cylindre; la bielle *b* sert à lui communiquer un mouvement alternatif d'amplitude convenable. Les fonctions du tiroir se répètent périodiquement après un intervalle de deux révolutions; pour cette raison, l'arbre *a* ne fait qu'un tour pendant que l'arbre du volant, qui le commande par une paire de roues coniques, en fait deux.

L'arbre *a* porte aussi une came *c*, qui ouvre la soupape d'échappement D pendant la quatrième phase du cycle, et la laisse fermée pendant les trois courses suivantes. Enfin, l'arbre *a* porte encore une came *c*, qui ouvre la soupape d'arrivée du gaz pendant la phase d'introduction; cette dernière came est mobile sur l'arbre, longitudinalement, et sa position est commandée par le régulateur *r*, qui supprime totalement l'admission du gaz lorsque la vitesse de régime est dépassée.

Pour expliquer le fonctionnement du tiroir, représentons la circonférence décrite par le bouton de la manivelle (fig. 57), et, concentriquement à celle-ci, la trajectoire, de rayon plus petit, de la manivelle actionnant le tiroir. Le calage de cette petite manivelle, par rapport

à la manivelle motrice, est tel, que les positions $E_0 E_1 E_2 E_3$ correspondent à $M_0 M_1 M_2 M_3$; l'angle $E_0 OM_0$ est égal à 45°.

Ainsi, pendant la première course directe du piston (aspiration du mélange), le mouvement du tiroir consiste en un déplacement *ab* — *ba*, correspondant à l'arc $E_0 E_1$ décrit par la manivelle de commande; nous supposons que l'obliquité de la bielle est négligeable.

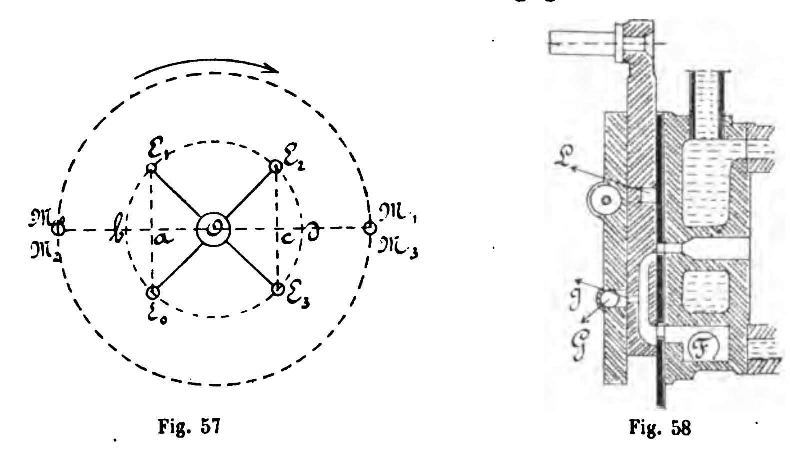


Fig. 57 Fig. 58

La figure 58 représente le tiroir dans la position E_0 ou E_1, c'est-à-dire au commencement ou à la fin de l'aspiration. Pour les points intermédiaires, le tiroir est reporté à gauche de la position considérée d'une quantité qui atteint au maximum *ab*, ouverture de la lumière.

L'air entre par la poche F, ménagée dans la culasse du cylindre; le gaz pénètre par la poche G de la contre-plaque, et passe dans le canal du tiroir par une rangée verticale de petites ouvertures circulaires *g*. Le gaz n'entre toutefois dans la poche G qu'après avoir franchi la soupape régulatrice.

Pendant la course rétrograde du piston, qui est la période de compression, le tiroir se déplace vers la droite de la quantité *ac;* il maintient constamment fermée la lumière du cylindre, en même temps qu'il prépare l'allumage; à cet effet, il renferme une chambre L, qui le traverse de part en part, comme on le voit dans la section transversale; cette chambre renferme du gaz enflammé qui, au moment où la manivelle est en M_2 (tiroir en *c*), vient en regard de la lumière du cylindre, et produit l'allumage; la face arrière du tiroir est en ce moment recouverte par les parties pleines de la contre-plaque (fig. 59); l'explosion se produit pendant la course M_2M_3, qui fait parcourir au tiroir le chemin *cd*,*dc*.

Pendant la quatrième course du piston, a lieu l'expulsion des gaz brûlés; nous avons vu qu'une soupape d'échappement, actionnée par une came, est chargée de cette fonction spéciale, pour laquelle le tiroir n'intervient aucunement.

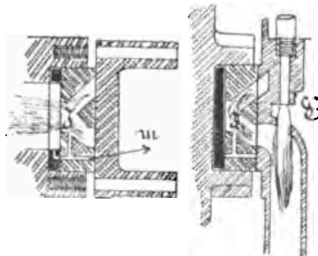


Fig. 59.

Il nous reste à expliquer comment la chambre L, que nous avons trouvée remplie de flamme, s'alimente de gaz et s'allume. Or, cette chambre reçoit le gaz par le petit canal *m*, qui se trouve en communication avec une prise spéciale. Le gaz est amené à cette prise et au brûleur B au moyen d'un tuyau à deux branches. Ainsi, la chambre L, dans son mouvement *ab*, *ba*, se remplit de gaz qui, au passage devant le brûleur logé dans la contre-plaque, s'allume, et forme une flamme transportée avec le tiroir devant la lumière du cylindre. Au moment où la poche L passe devant le brûleur, elle communique, pendant un court instant, avec l'air atmosphérique, condition nécessaire pour que la flamme puisse se produire, et que les gaz brûlés puissent s'échapper plus au moins au retour.

Une précaution est encore nécessaire : la charge du cylindre, comprimée au moment de l'allumage, éteindrait la flamme qui se trouve dans la chambre dont la pression est inférieure; on évite cet effet en mettant la chambre L en communication avec le cylindre au moyen d'un très petit canal, visible dans la figure 59, ce qui établit progressivement l'équilibre.

La mise en train du moteur doit se faire à bras d'hommes; on supprime la compression (qui demanderait un effort considérable) en soulevant la soupape d'échappement pendant la deuxième phase, ce qui se fait généralement en déplaçant la came d'échappement, qui présente deux bosses sur une partie de sa longueur. On remet cette came en place lorsque la machine a fait quelques tours et dépasse facilement les points morts [1].

107. — Le cycle à quatre temps, pour s'accomplir dans un seul cylindre, exige que l'on ménage, au fond de ce récipient, un espace libre, non parcouru par le piston, dans lequel le mélange peut être confiné après la compression.

1. Il existe un grand nombre de dispositions spéciales pour faciliter la mise en train qui, dans les gros moteurs, serait fort pénible. Voir les traités spéciaux, et *Engineering*, 1891, 2e sem., p. 241.

Dans la construction allemande, l'espace libre est environ les 0,60 du volume déplacé par le piston (Slaby) ; cette fraction était égale à 0,612 dans un moteur Otto américain, expérimenté par Brooks et Steward ; elle descend jusqu'à 0,40 dans les moteurs Otto construits par Crossley (Kennedy); la compression est donc beaucoup plus forte dans ces derniers moteurs [1].

La présence, au fond du cylindre, de cet espace libre, ou chambre de compression, a pour effet de rendre incomplète, pendant la quatrième course, l'expulsion des gaz brûlés; une partie de ces gaz remplit en effet l'espace supplémentaire qui se trouve derrière le piston, et s'incorpore dans la charge nouvelle. Le mélange directement en contact avec le piston est donc le moins riche ; celui qui vient ensuite renferme une assez forte proportion d'air, ce qui s'obtient en donnant un léger retard à l'ouverture à la soupape d'admission du gaz; la partie de la charge qui vient en dernier lieu est la plus riche.

Cette composition de la charge appartient à Otto, qui attribue à cette stratification une grande importance; nous avons dit, en effet, que l'on a intérêt à employer des mélanges pauvres (99); la dilution est produite ici, en grande partie, par les gaz brûlés de l'espace nuisible ; mais il devient nécessaire, pour faire détoner un pareil mélange, de projeter une flamme puissante dans la masse; le mélange riche admis vers la fin de la course favoriserait cette projection. Lorsqu'on essaye de produire l'allumage ailleurs qu'au centre et dans l'axe du cylindre, la courbe d'indicateur, au lieu d'affecter la forme normale des diagrammes du moteur Otto (fig. 60), s'abaisse et prend une allure couchée, ce qui est l'indice d'une combustion ralentie; ce genre de combustion a pour effet d'augmenter la perte de chaleur à l'échappement dans des proportions très notables.

L'effet de la stratification de la charge, imaginée à l'origine pour obtenir une explosion moins brisante [2] que celle donnée par la composition théorique, tout en permettant l'inflammation d'un mélange relativement pauvre, a été contesté; il ne semble pas, dans tous les cas, avoir

1. Dans le moteur Root (*Engineering*, 1892, 2e sem., p. 167), la compression est beaucoup plus forte encore,

2. Le moteur Otto succédait à celui à piston libre d'Otto et Langen, où l'on n'avait pas à redouter l'effet de la pression sur les organes mobiles, comme dans les machines à bielle ; en outre, la compression initiale augmente encore la pression d'explosion des machines du deuxième genre; on s'explique, par conséquent, que l'une des préoccupations de l'inventeur ait été d'adoucir l'explosion, par un effet qui la fait ressembler à une combustion encore très rapide, mais non instantanée. Cet effet a été appelé « *nachbrennen* ».



une très grande importance, mais il résulte des discussions qui ont eu lieu à ce sujet, qu'il convient d'allumer la charge au centre et dans l'axe du cylindre, et non sur le côté.

La compression initiale, qui caractérise les machines du deuxième et du troisième genre, n'est pas seulement avantageuse au point de vue du cycle; elle a un effet direct sur l'explosion; c'est grâce à la compression que l'on parvient à enflammer des gaz plus pauvres dans les machines à compression plutôt que dans les autres.

La composition du mélange admis, qu'il ne faut pas confondre avec celle du mélange après compression dans le cylindre, est, d'après les expériences plusieurs fois citées de M. Kennedy, de 1 volume de gaz pour 9,50 volumes d'air [1].

108. — *Résultats d'expérience* — L'interprétation théorique donnée au n° 102, (2°), pour un mélange au dixième, avec compression à 5 atmosphères absolues, fournirait un rendement calorifique de 46 % environ (mesure planimétrique); or, les résultats les plus beaux obtenus au moyen du cycle Otto correspondent à 545 litres environ par cheval indiqué par heure (Kennedy), non compris le gaz d'allumage; le gaz avait une puissance calorifique de 5.500 calories environ par mètre cube, ou 3.000 calories pour la quantité dépensée dans une heure, et qui a produit 270.000 kilogrammètres. Chaque calorie a donc fourni 90 kilogrammètres, alors que le cycle théorique aurait dû donner :

$$0,46 \times 425 = 195 \text{ kilogrammètres.}$$

Le coefficient exprimant la perfection avec laquelle le cycle théorique est pratiquement réalisé, est donc :

$$\frac{90}{195} = 0.46$$

1. La machine essayée était un spécimen de la construction anglaise de Crossley, comportant une forte compression initiale (5 atmosphères absolues, environ). D'autres essais, faits simultanément sur divers moteurs, ont donné :

Moteur Atkinson.	1 volume de gaz pour	9.33 d'air
» Griffin	1 » »	12.36 »

Dans un essai de ce dernier moteur, fait à Kilmarnock, par le même expérimentateur, le volume d'air s'élevait à 14,83; les diagrammes étaient néanmoins fort beaux avec 3 ½ atmosphères absolues de compression; mais, dans ce moteur, on expulse complètement les résidus.



c'est-à-dire qu'une fraction, un peu supérieure à la moitie de la chaleur utilisable, est perdue par l'effet de la détente incomplète, de l'imperfection ou du retard de la combustion, et par l'effet de la paroi.

Le rendement du cycle de Carnot, entre les températures extrêmes réalisées dans le cycle théorique (1.900° et 300° absolus), eut été :

$$\frac{1900 - 300}{1900} = 0.84$$

La chaleur formée par la combustion du gaz étant représentée par 1, on peut dresser le tableau suivant :

Chaleur empruntée à la source : 1^c.	Utilisable par un cycle parfait. . 0^c,84	Utilisable par le cycle des machines à compression et explosion parfaitement réalisé : 0^c,46	Utilisée par le cycle réel 0^c,21.
	Perte à la source inférieure . . . 0^c,16	Perte à la source inférieure : . . 0^c,54	Perdue : 0^c,79.

Le seul moyen de réduire l'écart entre les chaleurs utilisables, 0 c. 84 et 0.46, serait d'employer un régénérateur; quant à l'écart entre les chiffres 0 c. 46 et 0 c. 21, on peut espérer le réduire en augmentant la détente; en un mot, la différence entre les chiffres des deux premières colonnes tient aux défauts du cycle à compression avec explosion à volume constant; les différences entre les deux dernières colonnes accusent les défauts provenant de ce que le cycle fictif, tout imparfait qu'il est, n'est pas bien réalisé. Enfin, il y aurait encore lieu de comparer, à la chaleur dépensée, le travail reçu, non pas par le piston, mais par l'arbre; dans le chiffre ainsi obtenu, s'exercerait l'influence du *rendement organique* de la machine, qui, à pleine charge, a été trouvé de 0,86.

La chaleur communiquée à la machine peut encore être partagée suivant les indications du tableau suivant, qui n'est qu'une autre forme du premier :

Chaleur empruntée à la source : 1 calorie.	Chaleur transformée en travail sur le piston :	$0^{c},21$	
	Travail sur l'arbre : 0.21×0.86=0,18		
	Résistances passives : 0,03		
	Total. . 0,21		
	Chaleur perdue parce que le cycle hypothétique est mal accompli : .	$0^{c},25$	Perte totale de chaleur par les gaz d'échappement, l'eau de circulation et le rayonnement : $0^{c},79$
	Chaleur perdue parce que le cycle hypothétique n'est pas un cycle de rendement maximum :	$0^{c},38$	
	Chaleur nécessairement perdue au réfrigérant par le cycle de rendement maximum :	$0^{c},16$	
	Total	$1^{c},00$	

109. — *Effet des parois.* — Il serait facile, connaissant le diagramme moyen du travail pour un essai de quelque durée, pendant lequel la charge de la machine est tenue aussi uniforme que possible, de le transformer en un diagramme entropique ; nous avons fait cette opération pour le diagramme de l'essai de M. Kennedy sur le moteur Crossley ; le compte rendu de cet essai est très détaillé, et renferme tous les renseignements nécessaires pour un pareil calcul.

Le gaz avait très approximativement la composition de celui qui nous a servi à l'étude de l'explosion du n° 96. La charge comprenait 1 volume de gaz pour 9,50 volumes d'air (ou en poids : 1 de gaz pour 24,2 d'air) et pesait 0 kil. 0247 ; d'après la composition des produits brûlés, on trouve facilement le poids des résidus qui remplissent l'espace nuisible, ou la chambre de compression, après la quatrième phase du cycle [1].

On peut établir ainsi que la charge est composée de la manière suivante, pour une température qui ne diffère pas beaucoup de 100° centigrades :

Résidus de l'espace nuisible	$0^{k},0085$	(poids calculé)
Mélange explosif	$0^{k},0247$	(poids mesuré)

La température, au moment du mélange, sera supposée de 100° centigrades ; nous admettrons aussi que la charge nouvelle s'échauffe pen-

1. Ces résidus comprennent une certaine quantité de vapeur d'eau, à moins que la température ne soit assez basse pour la condenser sur les parois de la chambre, auquel cas il faudrait tenir compte de cette eau pour analyser le phénomène de la compression. Cette condensation ne se produit pas, car la présence de l'eau à l'*état de vapeur* n'est pas douteuse dans l'échappement des machines à gaz ; après un long parcours dans les tuyaux d'échappement, cette vapeur n'est même pas condensée.

dant l'introduction, ce qui incorpore dans le cycle une partie de la chaleur abandonnée par le cycle précédent, et qui sans cela serait tout à fait perdue. La paroi joue, pendant l'introduction, le rôle d'un régénérateur, mais elle ne peut le faire que parce que les produits expulsés ne sont pas complètement refroidis; pour apprécier le cycle, nous n'aurons pas à compter la chaleur gagnée par le mélange pendant l'introduction, à la condition de ne pas compter, comme perdue, la chaleur en dessous de la température de 100°, que nous supposons réalisée au moment où le cycle commence.

M. Kennedy a condensé en un seul tour les diagrammes de son essai, de manière à en déduire un diagramme moyen dont la forme est donnée par la figure BCDEF (fig. 60); le volume de l'espace nuisible

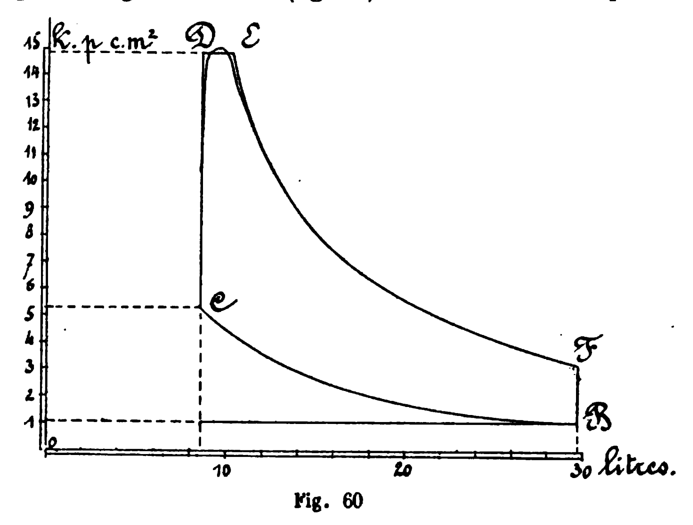


Fig. 60

étant connu, on peut, pour chaque point du contour, relever le volume et la pression du mélange, et trouver, par conséquent, sa température de proche en proche, au moyen de l'équation :

$$\frac{pv}{T} = C^{te}$$

On trouve ainsi, en supposant que $T_B = 373$ (ou $100° + 273$)

$$T_C = 600$$
$$T_D = 1610$$
$$T_E = 1940$$
$$T_F = 1205$$

et on retrouve finalement en T^B, après la transformation fictive à volume constant FB, la température du point de départ.

Pour trouver le diagramme entropique de l'ensemble des transformations, on peut utiliser les équations des lignes telles que BC, CD, etc. Ainsi, les lignes BC, EF, ont pour équation :

$$pv^k = C^{te}$$

Pour la compression BC, $k = 1.380$;
» détente EF, $k = 1.435$.

Il suffira d'introduire ces valeurs de k dans l'équation générale trouvée au n° 36 :

$$S - S_1 = c\, \frac{k - \gamma}{k - 1}\, l_n\, \frac{T}{T_1}$$

l'indice 1 se rappportant à un état initial où la transformation commence. Le coefficient:

$$\frac{k - \gamma}{k - 1}\, c,$$

est remplacé par c pour les lignes à volume constant, et par C pour les lignes à pression constante.

Mais nous ne devons pas perdre de vue que c, C, γ, sont variables lorsqu'il s'agit de hautes températures. Les valeurs admises par M. Witz (98) sont certainement trop fortes pour le cas présent, car un premier calcul, fait au moyen de ces valeurs, montre que la chaleur développée par l'explosion, mesurée au moyen des transformations entropiques CDE, serait plus grande, malgré la perte inévitable par la paroi, que celle développée par la combustion complète du mélange.

En recalculant à nouveau la valeur de c et C, d'après MM. Mallard et Lechâtelier, pour une température absolue de 1.000°, qui est à peu près la moyenne des températures du diagramme, et en tenant compte de la composition des gaz brûlés, qui sont, à raison de 9,5 mètres cubes d'air pour 1 mètre cube de gaz [1] :

Eau	1^k,0657		
Acide carbonique . . .	1,0000		
Azote	5,3408		
Excès d'air.	5,0000	O . . .	1,179
		Az . . .	3,821
	12^k,4065		

1. Les résidus de l'espace nuisible ont la même composition en poids, de sorte qu'il est inutile d'en tenir compte pour le calcul des chaleurs spécifiques moyennes.

on trouve approximativement pour le mélange :

$$C = 0.28$$
$$c = 0.215$$
$$\gamma = \frac{C}{c} = 1.3$$

En adoptant ces valeurs, on trace facilement le diagramme de l'entropie $B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (fig. 61) sur lequel on peut mesurer la quantité de chaleur fournie pour chaque transformation, ainsi que la quantité transformée en travail.

Ainsi, pendant la période d'explosion $C_1 D_1$, et de combustion à pression constante, $D_1 E_1$, la chaleur accusée par le diagramme est de 9,95 calories. La chaleur effectivement développée par la combustion du mélange, qui renferme 0 kil. 000998 de gaz, est de 11,20 calories, car le mètre cube de gaz considéré, pesant 0 kil. 495, développe 5.677 calories, en supposant la combustion complète.

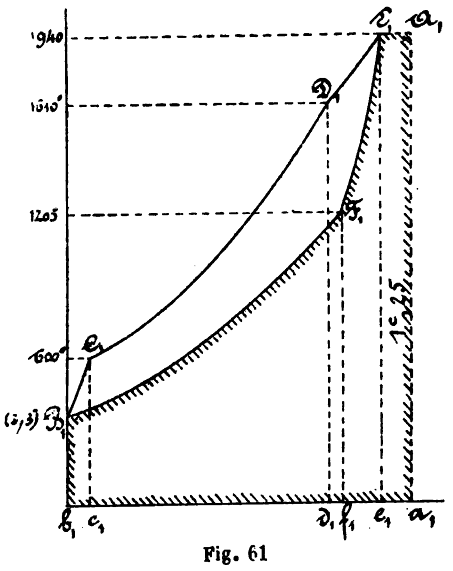


Fig. 61

Si le calcul est exact, la différence 1 c. 25 aurait été absorbée par la paroi du cylindre, ce qui n'a rien d'invraisemblable, malgré le temps très court pendant lequel la chaleur est développée.

Pendant la détente, le diagramme entropique montre que le mélange a cédé, à la paroi du cylindre, une quantité de chaleur mesurée par $E_1 F_1 e_1 f_1$, ou 1 c. 72, tandis que, pendant la compression $C_1 D_1$, le mélange a soustrait, à la paroi du cylindre, la quantité de chaleur $B_1 C_1 c_1 b_1$, ou 0 c. 345.

La quantité de chaleur perdue à la source inférieure, pendant la transformation fictive $F_1 B_1$, qui ramène les produits de la combustion à la pression et à la température initiales, sous volume constant, est exprimée par $F_1 B_1 f_1 b_1$, et vaut 5 c. 675.

La chaleur transformée en travail est mesurée par la surface fermée

du cycle, et correspond à l'excès de la chaleur reçue (de la combustion ou des parois) sur la chaleur versée à l'extérieur (abandonnée par le mélange qui s'échappe, ou transmise aux parois).

La quantité de chaleur transformée en travail est de 2 c. 90. Tous ces chiffres sont résumés dans le tableau suivant :

Chaleur de la combustion 11 c. 200	1° *cédée* à la paroi pendant $C_1 D_1 E_1$	1c25	
	2° *cédée* à la paroi pendant la détente $E_1 F_1$ . . .	1.72	+ 8c645
	3° *cédée* à la paroi et emportée par les gaz pendant l'échappement. . . .	5.675	
	4° *reprise* à la paroi pendant la compression . . .	0.345	— 0.345
	Total des pertes.		8.300
	5° transformée en travail.		2.900
			11.200

Dans tout essai de moteur à gaz, il est facile de mesurer la chaleur soustraite par l'eau de circulation à la paroi extérieure du cylindre, car il suffit de mesurer la température de l'eau à l'entrée et à la sortie de l'enveloppe à intervalles assez rapprochés, et d'évaluer le volume total de l'eau; ainsi, dans l'essai qui nous occupe, on a employé par heure, (pour 4.704 explosions) 322 kilogrammes d'eau; l'élévation de température a été de 76° C.. La chaleur emportée par l'eau a donc été, pour une période complète de quatre phases :

$$E = \frac{322 \times 76}{4704} = 5^c 202$$

Or, il est évident que la chaleur E emportée par l'eau de circulation est celle qui traverse la paroi intérieure du cylindre pour entrer dans le métal, diminuée de celle qui rentre du métal vers le cylindre par la même voie. Cette condition peut nous servir à décomposer la quantité de chaleur enlevée aux produits de la combustion pendant la transformation fictive $F_1 B_1$. D'après le tableau ci-dessus (3°) la chaleur enlevée pendant cette transformation est de 5 c. 675, mais une partie x est cédée à la paroi, et l'excédant est emporté par le gaz qui s'échappe, pour se perdre par contact avec l'atmosphère pendant l'échappement. Nous avons, en vertu de la remarque que nous venons de faire :

$$E = 1.25 + 1.72 + x - 0.345$$

d'où :

$$x = 2^c 577$$

Ainsi la chaleur (3°) comprend 2 c. 577 cédées à la paroi, et 3 c. 098 emportées par les gaz qui s'échappent.

Le bilan définitif de la chaleur dépensée par période est :

Chaleur de la combustion 11 c. 200 ou surf. $b_1 B_1 C_1 D_1 E_1 A_1 a_1$	Transformée en travail ou $B_1C_1D_1E_1F_1$:	$2^c 90$	ou 0,26	
	Perdue par les parois :	$5^c 202$	ou 0,465	[1]
	Perdue par l'échappement :	3 098	ou 0,275	

Les résultats trouvés par cette méthode diffèrent un peu de ceux qui sont consignés dans le rapport de M. Kennedy, et notamment de l'extrait que nous en avons fait au n° 108, où nous avons évalué à 0,21 la proportion de chaleur transformée en travail (le chiffre exact est 0,221). Mais ces différences s'expliquent tout naturellement par l'incertitude qui règne sur les chaleurs spécifiques, dont la valeur moyenne a été choisie un peu trop grande [2].

D'ailleurs, on devra attacher ici moins d'importance à la valeur numérique des résultats qu'à la méthode exposée, qui permettrait sans aucun doute d'arriver à une approximation aussi grande que le comporte la nature du problème à résoudre [3].

110. — Des recherches calorimétriques assez nombreuses ont été faites sur les moteurs à gaz, principalement ceux du genre Otto, mais en suivant une autre marche que celle exposée au numéro précédent ; généralement, on a analysé les éléments de la courbe de détente au moyen de l'équation de l'équivalence, et on a pu en déduire, pour un certain accroissement de volume des gaz, la chaleur fournie pour opérer la transformation, puisque le travail extérieur accompli est connu, ainsi

1. L'ensemble des pertes est figuré par la surface ombrée.

2. Ce qui exagère la chaleur reçue par le cycle pendant les transformations CD, DE, et diminue les pertes d'autant.

3. Les essais exécutés sur les moteurs Atkinson et Griffin pourraient fournir des exemples d'application de la méthode entropique, et servir à une comparaison intéressante.

que le changement de température (par l'équation fondamentale des gaz).

MM. Ayrton et Perry ont donné de ce procédé une interprétation graphique élégante que nous avons déjà exposée au n° 24, elle consiste à représenter la chaleur fournie par un diagramme superposé à celui du travail, et dans lequel l'énergie calorifique est portée en kilogrammètres. Les ordonnées de ce diagramme se déduisent de la courbe du travail au moyen de l'équation 18 :

$$E\frac{dQ}{dv}=\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma\, p+v\frac{dp}{dv}\right)$$

Nous avons indiqué au n° 24 un procédé qui permet de construire ces ordonnées. La figure 62 représente, en ABC, le diagramme du travail, et en FGH le diagramme donnant, en kilogrammètres, la chaleur fournie au mélange pendant la course directe du piston (explosion et détente). Si l'on connaissait le diagramme représentant la chaleur développée par la combustion du gaz, on trouverait, par la différence des ordonnées, la quantité de chaleur cédée à la paroi, ou *vice versa*, pour un déplacement quelconque du piston. MM. Ayrton et Perry ont cherché à déterminer par le calcul la chaleur échangée entre le gaz et la paroi, mais leur procédé est peu rigoureux, car ils n'ont fait intervenir ni la surface de la paroi, ni la diminution de pression du mélange, qui altère la transmission de chaleur; ces deux facteurs agissent en sens contraire, mais sans que leurs effets se compensent. D'ailleurs les auteurs insistent plutôt sur leur mode de représentation graphique que sur les résultats qu'ils en tirent.

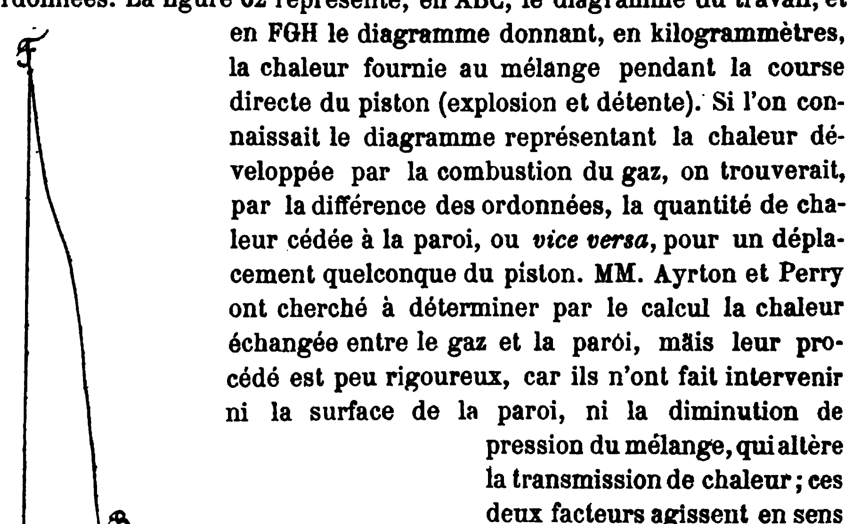


Fig. 62

111. — ***Modifications du moteur à quatre temps.*** — La plupart des moteurs à gaz modernes fonctionnent d'après le cycle de Otto, et ne diffèrent souvent de la machine déjà décrite que par des détails d'importance secondaire ; quelques unes cependant se distinguent par une véritable originalité.

M. Atkinson [1] a cherché à obtenir les quatre phases en un seul tour de manivelle, bien qu'une seule face du piston soit active; il a réalisé cet effet grâce à une liaison cinématique spéciale entre le piston et la manivelle; le système possède une autre propriété importante, c'est de produire des courses inégales d'aspiration et de détente, de compression et d'expulsion; il permet d'évacuer à peu près complètement les produits brûlés (fig. 63 *a*), parce que, à la fin de la période de compression (fig. *c*), l'excursion du piston est limitée, et que les gaz peuvent se loger dans l'espace compris entre le piston et le cylindre; de même, la course de détente (fig. *d*) se prolonge beaucoup plus loin que la course

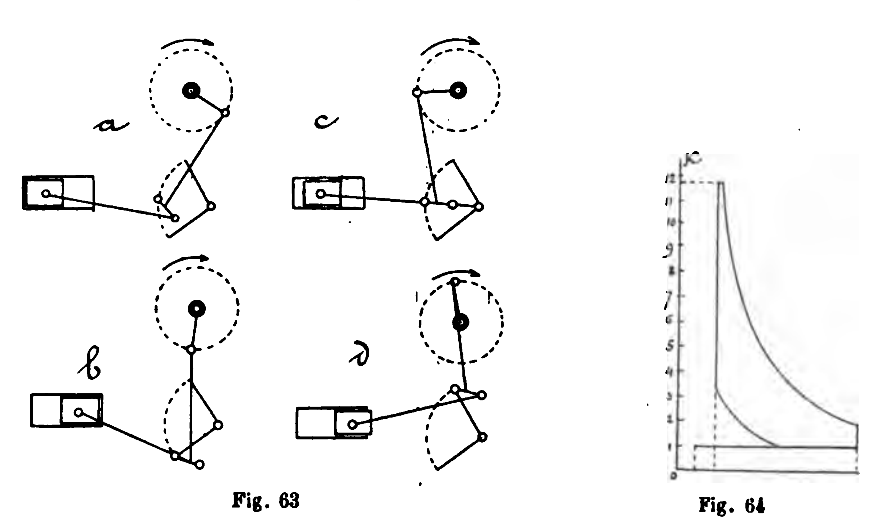


Fig. 63

Fig. 64

d'aspiration *b*, condition qui rapproche le cycle de la machine de celui que nous avons considéré aux numéros 100 et 102; le diagramme du moteur Atkinson est représenté figure 64. L'espace qui reste rempli de gaz brûlé n'est que le neuvième du volume total au commencement de l'expulsion, alors que dans le moteur Otto, il en représente au moins les 0.3.

Dans le moteur Griffin, l'accomplissement du cycle de Otto est suivi de l'aspiration et du refoulement, à pleine course, d'une cylindrée d'air frais qui sert à balayer les gaz brûlés; l'expulsion est donc encore plus complète que dans le moteur précédent, mais le cycle est à six temps; on est donc obligé de rendre les deux faces du piston actives, afin d'ob-

1. *Engineering*, 1887, 1er sem., p. 433. — *Journal of the Society of Arts*, déjà cité, et G. Richard, ouvrage cité.

tenir une impulsion à raison de trois courses. Les phases successives étant désignées par les chiffres 1 à 6 en commençant par l'aspiration du mélange explosif, les opérations qui se produisent simultanément sur les deux faces A et B du piston, sont indiquées l'une en dessous de l'autre dans le tableau suivant :

A	1	2	3	4	5	6
B	4	5	6	1	2	3

Les résultats obtenus par les moteurs Atkinson et Griffin sont à peu près équivalents à ceux de l'Otto, ceux du premier sont même supérieurs. Ce fait tend à démontrer qu'il n'est pas nécessaire de conserver dans le cylindre des produits brûlés, en d'autres termes que le *nachbrennen*, inutile pour amortir [1] le coup de l'explosion, ne présente non plus aucun avantage au point de vue de l'économie.

112. — *Moteurs donnant une impulsion par tour.* — On a cherché aussi à produire des moteurs à quatre temps donnant une impulsion

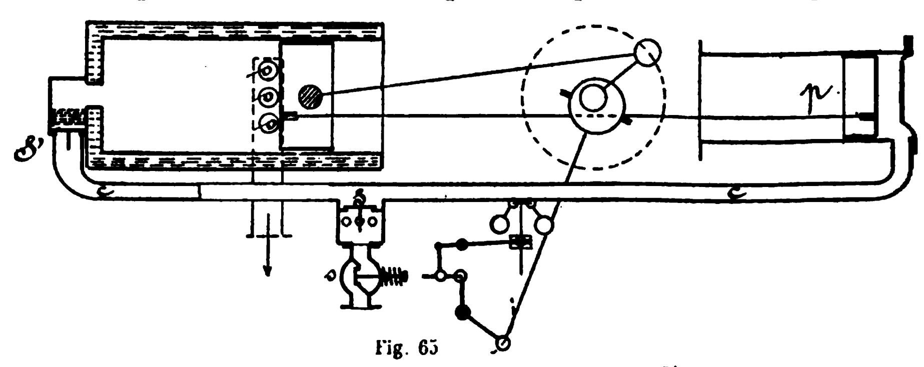


Fig. 65

par course double du piston moteur ; ces machines comprennent une pompe *p* (fig. 65) mue par la tige même du piston, pompe qui aspire le mélange de gaz et d'air à travers les soupapes *s* S, et le refoule dans le

1. Les diagrammes de pression montrent que la pression se développe sur le piston des moteurs à gaz d'une manière plutôt moins brusque que celle de l'admission dans les machines à vapeur. Il est probable que l'opinion contraire, qui est générale et presque instinctive, provient des explosions accidentelles qui se produisent dans certains moteurs où le mélange peut s'emmagasiner, ou des petites explosions inoffensives qui se produisent quelquefois dans les tiroirs allumeurs.

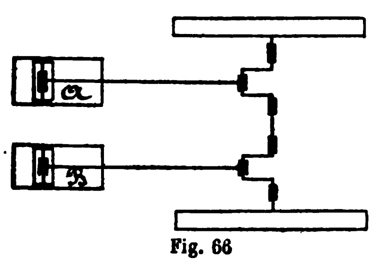
conduit *cc* pendant la course suivante. Le mélange séjourne donc, à faible pression, dans ce conduit volumineux; une soupape S', surmontée d'une boite renfermant des toiles métalliques, empêche la flamme de se communiquer à ce magasin explosif. L'échappement s'opère par une ou plusieurs ouvertures, *o*, placées vers l'extrémité du cylindre, lorsque le piston vient à les dépasser. L'allumage se fait par un tiroir à transport de flamme, ou par un tube d'ignition (113).

La course directe amène donc successivement les opérations suivantes : explosion, détente, échappement anticipé produit par la pression des gaz brûlés, et par l'excès de pression du mélange frais dans le conduit *c*; le mélange frais pénètre donc par l'arrière du cylindre, en chassant devant lui les gaz brûlés.

La course rétrograde complète l'échappement, et comprime le mélange frais qui remplit la partie arrière du cylindre ; cette compression ne commence que lorsque le piston a franchi les orifices *o*.

Dans cette combinaison, il faut éviter un double écueil; d'une part, il est nécessaire de régler convenablement le rapport des volumes du cylindre déplaceur et du cylindre moteur pour que le mélange frais produise une expulsion suffisante, mais sans se perdre par la décharge; d'autre part, il faut éviter à tout prix que l'explosion ne se propage dans le conduit *c* et dans la pompe.

On se heurte toujours fatalement à des difficultés du même genre dans la réalisation, en deux courses, du cycle de Beau de Rochas ou d'Otto ; elles ne sont pas insurmontables, et elles ont été résolues avec un succès relatif dans quelques moteurs : le *Stockport* premier type, par exemple [1]; mais c'est à raison de ces difficultés qu'on a préféré résoudre la question de régularité des moteurs à demi-effet (genre Otto) soit par l'augmentation du volant, soit en conjuguant deux moteurs à manivelles parallèles comme dans la figure 66; les phases se succèdent simultanément pour les cylindres A et B, dans l'ordre suivant, où le chiffre (3) représente l'explosion :


Fig. 66

A	1	2	(3)	4
B	(3)	4	1	2

1. M. Atkinson vient de produire un nouveau moteur appartenant à cette catégorie.

On obtient ainsi une explosion par tour. Ce dispositif est préféré pour les machines actionnant des dynamos, et en général pour les moteurs puissants, atteignant par exemple une vingtaine de chevaux. Pour les moteurs plus importants encore, on conjugue quatre cylindres, (fig. 67), et les phases simultanées sont indiquées par les colonnes verticales dans le tableau ci-dessous; l'ordre de succession des opérations est indiqué, pour chaque cylindre, par les lignes horizontales :

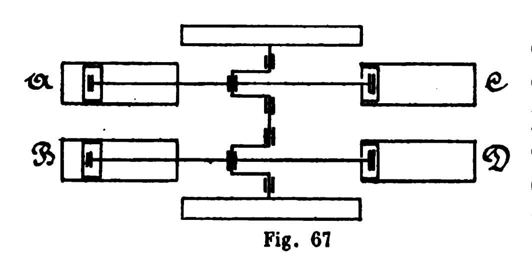


Fig. 67

A	1	2	(3)	4
C	4	1	2	(3)
B	(3)	4	1	2
D	2	(3)	4	1

On obtient ainsi, pour deux révolutions de l'arbre, quatre explosions régulièrement espacées.

Les moteurs atteignent parfois 100 chevaux de puissance.

§ IV

Modes d'allumage et de réglage.

113. — *Modes d'allumage.* — Nous en avons rencontré deux jusqu'ici : l'allumage électrique du moteur Lenoir (1), et le tiroir à transport de flamme du moteur Otto; le système par aspiration de flamme du petit moteur de Bisschop est l'une des variétés de l'allumage par flamme.

Après avoir été très répandu, le tiroir allumeur cède aujourd'hui la

1. L'allumage électrique est le plus souvent opéré au moyen d'une pile et d'une bobine d'induction; les deux pôles sont montés dans un tampon en porcelaine qui les amène au point convenable, et peut se démonter facilement. On emploie également les machines magnéto et même dynamo-électriques. L'allumage électrique est employé aussi pour les moteurs à pétrole. Delamare-Debouteville et Malandin, dans leur moteur *Simplex*, ont imaginé un nouveau mode d'allumage électrique. Voir les Traités spéciaux, et une *Étude générale intéressante des Machines à gaz*, par M. Delamare-Debouteville. *Engineering* 1889, 2e sem., pp. 156, 185.

place à un troisième procédé, car cet organe (en bronze ou en fonte), est exposé à se gripper; c'est pour le moteur de grande puissance que les inconvénients du tiroir deviennent surtout sensibles; on parvient à supprimer cette pièce en employant une soupape pour l'introduction du mélange, et l'on a recours à l'allumage par incandescence.

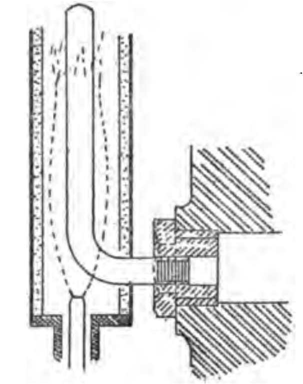


Fig. 68

Dans sa forme la plus simple, l'appareil allumeur comporte un tube fixe, en fer, fermé par forgeage, et vissé dans la culasse du cylindre, avec lequel il est en communication permanente. Ce tube, (fig. 68), est chauffé par une flamme extérieure, que l'on s'attache à rendre réductrice, afin de brûler moins rapidement le tube.

Le mélange détonant, vers la fin de la compression, pénètre jusque dans la partie incandescente du tube et s'y allume; après l'explosion, les produits brûlés qui remplissent le tube se détendent en même temps que les gaz du cylindre, avec lesquels ils sont en équilibre de pression, et au moment où une nouvelle compression commence, le tube est rempli de gaz brûlés, à la pression atmosphérique; la partie incandescente du tube ne peut donc être à son extrémité, car la compression ne peut refouler jusqu'en ce point le mélange frais.

L'allumage par tube incandescent, réduit à ce qui vient d'être exposé, est difficile à régler; le tube se brûle et s'encrasse très vite, il se bouche totalement après peu de temps, de sorte qu'il doit être remplacé tous les deux ou trois jours, ce qui est fort gênant. On a perfectionné et rendu pratique l'allumage par tube, en employant un alliage qui dure beaucoup plus longtemps que le fer, et en rendant tout à fait précis l'instant de l'inflam-

Fig. 69

mation ; à cette fin, une petite soupape *s* (fig. 69) comme dans le moteur Otto-Crosley [1] interrompt d'une manière *permanente* la communication entre le cylindre et le tube, en même temps qu'elle fait communiquer le tube avec l'air extérieur ; au moment où l'allumage doit se produire, un levier permet à la soupape de descendre, elle établit alors la communication entre le cylindre et le tube, celui-ci reçoit le mélange comprimé et l'allume. Les chambres F et G agissent par la détente des produits comprimés qu'elles renferment, pour projeter le courant de flamme à l'intérieur du cylindre sous forme de dard, ce qui est une condition essentielle.

Dans l'allumeur Atkinson actuel, un petit tiroir accomplit identiquement la fonction qui, dans le système précédent, est remplie par une soupape.

L'allumage, ainsi que l'admission dans les machines à vapeur, peut s'opérer dans le voisinage du point mort, un peu avant que le piston n'atteigne l'extrémité de sa course dans le mouvement qui produit la compression ; M. Davies a trouvé qu'il convient de donner un peu *d'avance* à l'allumage, et que l'avance doit être d'autant plus grande que le moteur tourne plus vite [2].

114. — *Réglage.* — Le réglage dépend assez souvent d'un régulateur à force centrifuge [3] semblable à ceux des machines à vapeur, mais une énergie très faible est suffisante, à cause de la légèreté des mécanismes à mouvoir.

Dans le moteur Otto du type ancien, le régulateur, en s'élevant, déplace une came qui cesse d'agir sur le levier commandant l'ouverture de la soupape du gaz (106) ; l'introduction est donc totalement supprimée. Le piston aspire de l'air, qui subit d'abord les effets de la compression, puis de la détente ; le cycle comprend alors deux courses neutres, suivies de deux courses dont l'une est résistante (la compression), et dont l'autre (la détente), développe un travail moteur qui compense à peu près le travail de la compression.

Dans le moteur Otto de 1890 [4], le régulateur, en supprimant la commande de la soupape d'entrée, ouvre l'échappement à chaque tour, et supprime donc les périodes alternativement motrice et résistante. Dans

1. *Journal of the Society of Arts*, rapport cité plus haut, p. 216. — Richard, ouvrage cité, pp. 391 à 398.
2. Richard, p. 378.
3. 1er fascicule, nos 121 à 139.
4. Richard p. 164.

une autre disposition, le régulateur maintient la soupape d'échappement ouverte d'une manière permanente, les gaz brûlés rentrent dans le cylindre en place de l'air froid, ce qui enlève moins de chaleur en pure perte.

Le réglage se fait, dans le moteur Charon, d'une manière différente ; la même quantité de mélange combustible est toujours aspirée au cylindre à travers une soupape, mais celle-ci ne se referme que pendant la course rétrograde, en un point variable d'après la position du régulateur ; le mélange admis au cylindre commence donc par s'en échapper, sans toutefois se perdre, et la partie restante est seule soumise à la compression. La partie du mélange qui sort du cylindre au commencement de la course est tenue en réserve dans un long tuyau enroulé en serpentin, par lequel se fait l'admission de l'air.

Dans ces dernières années, on a adopté assez fréquemment le régulateur pendulaire dans lequel on utilise l'inertie du mouvement de translation, tandis que dans le régulateur ordinaire, c'est celle du mouvement de rotation des boules qui est mise à profit. Dans ce régulateur de translation, la tringle d'excentrique T (fig. 70) actionne la soupape de prise du gaz par l'intermédiaire d'un bras *b*, articulé à l'extrémité E de la tringle, et dont une branche coudée *b'*, porte un contrepoids.

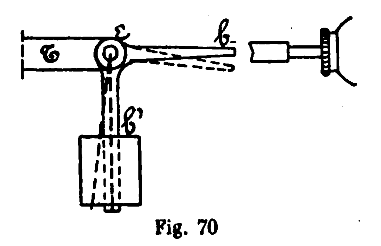


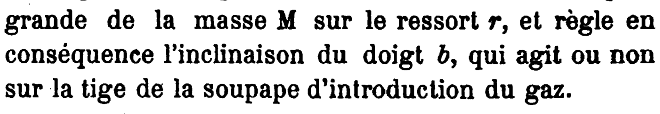
Fig. 70

Le mouvement du point E, qui dépend d'un mouvement circulaire à peu près uniforme, peut, jusqu'à un certain point, être assimilé à celui d'un point appartenant à un pendule ayant la période d'oscillation du point E. Dans ces conditions, on démontre qu'un pendule de très courte période propre, suspendu au point E, prend la période d'oscillation de ce point; l'amplitude de ses déplacements dépend de la période d'oscillation de E [1]. Or, les choses sont disposées de telle manière, que, pour la vitesse

1. La théorie de ce régulateur est au fond assez compliquée, contrairement à ce qu'en ont pensé quelques auteurs, qui ont envisagé le levier coudé, *bb'*, comme un pendule oscillant autour d'un point fixe, ce qui constitue une erreur évidente. On peut aborder l'étude de l'appareil qui nous occupe par les propriétés de la pesanteur apparente. Voir *Pollard* et *Dudebout* — *Théorie du Navire*, t. II, p. 292. — Nous n'avons pas jugé à propos d'établir cette théorie, car il s'agit d'un accessoire d'un coût insignifiant, qu'on peut toujours régler par tâtonnements.

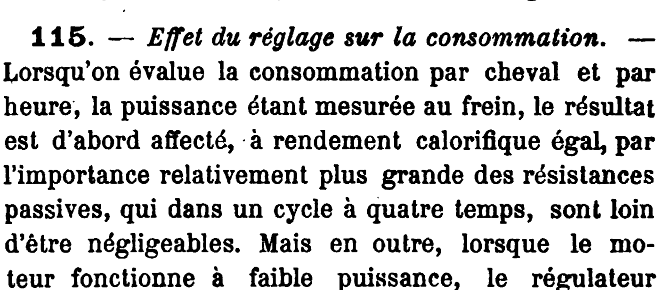
de régime, ou pour toute vitesse inférieure, l'extrémité du levier atteigne la tige de la soupape, tandis que le butoir ne touche pas cette tige lorsque la vitesse de la machine s'accélère.

Le régulateur pendulaire comprend quelquefois une masse M, maintenue par un ressort *r*, et non plus par la pesanteur (fig. 71), l'accélération plus ou moins grande du point E détermine une action plus



grande de la masse M sur le ressort *r*, et règle en conséquence l'inclinaison du doigt *b*, qui agit ou non sur la tige de la soupape d'introduction du gaz.

Fig. 71



115. — ***Effet du réglage sur la consommation.*** — Lorsqu'on évalue la consommation par cheval et par heure, la puissance étant mesurée au frein, le résultat est d'abord affecté, à rendement calorifique égal, par l'importance relativement plus grande des résistances passives, qui dans un cycle à quatre temps, sont loin d'être négligeables. Mais en outre, lorsque le moteur fonctionne à faible puissance, le régulateur supprime un certain nombre de périodes motrices sans supprimer la circulation de l'eau, ni, par conséquent, le refroidissement autour du cylindre; dans beaucoup de cas, l'entrée du gaz est seule supprimée, et l'air froid est admis dans le cylindre, où il enlève de la chaleur aux parois en agissant comme l'eau froide de la circulation [1]. Lorsqu'un moteur fonctionne à puissance réduite, l'effet qui vient d'être signalé abaisse le rendement par cheval indiqué, tandis que le rendement par cheval au frein est affecté, à la fois, par la même cause et par les résistances passives. Une troisième cause contribue à affaiblir le rendement du moteur à faible puissance, c'est la consommation constante du gaz employé à l'allumage, quelle que soit la charge du moteur.

Pour le moteur Otto-Crossley choisi très souvent comme type dans ce chapitre, les essais de la Société des Arts ont donné :

1. M. *Picou* a imaginé, en 1891, un appareil appelé *Thermostat*, qui fonctionne d'après le principe de certains purgeurs automatiques, et manœuvre une soupape réglant la circulation d'après la température.

	CHARGE ENTIÈRE	DEMI-CHARGE	MARCHE A VIDE
Explosions par minute	78.4	41.1	10.2
Révolutions par minute	160.1	158.8	161
Pression initiale moyenne absolue . .	13.4 atm	13 3 atm	10.1 atm
— effective motrice — . .	4.6	4.97	4.5
Puissance indiquée.	17.12	9.73	2.19
— au frein.	14.74	7.41	0
Rendement organique.	0.861	0.762	0
Gaz admis dans le cylindre par heure.	10mc000	5mc750	1mc390
Gaz d'allumage.	0.099	0.091	(0,091) (1)
Ensemble par heure et par cheval indiqué.	0.590	0.600	0.675
Ensemble par heure et par cheval au frein	0.685	0.790	—
Eau par heure	322 k.	217 k.	—
Élévation de température.	71° C.	57° C.	—

La détermination des *dimensions* des cylindres est moins compliquée que celle des mêmes éléments pour les machines à vapeur, où l'on peut faire varier la pression initiale, le degré d'introduction, adopter la condensation ou l'échappement à la pression atmosphérique, partager le travail entre plusieurs cylindres. Dans le moteur à gaz, en effet, la pression moyenne du diagramme résulte du cycle, auquel on ne peut apporter aucune modification lorsque la compression initiale a été fixée par les dimensions relatives de l'espace mort. Les seuls facteurs de la puissance sont le volume engendré par le piston et le nombre de tours par minute de la machine ; celui-ci avait été choisi assez grand dès le début, et à peu près uniforme pour tous les moteurs de puissance inférieure à 20 chevaux. Cette grande vitesse de rotation est une nécessité du cycle à quatre temps, si l'on ne veut recourir à des volants de poids exagéré.

La vitesse de piston est liée aux forces d'inertie qui se développent dans les pièces à mouvement alternatif, comme dans les machines à vapeur, mais elle est en outre limitée par la nécessité de refroidir le cylindre ; de même que pour l'enveloppe de vapeur (164) le flux de chaleur dirigé ici de l'intérieur vers l'extérieur ne dépend pas de la vitesse de rotation. On éprouve donc quelque difficulté à refroidir les cylindres des gros moteurs à allure rapide.

1. Ce chiffre ne se trouve pas dans le tableau original publié par la Commission des essais ; nous lui avons attribué la même valeur que dans l'essai à mi-charge.



§ V

Moteurs alimentés aux gaz pauvres et moteurs à pétrole.

116. — Les moteurs à gaz peuvent fonctionner au moyen des gaz combustibles fabriqués par divers procédés ; le système Dowson est actuellement le plus connu pour cette application spéciale (1).

La figure 72 représente, en *schéma*, les opérations que comporte la fabrication du gaz Dowson ; C est une cornue fermée, dans laquelle le coke ou l'anthracite sont introduits par la trémie T, au moyen d'une manœuvre convenable des portes *p*, *p'* ; on injecte, dans le cendrier

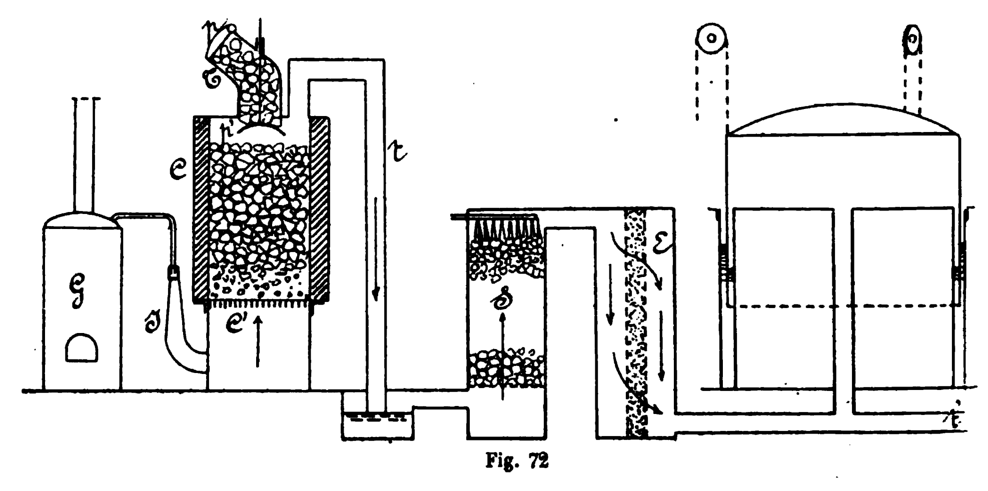


Fig. 72

clos C', un mélange d'air et de vapeur d'eau ; celle-ci est formée à la pression de 3 atmosphères, et surchauffée par un petit générateur G ; elle est introduite dans le cendrier en passant par l'injecteur I, ou elle se mélange avec l'air qu'elle entraine ; *t* est une conduite amenant le gaz plus ou moins refroidi dans un *scrubber* S, à colonne de coke, servant à recueillir le goudron. Le gaz passe ensuite à travers une couche fil-

1. Voir les Cours de Physique industrielle (gaz Strong, Lowe, Siemens, Loomis, Lencauchez). — Richard. ouvrage cité pp. 551 à 601.
Le gaz *Loomis*, par *Oakman*, *Engineering*, 1890, 2e sem., p. 223.
Cheap Gas for motive power, par J. E. Dowson. Minutes of Proceedings of C. E., vol. LXXIII, p. 311 ; même recueil, LXXXIX, p. 302.
Gas Engine Economy.— *Engineering*, 1892. 2e sem., p. 203

trante de sciure de bois, que renferme l'épurateur E, et, de là, dans la cloche du gazomètre; le tuyau de départ est en t'.

La vapeur d'eau surchauffée se dissocie à travers le combustible incandescent, et la combustion étant incomplète à cause du manque d'air et de la forte épaisseur du combustible, il y a formation d'oxyde de carbone. Lorsqu'on emploie l'anthracite, le gaz a la composition suivante en volume :

	D'APRÈS FOSTER [1]	D'APRÈS SCHILLING
Hydrogène	18.73	17
Oxyde de carbone	25.07	23
Gaz des marais.	0.31	2
Gaz oléfiant.	0.31	
Azote.	48.98	52
Acide carbonique	6.57	6
Oxygène.	0.03	
	100	100

La puissance calorifique de ce gaz est 1.300 à 1.500 calories, soit environ le quart de celle du gaz d'éclairage.

Pour faire fonctionner les moteurs au gaz Dowson, on augmente beaucoup la compression initiale, jusqu'à 6 à 7 atmosphères (107); de plus, dans les gros moteurs, dont le cylindre se refroidit difficilement [2], on injecte, pendant l'échappement, de l'eau pulvérisée qui soustrait de la chaleur aux parois. La pression au moment de l'explosion s'élève à 20 atmosphères.

La consommation de gaz Dowson est environ 4 fois plus considérable que celle du gaz ordinaire, soit, dans les bons moteurs, 3 mètres cubes environ par heure et par cheval-mesuré au frein. Dans un essai fait par M. Witz sur un moteur de 100 chevaux, la consommation n'a été que de 2.370 litres, et correspond à une dépense de 612 grammes de combustible [3].

A égale puissance, le cylindre doit être plus grand pour l'em-

1. Cité par M. Witz.
2. La surface du cylindre augmente moins rapidement que son volume.
3. Witz, ouvrage cité, p. 220.

ploi des gaz pauvres que pour le gaz ordinaire, et le rendement organique est par conséquent abaissé.

Le gaz Dowson est toxique, à cause de la forte proportion d'oxyde de carbone qu'il renferme ; comme il est en même temps inodore, les fuites ne se révèlent pas immédiatement; toutefois, l'inconvénient n'est peut être que théorique.

117. — *Moteurs à pétrole.* — Le mélange d'hydrocarbures divers connu sous le nom de pétrole possède un pouvoir calorifique que l'on peut évaluer à 11.000 calories environ par kilogramme, d'après les expériences de M. Sainte-Claire-Deville; en faisant passer de l'air dans les produits les plus volatils, ou essences, qu'on obtient en premier lieu par la distillation du pétrole, on arrive à le carburer et il remplace le gaz d'éclairage dans les moteurs.

Mais le problème que l'on s'est attaché à résoudre, le seul du reste qui présente un véritable intérêt pratique, est d'obtenir la force motrice au moyen des huiles lampantes du commerce qui ne s'enflamment pas au-dessous de 35° centigrades, tandis que les huiles légères (naphte, gazoline) s'enflamment en dessous de 22° centigrades, et sont pour cette raison d'une manipulation dangereuse ([1]). Les différents produits de distillation du pétrole sont caractérisés par leur densité par rapport à l'eau (ou leurs poids spécifiques); les huiles légères telles que le naphte, la gazoline, la benzoline, ont une densité de 0,65 à 0,70 ; les pétroles ordinaires servant à l'éclairage ont une densité de 0,80 à 0,85.

Après beaucoup de tâtonnements, dans lesquels on a employé surtout des huiles légères, Brayton, en 1873, a réalisé une machine à pétrole ordinaire; toutefois, le genre particulier de moteurs qui nous occupent commence à peine à sortir de sa période de développement.

En principe, pour remplacer le gaz d'éclairage par une huile légère, on fait passer une partie de l'air aspiré par la machine à travers l'huile contenue dans un récipient en tôle, où elle est légèrement chauffée par un serpentin dans lequel passe l'eau de circulation au moment où elle

1. On peut employer le pétrole en le transformant d'abord en gaz dans une cornue, mais le moteur à gaz ne diffère pas alors du système ordinaire; on peut du reste, dans ce cas, employer des huiles lourdes, analogues à celles que l'on brûle dans certaines parties de la Russie pour le chauffage des machines locomotives ou des bateaux à vapeur. Quant aux huiles légères, elles peuvent aussi être employées en vapeur formée sous pression, comme la vapeur des machines ordinaires. Voir chap. V, § IV.



abandonne le cylindre; on forme ainsi un air carburé riche qui remplace le gaz dans la composition de la charge.

Lorsque l'on remplace le naphte par du pétrole ordinaire, les choses se passent de la même manière, mais les produits les plus légers se séparent d'abord, et au bout de quelque temps de marche, il reste dans le réservoir une huile plus lourde, qui ne peut plus produire la carburation.

C'est contre cette difficulté que l'on a eu constamment à lutter; on l'a vaincue par des moyens différents, basés sur la dispersion du pétrole en petites gouttelettes par un moyen mécanique (brosse métallique tournante, brosse en hélice, etc.). Le procédé qui a le mieux réussi est la *pulvérisation* de l'huile, envoyée généralement par une petite pompe; un jet très divisé pénètre dans la chambre de combustion, où il se transforme en gaz à cause de la température des parois; il s'est mélangé, dans son trajet vers le cylindre, avec la quantité d'air nécessaire à la composition du mélange explosif; le cycle est celui du moteur Otto.

On a souvent employé l'allumage électrique, car le tiroir à transport de flamme n'est pas réalisable; cependant, on emploie aussi le tube allumeur.

L'allumage électrique fonctionne avec plus de sûreté pour le pétrole que pour le gaz, parce que le dépôt qui peut se former entre les deux électrodes est isolant et ne ferme pas le courant.

Le moteur *Priestman*, soumis à l'expérimentation par M. Unwin, présente les dispositions caractéristiques qui viennent d'être sommairement décrites [1]. Le pulvérisateur (fig. 73) consiste en un ajutage central qui fait déboucher le petit jet de pétrole au centre d'un jet d'air rentrant, de forme annulaire. Le pétrole et l'air proviennent d'un réservoir fermé dans lequel on met simplement la provision d'huile pour un certain nombre d'heures de fonctionnement; une pompe mue par un excentrique (qui sert en même temps à la distribution) main-

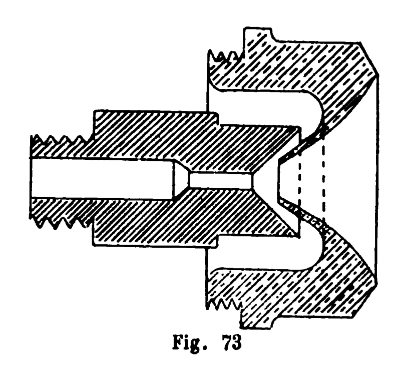


Fig. 73

1. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. CIX et CX, 1892.

Le rapport de M. Unwin contient des données très précises sur la marche du moteur Priestman, essayé avec une huile russe de 0,82 de densité, s'enflammant à 30°, et une huile américaine de 0,79 de densité, s'enflammant à 25°,

tient la pression d'air dans le réservoir. Pour la mise en train, on emploie une pompe à main; la pression est maintenue constante par une soupape de sûreté qui s'ouvre à 2/3 d'atmosphère environ. Le jet pulvérisé débouche au centre d'un réservoir ou chambre de mélange, placé sous le cylindre, qui s'ouvre de l'extérieur vers l'intérieur; il rencontre l'air aspiré par la machine à travers une soupape; cet air est réparti tout autour du jet divisé. La chambre de mélange est à double paroi, et l'intervalle est parcouru par les gaz chauds de l'échappement; il est probable que le pétrole se vaporise dans le mélangeur et est admis au cylindre sous forme de gaz, bien que son état de division soit suffisant pour produire l'explosion dans le cylindre, même si la vaporisation n'était pas complète. L'admission et l'échappement du cylindre proprement dit sont produits par des soupapes comme dans le plus simple des moteurs à gaz.

Pour le départ, on chauffe la chambre de mélange au moyen d'un brûleur. L'étincelle d'allumage est produite par un contact établi par un excentrique, qui fait jaillir entre les deux électrodes l'étincelle d'une pile au bi-chromate de potasse. La dépense pour 20 à 30 heures de marche serait de 250 grammes de bi-chromate, 180 grammes d'acide sulfurique, 2 1/2 litres d'eau et environ 1 kilogramme de zinc. L'excentrique unique sert à mouvoir la pompe de compression et la soupape de décharge; le régulateur agit par étranglement du jet de pétrole. Avec les huiles employées par M. Unwin, la pression d'explosion était de 10 atmosphères absolues, pour une compression initiale un peu supérieure à 2 atmosphères absolues, et, par conséquent, très modérée, provenant de ce que l'espace nuisible est considérable (environ 53 % du volume décrit par le piston, à peu près comme dans le moteur Otto allemand). La composition de la charge à pleine puissance est de 30 d'air pour 1 d'huile, en poids.

L'emploi de la chaleur est détaillé, pour l'un des essais, de la manière suivante :

Chaleur fournie par la combustion : 1 c.	Transformée en travail utile. .	0.1331	0.1612
	— résistances passives	0.0281	
	Emportée par l'eau de circulation . . .		0.4754
	— par les gaz d'échappement . .		0.2672
	Rayonnement et pertes		0.0962
			1.0000

par conséquent plus légère. Les pouvoirs calorifiques déduits de l'analyse étaient 11,000 c. et 11,800 c. respectivement, l'eau étant à l'état de vapeur.

W. *Robinson.* — Uses of Petroleum in Prime Movers. — *Engineering*, 1891, 2e sem., pp. 400, 430; 1892, 1er sem., pp. 327; 359, 385.

Moteur Altmann, même recueil, 1890, 2e sem., p. 454.

Moteurs *Wells*, *Hornsby*, même recueil, 1892, 1er sem., p. 782

Ce tableau accuse un résultat assez notablement inférieur à celui qui est donné pour la machine à gaz au numéro 109, mais lorsque l'on tient compte du prix du combustible, il est néanmoins excellent, car il correspond à un peu moins de 400 grammes par heure et par cheval indiqué (430 grammes par cheval au frein) pour l'huile la plus lourde qui a été essayée (1).

Le moteur Otto fonctionne aussi, moyennant certaines modifications, au pétrole ordinaire, de même que plusieurs autres machines à gaz.

1. Lorsque l'on compare les différentes machines thermiques existantes, si l'on se place au point de vue de la dépense de chaleur par unité de puissance (ou travail effectif par seconde sur l'arbre) pendant un temps déterminé, c'est-à-dire par cheval-heure mesuré au frein, on peut établir le tableau suivant, en ne considérant que les meilleurs résultats obtenus :

MOTEURS	DÉPENSE en calories	COUT de la chaleur développée	OBSERVATIONS
1. Moteurs à vapeur les plus perfectionnés, pour de grandes puissances	6.600	0fr01 à 0fr02	Charbon de 10 à 20 fr. la tonne.
2. Moteur à air chaud . .	8.000	0.018 à 0.024	Coke de 18 à 24 fr.
3. Moteur à gaz d'éclairage.	3.300	0.059 à 0.12	Gaz de 0,10 à 0,20 le mètre cube.
4. Moteur à gaz avec gazogène Dowson	4.900	0.009 à 0.015	Anthracite de 15 à 25 fr. la tonne.
5. Moteur à pétrole . . .	4.750	0.054 à 0.081	Pétrole de 0,10 à 0,15 le litre.

Pour la machine à vapeur, la dépense est comptée sur la grille du générateur.

En réalité, les frais afférents à chaque machine comprennent d'autres dépenses que celle du combustible, qui doivent évidemment entrer en ligne de compte; les chiffres ci-dessus s'appliquent à une marche continue; lorsque la marche est intermittente, la dépense du combustible est augmentée à cause de la mise en train, pour les moteurs 1 et 4; elle reste stationnaire pour les autres.

CHAPITRE V

Machines à vapeur.

---

§ I

Cycles des machines à vapeur d'eau.

118. — *Fonctionnement de la machine à vapeur.* — La machine à vapeur comporte un générateur G, dans lequel la vaporisation s'effectue sous l'influence du foyer F (fig. 74); la vapeur est distribuée sur chaque face du piston par les obturateurs A, E; nous pouvons supposer,

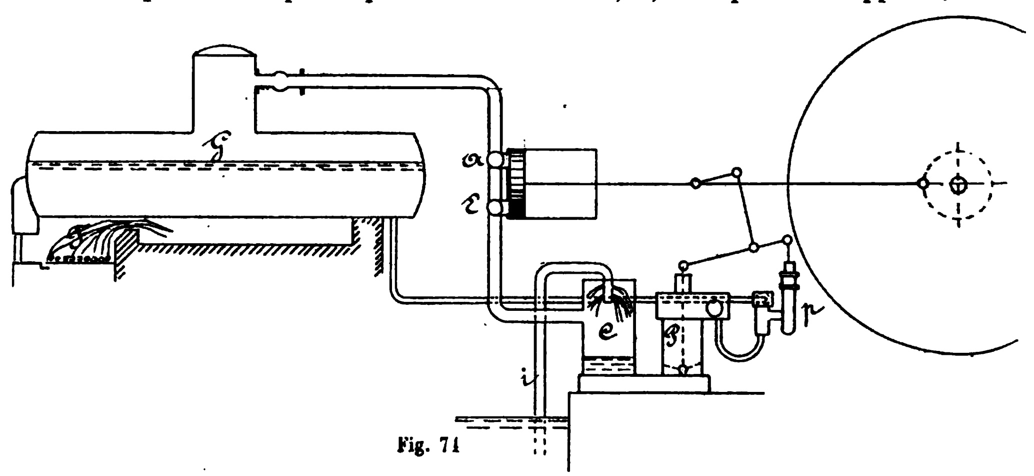


Fig. 74

sans altérer en rien le raisonnement, que la face de gauche seule du piston est active, et que le poids de fluide admis au cylindre pendant l'ouverture de l'obturateur A est de 1 kilogramme (1). La vapeur se détend dans le cylindre, lorsque l'introduction est fermée, jusqu'à l'extré-

1. Voir la remarque faite au n° 82.
Une partie seulement de la chaleur développée dans le foyer est utilement transmise à la chaudière; le reste se perd par le rayonnement et par les gaz chauds de la cheminée, mais le rendement de la chaudière forme une étude distincte qui fera l'objet du § VII de ce chapitre.

mité de la course du piston ; puis l'obturateur d'échappement E, s'ouvre, la vapeur s'échappe au condenseur C, maintenu à une température aussi basse que possible. La pompe à air P, extrait les fluides amenés au condenseur (eau, air, vapeur) de manière à maintenir dans ce récipient un certain état de régime. L'eau froide d'injection, qui pénètre au condenseur par le tuyau *i*, sort de la pompe à air à une température plus élevée ; une partie de cette eau est prise au trop plein et refoulée à la chaudière par la pompe alimentaire *p*. Lorsque l'état de régime est établi, le poids de vapeur absorbé par la machine est égal au poids d'eau qui retourne à la chaudière refoulé par l'appareil d'alimentation.

D'ailleurs, la condensation s'effectue quelquefois, pour les appareils marins, par exemple, par contact avec un faisceau tubulaire refroidi par un courant d'eau, et dans ce cas, non seulement la quantité d'eau refoulée à la chaudière est égale en poids à celle qui provient de la condensation, mais cette eau est celle même qui résulte de la vapeur condensée.

La puissance nécessaire pour manœuvrer les pompes P et *p* est empruntée à celle que recueille le piston principal, ou à une machine auxiliaire, mais ces deux cas n'en forment qu'un seul au point de vue thermique.

On peut évidemment analyser le fonctionnement de la machine et apprécier son rendement calorifique en comparant, d'une part, la quantité de chaleur communiquée au kilogramme liquide qui retourne à la chaudière à la température t_2 pour y être transformé en vapeur saturée à la température t_1, d'autre part, le travail développé sur le piston, diminué du travail utile des pompes P et *p*.

Le travail des pompes compliquerait inutilement et d'une manière irrationnelle l'appréciation de la machine envisagée comme machine thermique, mais on peut ramener la question à des termes plus simples et distinguer deux cas :

A. — Lorsque la condensation s'opère par surface, de l'eau froide en quantité assez grande circule, sous l'action d'une pompe spéciale, dans le faisceau tubulaire du condenseur ; théoriquement, cette pompe ne sert qu'à vaincre les résistances au mouvement de l'eau, et sa commande n'intéresse que les résistances passives ; il peut même arriver que l'eau de circulation effectue, depuis la surface libre de la nappe où elle est puisée jusqu'à la surface libre où elle est rejetée, un certain parcours vertical descendant ou ascendant ; ces circonstances seront

favorables ou défavorables au travail définitivement recueilli, mais elles n'intéressent pas le problème thermique.

Dans les machines à condensation par surface, nous ne devrons nous occuper que de l'extraction des produits de la condensation, c'est-à-dire, en toute rigueur, de la vapeur condensée et amenée à l'état liquide. La pompe alimentaire suffirait pour accomplir cette fonction, et si l'on emploie une pompe à air, même dans les machines à condensation par surface, c'est pour combattre la tension due aux rentrées d'air accidentelles; cette pompe extrait en même temps l'eau de condensation, qu'elle porte de la pression p_2 du condenseur à la pression atmosphérique p_a; la pompe alimentaire élève cette pression jusqu'à celle de la chaudière p_1. En résumé, il n'y a lieu de s'occuper ici que d'une seule pompe : la pompe alimentaire, qui élèverait l'eau de la pression p_2 à la pression p_1.

B.— Lorsque la condensation a lieu par mélange, c'est-à-dire dans un condenseur à injection, il est facile de voir que le travail relatif à l'introduction et à l'extraction de l'eau est théoriquement nul, si la hauteur de chute dans le condenseur est elle-même nulle, et si l'entrée et la sortie ont lieu au même niveau, comme dans la figure 75; car le travail de la pression atmosphérique sur l'eau qui entre dans le condenseur et sur celle qui en sort est nul au total; le mouvement pourrait être obtenu sans aucune dépense de travail extérieur, par deux pistons de même section, reliés à un balancier à bras égaux, dont la manœuvre n'absorberait aucun travail. La pompe alimentaire devra encore extraire du condenseur l'eau refoulée à la chaudière, comme dans le cas du condenseur à surface.

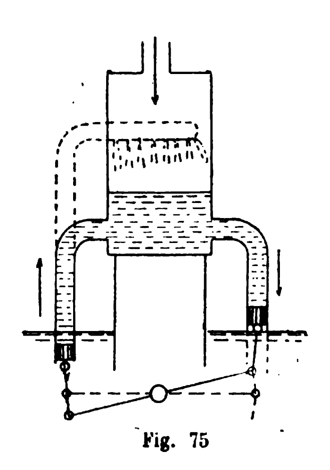


Fig. 75

Il est vrai que, dans le condenseur à injection, ces dispositions ne sont pas employées, l'eau chaude est rejetée à un niveau plus élevé que celui de la nappe froide, mais c'est pour des raisons de convenance étrangères au problème.

Afin de rendre la condensation plus rapide, on multiplie la surface de contact de la vapeur avec l'eau, en faisant arriver celle-ci sous forme de gerbe divisée, comme l'indique le tuyautage pointillé de la figure.

Le travail d'introduction de l'eau n'est pas alors entièrement régénéré; une certaine chute est perdue dans le condenseur, et la force vive correspondante, tout à fait négligeable d'ailleurs, est transformée en chaleur. Ce phénomène n'a aucune importance.

La chaleur abandonnée par la vapeur du cylindre se manifeste par l'accroissement de température de l'eau du condenseur; une partie très faible est perdue en rayonnement. Quelle que soit la complication des phénomènes thermiques qui s'accomplissent, le principe de l'équivalence leur est toujours applicable; en appelant Q_1 la quantité de chaleur reçue effectivement par la chaudière, Q_2 la quantité de chaleur abandonnée au condenseur, L le travail accompli, on a toujours :

$$Q_1 - Q_2 = AL.$$

Le rendement calorifique est :

$$\rho = \frac{Q_2 - Q_2}{Q_1} = \frac{AL}{Q_2 + AL} = \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{AL}}$$

La quantité Q_2 se prête à une mesure expérimentale, sinon rapide, au moins possible et même facile, car Q_1 est égal, au rayonnement près, à la quantité de chaleur acquise par l'eau d'injection, dont on peut évaluer le volume en même temps que l'accroissement de température. Le travail L résulte du relevé des courbes d'indicateur, après déduction du travail utile de la pompe alimentaire.

Le rapport $\frac{Q_2}{AL}$ peut servir à apprécier le rendement, tout aussi bien que ρ, et ce rapport est connu sous le nom de *coefficient de Donkin*.

119. — Il est utile de rattacher le cycle de la machine à vapeur aux cycles connus, par une marche analogue à celle que nous avons suivie pour les moteurs à air chaud et les moteurs à gaz. Imaginons, à cet effet, le procédé idéal suivant :

Soit un moteur comportant un espace nuisible de volume u (volume spécifique de l'eau, supposé constant quelle que soit la température), soit T_1 la température initiale de l'eau remplissant l'espace nuisible, et p_1 la pression de la vapeur saturée correspondante ; communiquons la chaleur à travers le cylindre lui-même, suivant le mode du cycle de



Carnot, c'est-à-dire à la température constante t_1; supposons que la résistance appliquée au piston varie pendant le cycle de manière à ce que les opérations soient réversibles; nous réaliserons le cycle de Carnot ABCD (fig. 76), formé de deux isothermiques AB et CD et de deux lignes adiabatiques BC, DA.

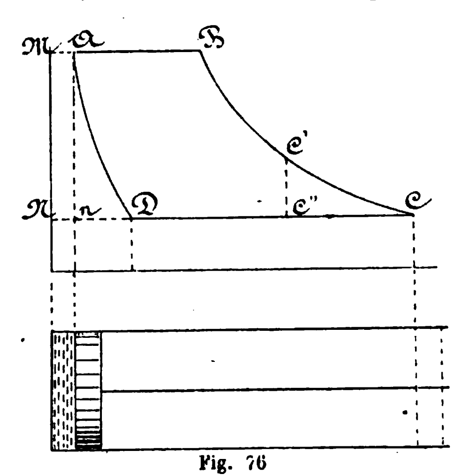


Fig. 76

Soit, pour le point B, x_1 le titre du mélange, il se modifie de B en C où il devient x_2, puis de C en D, où il a pour valeur x'_2. Le rendement calorifique est celui du cycle parfait, quelle que soit la valeur du titre x_1 au commencement de la détente; les moyens d'augmenter ce rendement sont ceux qui sont applicables à tous les cycles, ils consistent à élever T_1 et à abaisser T_2.

Dans la machine réelle, la vapeur, au lieu d'être formée dans le cylindre sous pression constante est produite dans la chaudière et dans les mêmes conditions [1]; la phase AB de la machine idéale est donc

1. Il est nécessaire de justifier la substitution des deux phénomènes l'un à l'autre. Isolons, par la pensée, dans la machine réelle, le kilogramme de fluide qui va être admis au cylindre; supposons qu'il se trouve dans le tuyau de prise de vapeur, d'où il passe dans le cylindre au moment où s'ouvre l'obturateur d'admission. Pendant l'introduction au cylindre, l'état du fluide ne se modifie pas, car il reçoit, de la vapeur qui se trouve derrière lui dans la conduite, un travail égal à celui qu'il effectue sur le piston moteur. En même temps que s'accomplit cette opération, la vapeur de la chaudière comble le vide produit dans le tuyau; la chaleur à fournir à l'eau, depuis la température d'introduction dans la chaudière, se compose :

1°) de la chaleur interne :

$$q_1 - q_2 + x_1 [r_1 - Ap_1 (u_1' - u)]$$

2°) de la chaleur correspondante au travail produit sur le fluide qui a été poussé dans le cylindre :

$$Ap_1 [u + (u_1' - u) x_1]$$

3°) il faut soustraire, des quantités précédentes, la chaleur correspondante au travail exercé sur la masse contenue dans la chaudière par le piston de la pompe alimentaire :

$$Ap_1 u$$

Il vient donc, pour le total de la chaleur fournie par la chaudière à chaque coup de piston :

$$q_1 - q_2 + x_1 r_1$$

Cette quantité représente aussi la chaleur fournie à l'eau à l'intérieur du cylindre dans le procédé idéal.

remplacée par la ligne de pression MB de la machine réelle. Au commencement de la détente, le cylindre de la machine réelle renferme le volume MB de mélange, et, bien que la détente ne puisse être adiabatique, nous commencerons par faire cette supposition; nous admettons aussi qu'elle est complète, c'est-à-dire que le cylindre est prolongé suffisamment pour que la température du mélange s'abaisse jusqu'à la température T_2. La phase BC est évidemment la même dans les deux cycles.

Pendant la période CD, la vapeur du cylindre est mise en communication avec le condenseur, et nous pouvons, à la rigueur, imaginer que la condensation est progressive, et se produit sous la pression constante exercée par le piston (égale à celle de la vapeur elle-même, à la température T_2) comme dans le procédé idéal; toutefois, dans la machine réelle, le kilogramme de vapeur est complètement condensé; et l'espace parcouru par le piston est CN. Pour ramener le fluide à son état primitif, c'est-à-dire sous forme liquide, à la température de la chaudière, il faut d'abord l'aspirer du condenseur dans la pompe alimentaire [1], puis le refouler, ce qui donne, pour la pompe, le diagramme des pressions N*n*AM. Le diagramme résultant de la combinaison des travaux sur le piston moteur et le piston alimentaire est la figure fermée ABC*n*A.

Pour que la machine réelle fonctionne entre les points C et A comme la machine idéale, il faudrait, ainsi que M. Zeuner l'a indiqué, injecter dans le cylindre, lorsqu'il renferme encore le poids x'_2 de vapeur, le poids d'eau nécessaire pour compléter le kilogramme de fluide; le mélange serait comprimé suivant la ligne DA par le piston moteur; au point A, le cylindre serait mis en communication avec la chaudière, et le mélange, complètement liquide et à la température T_1, pénétrerait dans le générateur.

Cette opération ne devrait pas se faire nécessairement dans le cylindre, la ligne d'échappement se poursuivrait jusqu'en N; mais, à partir d'un point convenablement choisi, l'échappement, au lieu d'être dirigé vers le condenseur, serait envoyé dans une pompe spéciale, qui aurait au préalable aspiré le poids d'eau nécessaire; dans ce cas, cette pompe auxiliaire aurait le diagramme de pressions NDAM; en le réunissant au diagramme du cylindre MBCN, on trouverait le diagramme ABCDA de la machine idéale.

1. La pompe alimentaire n'aspire pas au condenseur; c'est la pompe à air qui élève l'eau jusqu'à la pression atmosphérique, et la pompe alimentaire effectue le supplément du travail de refoulement.



120. — Le mode de fonctionnement que nous venons d'indiquer n'a jamais été réalisé [1]; souvent, il est vrai, les courbes d'indicateur des machines à vapeur présentent à peu près la forme ABCD, parce que l'échappement, au lieu de se prolonger jusqu'à la fin de la course, est fermé plus tôt; la vapeur *qui reste* dans le cylindre est comprimée, et une ligne analogue à DA représente sa loi de compression; ce qui caractérise la ligne de compression DA, du cycle de Carnot, c'est qu'elle est relative au *poids total* du fluide et non à une fraction presqu'insignifiante de ce poids.

121. — Les opérations du cycle de la machine idéale, (ABCDA) et du cycle fictif des machines réelles, ABC*n*A, se traduisent très facilement sur le diagramme de l'entropie et de la température (48). Le cycle idéal est le rectangle $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 77), son rendement est constant quel que soit le titre à l'origine de la détente adiabatique, il est le même que celui de tout cycle de Carnot entre les mêmes températures.

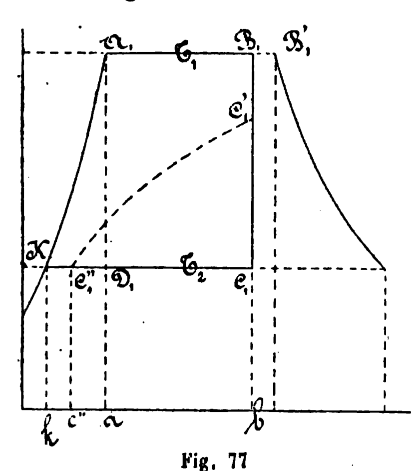


Fig. 77

Le rendement de la machine réelle, à détente complète, serait le rapport de la quantité de chaleur transformée en travail, $KA_1 B_1 C_1 K$ à la dépense totale de chaleur kKA_1B_1b [2]; ce rapport est évidemment plus petit que celui du cycle de Carnot; en supprimant la compression

1. Il a cependant fait l'objet de quelques tentatives, notamment dans une machine exposée à Anvers, en 1885, mais qui pensons-nous, n'a pas fonctionné nous reviendrons sur cette question aux n[os] 127 et 128.

L'intérêt qu'il y a à donner aux machines réelles la quatrième opération du cycle de Carnot est douteux. M. Willans faisait observer avec raison (*Engineering*), 1890, 1[er] sem, p. 321) que la chaleur des gaz, qui serait sans cela emportée inutilement à la cheminée, réchauffe l'eau plus économiquement que ne le ferait la période de compression, qui absorberait un certain travail. M. *Cotterill* a exprimé la même idée en disant qu'une machine à cycle de Carnot aurait une chaudière moins parfaite, puisqu'elle ne pourrait être pourvue d'un réchauffeur. Ce raisonnement comporte cependant des exceptions, car le réchauffage par les gaz perdus n'est pas d'un emploi général. Sauf dans les chaudières à réchauffeurs, l'eau d'alimentation est mélangée dans la masse générale, et on ne profite pas de la chaleur des gaz qui s'échappent en quittant le corps principal de la chaudière.

2. L'axe, à partir duquel sont comptées les températures, est considérablement relevé dans la figure.

$D_1 A_1$ pour la remplacer par les transformations $D_1 K$, $K A_1$, on augmente le travail de toute la quantité équivalente à la chaleur $K A_1 D_1$, mais on augmente en même temps la perte au réfrigérant de toute la chaleur représentée par le rectangle Ka. On tire facilement du diagramme les conclusions suivantes :

1° Le procédé de la machine réelle, dans laquelle on échauffe l'eau par une dépense de chaleur $k K A_1 a$, est inférieur à celui de la machine idéale ;

2° Pour la machine réelle, le titre de la vapeur admise a une influence sur le rendement ; celui-ci est minimum lorsque le titre est nul, et augmente d'une manière continue lorsque la vapeur devient plus sèche, car plus le titre est élevé, et plus la portion rectangulaire du diagramme entropique est grande, relativement à la portion triangulaire. Le rendement est maximum lorsque le titre $x_1 = 1$, le point B_1 vient alors en B'_1 ;

3° Le rendement de la machine idéale augmente, pour une même température finale T_2, avec la température initiale T_1 ; ce rendement serait maximum au point limite (53), qui correspond à une pression inabordable en pratique ;

4° Le rendement de la machine réelle augmente plus lentement que celui du cycle de Carnot, lorsque la température T_1 s'élève ; pour une même température inférieure ($T_2 = 273 + 50$), et une température initiale égale à 180° et 200° C, respectivement, on trouve :

	T_1		AUGMENTATION par unité de chaleur dépensée
	273 + 180	173 + 200	
Rendement du cycle réel.	0 316	0.337	0.021
— du cycle idéal	0.286	0.317	0.031

5° Dans la machine réelle, la quantité de chaleur à dépenser pour ramener l'eau d'alimentation de la température T_2 à la température initiale T_1 n'est pas rigoureusement égale à celle nécessaire pour produire la transformation KA_1 du diagramme entropique ; celle-ci suppose, en effet, que la chaleur est communiquée au liquide sous la pression croissante qui correspond à sa température ; tandis que, dans la chaudière,

la chaleur est communiquée au liquide sous pression constante ; mais comme nous faisons abstraction de la dilatation du liquide, les deux procédés sont identiques au point de vue de la chaleur dépensée,

122. — *Effet de la détente incomplète.* — Lorsque la détente ne se prolonge pas jusqu'à la pression du condenseur, mais s'arrête, par exemple, au point C' (fig. 76), le cylindre étant mis brusquement en communication avec le condenseur, la vapeur s'échappe rapidement du cylindre en prenant une force vive sensible; la courbe des pressions subit une chute brusque C' C''; il en est ainsi, tout au moins, lorsque les passages sont assez largement calculés. Ce phénomène n'est pas réversible, mais à l'exemple de ce qui a été fait pour les machines à gaz (101), il peut être remplacé par une opération réversible, pourvu que, par cette substitution, on n'altère, ni le travail recueilli, ni la chaleur perdue au réfrigérant.

On peut toujours appliquer le principe de l'équivalence aux opérations irréversibles; prenons, par exemple, le mélange contenu dans le cylindre au point C' de la courbe de détente, c'est-à-dire lorsque la température est T' et le titre x'. Le condenseur renferme, à ce moment, de l'eau et de la vapeur saturée à la température T_2; bien que la vapeur se précipite, pendant la chute C'C'', du cylindre vers le condenseur, le contenu de ce récipient ne change pas, car le volume d'eau échauffé que l'on en extrait est égal au volume d'eau froide que l'on y injecte et qui est supposé prendre instantanément la température T_2 [1]; le volume de la vapeur condensée qui s'ajoute au liquide est insignifiant, et l'on peut même supposer qu'il est extrait, au fur et à mesure, par la pompe alimentaire.

Ainsi, lorsque l'équilibre est établi, le contenu du condenseur n'a pas changé, mais l'eau introduite et extraite pendant l'opération a enlevé une certaine quantité de chaleur R au mélange du cylindre. Il n'y a pas d'ailleurs de travail effectué, puisque le piston est resté en place ; par conséquent, la perte de chaleur interne du mélange contenu dans le cylindre, entre les deux états C' et C'', est égale à la quantité de chaleur R enlevée par le condenseur.

Or, si l'on suppose maintenant que l'on amène le mélange de l'état C' à l'état C'' par une transformation réversible, c'est-à-dire par une soustraction de chaleur à volume constant, il n'y a pas non plus de travail accompli; la chaleur enlevée sera égale, par conséquent, à la perte de

1. Nous faisons ici abstraction de l'air renfermé dans le condenseur.

chaleur interne entre les états C' et C"; mais le mélange possède, en ces deux points, des titres égaux à ceux qu'il avait pour l'opération non réversible, puisque le volume du fluide est toujours celui du cylindre, et que les pressions sont les mêmes dans les deux cas.

Par conséquent, la chaleur perdue par la transformation réversible à volume constant est égale à R, comme pour l'opération réelle, l'état final du fluide est le même, et, pour les questions de rendement, nous pourrons traduire la ligne C' C", du diagramme des pressions, par la ligne de transformation à volume constant C'_1 C''_1, du diagramme entropique (fig. 77). D'après la signification de cette ligne, on voit que la chaleur abandonnée au condenseur pendant la chute brusque de pression au cylindre est fournie par la surface $C'_1C''_1c''b$.

Relativement à la machine à détente complète, la perte est augmentée de $C'_1C''_1C_1$, et la quantité de chaleur transformée en travail est diminuée d'autant.

(Nous avons donné au numéro 58 un mode de construction de la ligne d'égal volume C'_1 C''_1, au moyen des valeurs $\frac{dp}{dt}$ contenues dans les tables de M. Zeuner).

En limitant la détente, on réduit le volume du cylindre dans le rapport :

$$\frac{NC''}{NC}$$

rapport qui, exprimé en fonction des titres x_2 et x''_2 aux points C et C" devient :

$$\frac{u + (u'_2 - u)\, x''_2}{u + (u'_2 - u)\, x_2}$$

ou, très approximativement, à cause de la faible valeur de u :

$$\frac{x''_2}{x_2}$$

Les entropies KC''_1, KC_1, étant elles-mêmes dans le rapport des quantités de vapeur présentes, expriment aussi les volumes proportionnels des cylindres.

Nous avons vu d'ailleurs, au numéro 60, comment on peut déduire la courbe de détente de sa transformée entropique, ou *vice versa;* la même construction est reproduite dans la figure 78; ABCn est le diagramme des pressions correspondant au diagramme entropique $K_1\,A_1\,B_1\,C_1$. Le titre initial de la vapeur étant quelconque, au moyen du faisceau de

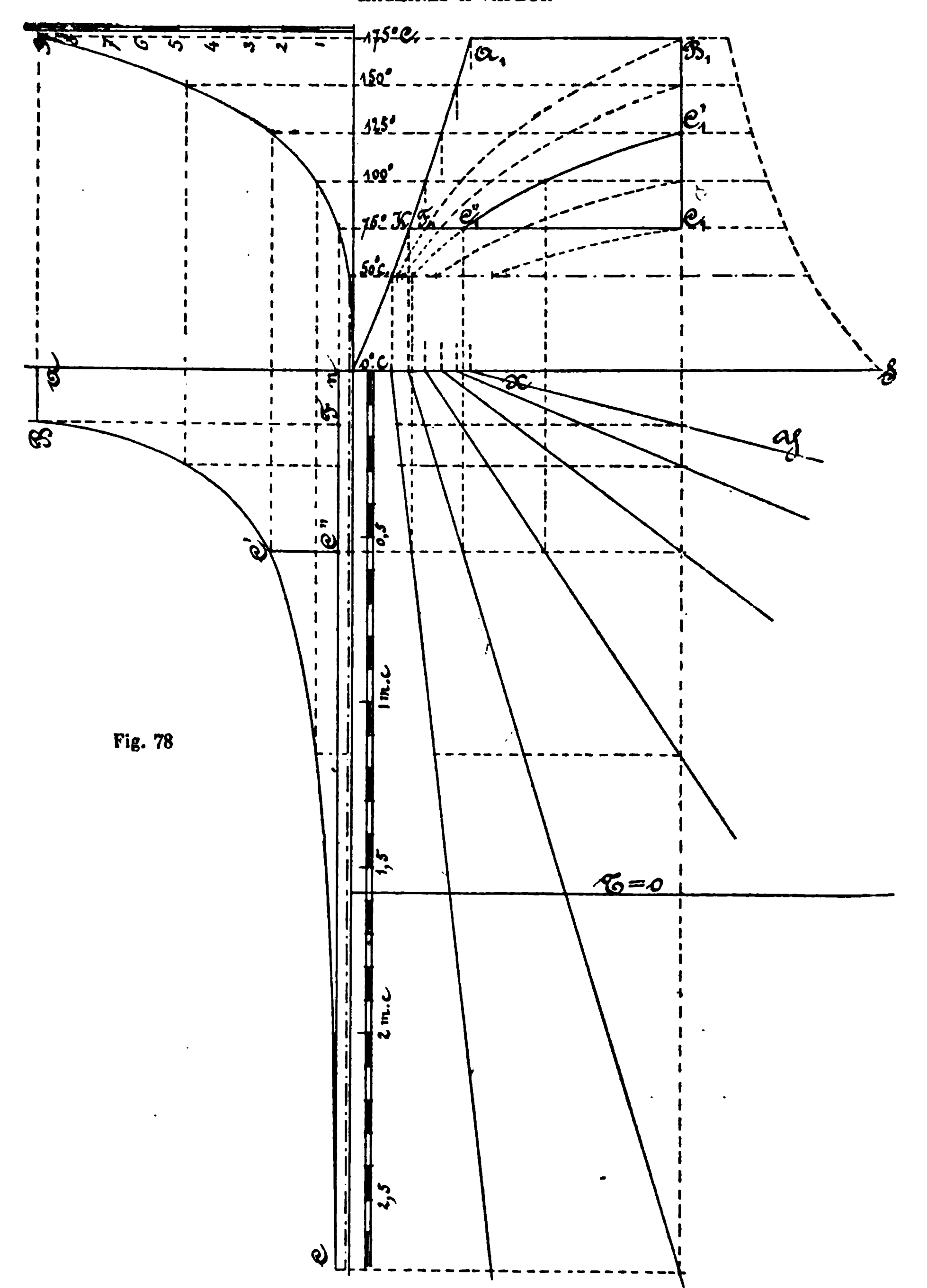


Fig. 78

lignes droites telles que XY données par les valeurs de $\frac{dt}{dp}$, on obtient rapidement les lignes d'égal volume telles que C'_1 C''_1. Lorsqu'il n'y a pas de détente, le diagramme des pressions est le rectangle ABFn, l'entropie suit le contour $A_1B_1F_1K$; la perte par détente incomplète est alors très grande.

Cette perte augmente en valeur absolue lorsque le titre s'élève, mais son importance *relativement* à la quantité de chaleur dépensée varie peu dans les limites ordinaires de siccité de la vapeur.

La détente complète exigerait des cylindres très volumineux, comme on le voit aisément à l'aspect de la courbe BC ; la pression motrice s'abaisse très rapidement, et devient même bientôt plus petite que les résistances passives de la machine, aussi, les machines à condensation ne sont jamais à détente complète.

Les machines sans condensation, au contraire, pour lesquelles la température d'échappement est 100° C. sont souvent à détente complète ; c'est-à-dire que le diagramme des pressions peut se terminer par une ordonnée nulle, sans que les dimensions du cylindre soient exagérées ; d'ailleurs la loi de décroissance des pressions motrices est plus rapide lorsque la température est plus élevée, et l'inconvénient des résistances passives est beaucoup moindre (1).

123. — *Effet de l'espace nuisible.* — Supposons que le cylindre comporte, comme cela existe toujours en fait, un certain espace nuisible ; supposons en outre que la machine soit à détente complète, que l'échappement se produise pendant toute la course, et que le poids du fluide admis à chaque coup du piston soit égal à 1 kilogramme.

A la fin de l'échappement, l'espace nuisible reste rempli de vapeur non condensée, car, pour rester dans l'ordre des hypothèses que nous avons faites au commencement de ce chapitre, la condensation du mélange expulsé du cylindre a lieu d'une manière progressive, la partie de ce mélange qui se trouve dans le cylindre n'est donc pas altérée.

Lorsque l'admission s'ouvre, le piston restant immobile, l'eau et la vapeur de la chaudière et de la conduite participent à une opération non réversible pendant que l'espace nuisible se met en équilibre de pres-

1. On a souvent établi, par des calculs numériques, l'influence de la pression (ou de la température) initiale ou finale, du titre, du degré de détente, etc., sur le rendement calorifique. Le diagramme entropique, sur lequel nous avons raisonné, permet de résoudre les mêmes questions par des mesures planimétriques. Il ne faut pas s'exagérer l'importance de ces déductions, car l'influence des parois altère profondément les cycles.



sion avec le fluide de la chaudière. Il serait fort compliqué d'analyser le phénomène de cette manière, et nous allons substituer, à la machine véritable, une machine hypothétique plus simple.

Supposons, comme nous l'avons déjà fait pour trouver le cycle idéal, que l'eau résultant de la condensation du mélange qui se trouvait dans le cylindre, au lieu d'être extraite du condenseur pour être refoulée à la chaudière par une pompe alimentaire, reste dans le cylindre, où la chaleur lui est communiquée. Nous aurons donc dans cette partie de la machine, à la fin de l'échappement, le kilogramme d'eau, occupant un volume annexé à l'espace nuisible proprement dit, et égal à u, puis, l'espace nuisible de volume v, rempli de vapeur au titre final x_2 de la détente, c'est-à-dire que le poids du mélange renfermé dans l'espace nuisible est :

$$\frac{v}{u + (u'_2 - u)\, x_2}$$

et le poids de la vapeur est :

$$\frac{v x_2}{u + (u'_2 - u)\, x_2}$$

Le piston étant immobile, communiquons de la chaleur au fluide enfermé dans le cylindre, jusqu'au moment où la température T_1 et la pression p_1 soient atteintes. Comme le volume n'a pas changé, une partie μ du liquide existera à l'état de vapeur ; le poids total du mélange est égal au poids initial ; on a donc, pour le poids de liquide :

$$1 + \frac{v}{u + (u'_2 - u)\, x_2} - \mu$$

et la condition d'égalité des volumes donne :

$$\left(1 + \frac{v}{u + (u'_2 - u)\, x_2} - \mu\right) u + \mu\, u'_1 = u + v$$

ou :

$$\mu = \frac{u'_2 - u}{u'_1 - u} \, \frac{v x_2}{u + (u'_2 - u)\, x_2}$$

On a $u'_1 < u'_2$, on voit qu'il y aura nécessairement une certaine vaporisation pendant cette première opération.

Comme elle est réversible, nous pouvons trouver l'entropie du poids total de fluide :

$$1 + \frac{v}{u + (u'_2 - u)\, x_2}$$

poids que nous désignerons, pour abréger, par $1 + e$.

L'entropie est égale, en effet, pour chaque température, à celle du liquide, $L_2 L_1$ (fig. 79), augmentée de l'accroissement d'entropie provenant de la partie vaporisée variable μ, ce qui donne la ligne 3,0.

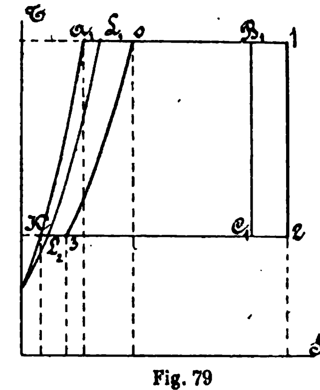


Fig. 79

Achevons la vaporisation, puis poursuivons les opérations du cycle 0, 1, 2, 3, qui se ferme au point 3. Le rendement résulte de la comparaison de la surface 0, 1, 2, 3, avec la quantité totale de chaleur dépensée, qui se mesure sur la figure.

Le cycle de la machine sans espace nuisible, fonctionnant avec de la vapeur sèche, est $K A_1 B_1 C_1$; KA_1 donne l'entropie du kilogramme d'eau.

Comparons les transformations 0,1, et $A_1 B_1$. La première correspond à la vaporisation du poids :

$$1 + e - \mu$$

ou :

$$1 + \frac{v}{u + (u'_2 - u)\, x_2} \left(1 - \frac{u'_2 - u}{u'_1 - u}\, x_2\right)$$

Comme x_2 est une fraction plus ou moins rapprochée de l'unité, et que $u'_2 - u$ est grand relativement à $u'_1 - u$, la parenthèse est négative dans tous les cas qui peuvent se présenter pratiquement, c'est-à-dire que la ligne 0 1 correspond à la transformation en vapeur d'un poids de liquide inférieur à l'unité, donc :

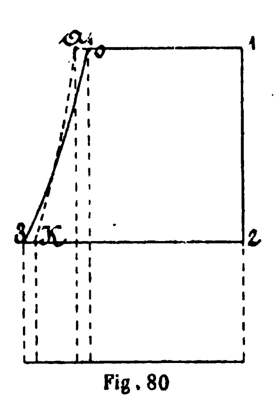
$$0\,1 < A_1B_1$$

Par contre,

$$3\,2 > KC_1$$

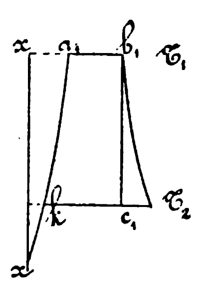
attendu que l'une de ces lignes correspond à la condensation d'une quantité de fluide $1 + e$ au titre x_2 jusqu'au moment où le poids de vapeur est inférieur à e, tandis que KC_1 est relative à la condensation d'un kilogramme de fluide au titre x_2 [1] c'est-à-dire que le poids condensé est plus grand suivant 2,3 que suivant $C_1 K$.

1. Les titres aux points 2 et C_1 sont évidemment égaux, car le titre des points de départ 1, B_1 est le même, puisque nous l'avons supposé égal à l'unité, et que les températures sont les mêmes dans les deux cycles.

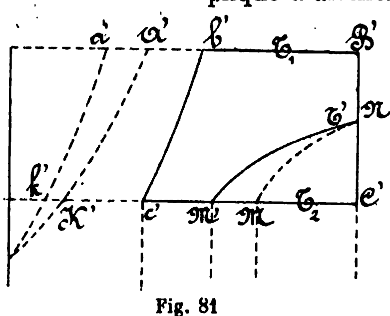

Fig. 80

Ainsi, en superposant les deux cycles de manière à faire coïncider les lignes de détente, on obtiendrait les surfaces représentées (fig. 80). En décomposant chacun des cycles de manière à isoler sa partie rectangulaire, on établit facilement que la machine à espace nuisible est inférieure à l'autre au point de vue du rendement (1). L'influence de l'espace nuisible augmente avec la pression initiale.

124. — ***Compression de la vapeur d'échappement.*** — On peut combattre l'influence de l'espace nuisible, qu'il n'est pas possible d'annuler par des moyens mécaniques, en opérant dans le cylindre, non la compression totale et idéale de la machine parfaite (119), mais en comprimant une partie de la vapeur d'échappement choisie de telle manière que l'espace nuisible soit rempli, à la fin de la course, d'un mélange saturé à la température T_1.



La compression est supposée adiabatique, et comme elle s'étend entre les températures T_2 et T_1, et s'applique à un mélange dont le titre est x_2 au point initial (qui correspond ici à T_2), le titre après la compression sera exactement le même que celui qui correspond à l'origine de la détente, c'est-à-dire x_1. En effet, la variation de titre dans les transformations adiabatiques ne dépend évidemment pas du poids de fluide en jeu.


Fig. 81

Construisons séparément le diagramme entropique du poids soumis à la compression (fig. 81), soit e ce poids; ce diagramme ne diffère de celui qui se rapporterait au kilogramme de fluide que par la réduction proportionnelle de toutes les abscisses dans le rapport de 1 à e; $c_1 b_1$ est la ligne de transformation pendant la compression.

1. L'infériorité du cycle du cylindre à espace nuisible provient de ce que l'échauffement du liquide, qui donne au cycle sa période désavantageuse, augmente en importance relative.

A la fin de la compression, l'admission s'ouvre, et la chaudière produit 1 kilogramme de fluide dont le titre est le même que celui qui remplit l'espace nuisible ; il y a donc dans le cylindre, à la fin de l'admission, un poids $1 + e$ de fluide au titre x_1, dont l'entropie est figurée par le point B' ; on obtient la figure K'A'B' en amplifiant dans le rapport e à $1 + e$, toutes les abscisses du diagramme relatif à l'espace nuisible. La ligne de détente est B'C' ; la condensation et l'échappement s'arrêtent lorsque le kilogramme de fluide venant de la chaudière a quitté le cylindre.

Traçons la ligne $k'a'$, représentant l'accroissement d'entropie du kilogramme d'eau entre T_2 et T_1 ; les portions d'abscisses comprises entre cette ligne et K' A' sont égales aux abscisses de la ligne ka_1. Rapportons sur la figure, en considérant la ligne $k'a'$ comme l'axe xx, la ligne c_1b_1, qui sera donc équidistante de $k'a'$, et sera représentée en $c'b'$; on aura $K'c' = kc_1$, et $A'b' = a_1b_1$.

La ligne d'échappement devra s'arrêter en c', car $k'c'$ correspond précisément au poids e de vapeur au titre x_2 qui doit rester dans le cylindre ; de même b'B' est l'accroissement d'entropie pendant la vaporisation du kilogramme de fluide admis. L'opération $c'b'$ s'effectue dans la chaudière, et nous voyons que le cycle $c'b'$B'C' est identique, à part le déplacement constant égal à $k'c'$ des abscisses, à celui de la machine sans espace nuisible fonctionnant avec le même poids de vapeur.

125. — La suppression d'une partie de la détente rend les deux machines inégales ; ainsi, en supposant que la détente se prolonge, dans les deux cas, jusqu'à la même température T', par conséquent jusqu'à la même pression [1], les lignes de volume constant qui terminent le diagramme augmentent de quantités inégales la chaleur perdue au condenseur, et le désavantage est du côté de la machine à espace nuisible.

Il convient de remarquer, pour appuyer le raisonnement que nous venons de faire, que les titres aux points M, M', sont les mêmes lorsque les deux transformations partent du point N.

On pourrait, en prolongeant plus bas que le point N la détente de la machine à espace nuisible, chercher à obtenir le même rendement que dans la machine sans espace nuisible, mais la différence des titres amène une grande complication.

On peut aussi, au lieu de calculer la compression de manière à éta-

1. Condition qui suppose même le cylindre de la machine à espace nuisible plus grand que l'autre.



blir la pression d'admission à la fin de la course, chercher l'effet d'une compression moindre ou plus grande.

Cette recherche a été faite par M. Macfarlane Gray dans certaines hypothèses [1]; la conclusion de cette étude nécessairement assez compliquée, est, en négligeant toute influence de paroi, que la compression ne peut annuler l'effet de l'espace nuisible que dans les machines à détente complète; dans tous les autres cas, la perte existe, mais peut être réduite au minimum.

Les conditions de la distribution empêchent toujours, dans les machines à condensation, de réaliser des compressions complètes, mais il n'en est pas de même dans les machines sans condensation.

126. — *Effet d'une addition de chaleur pendant la détente.* — S'il s'agissait d'une quantité de chaleur prise à la chaudière, c'est-à-dire à la température T_1, et communiquée à la vapeur aux températures décroissantes de la détente, l'étude du phénomène, évidemment désavantageux au point de vue du rendement, devrait se faire par la théorie des transformations non réversibles.

Nous envisageons spécialement le cas où la chaleur provient d'une source ayant à chaque instant la température de la vapeur, comme celle que fournirait une plaque de métal de conductibilité infinie, se trouvant dans le cylindre même, et n'intervenant que pour céder ou absorber de la chaleur. Nous avons étudié ce genre de transformations au numéro 55, et établi l'équation (28); nous avons reconnu que la transformée entropique des lignes de détente ou de compression présente la même allure que la courbe se rapportant à l'échauffement de l'eau.

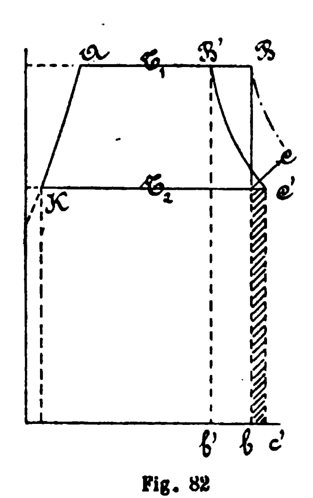


Fig. 82

Supposons que dans le cylindre, dont les parois continuent à être imperméables à la chaleur, soit placée une plaque qui prend, pendant l'admission, la température de la vapeur, en produisant une certaine condensation. L'échauffement de l'eau de la chaudière, la vaporisation et la condensation nécessaires à la mise en équilibre de température de la plaque, sont figurés sur le diagramme par KA, AB, BB' (fig. 82). L'en-

1. Cotterill, ouvrage cité, art. 120.

tropie du fluide, au moment où la détente commence, est l'abscisse du point B'. La quantité de chaleur représentée par le rectangle B'*b* est celle employée à échauffer la plaque, qui, à partir de ce moment, intervient dans la détente ; celle-ci se fait, à cause de la communication de chaleur, suivant la ligne B'C' dont l'équation est connue, et qui peut se déduire facilement, en vertu de la remarque faite plus haut, de la ligne K A. A la fin de la détente, la plaque se trouve à la température T_2 de la vapeur ; celle-ci se maintient jusqu'au moment où l'admission s'ouvre, et où la température T_1 est rétablie. La quantité de chaleur B *b'* est par conséquent équivalente à celle qui a été perdue par la plaque pendant la détente, c'est-à-dire que la surface B'C'*c'b'*, qui représente cette quantité de chaleur, est égale au rectangle.

La présence de la plaque conductrice ne modifie donc pas la quantité de chaleur empruntée à la source T_1, mais elle augmente la chaleur perdue au réfrigérant de toute la quantité couverte de hachures dans le diagramme, et la chaleur transformée en travail est diminuée d'une quantité égale.

L'effet de la plaque est, par conséquent, d'abaisser le rendement en élevant le titre final au-delà de ce qu'il eût été dans la machine à détente adiabatique.

Lorsque la détente est incomplète, et se termine, par exemple, au point M (fig. 83), à une température intermédiaire entre les températures T_1 et T_2 des deux sources, le phénomène irréversible qui se produit pendant la communication avec le condenseur, jusqu'au moment de l'équilibre de pression, peut être remplacé, en raisonnant comme au numéro 122, par une transformation réversible à volume constant. En effet, dans les deux cas, le diagramme du travail est le même ; en outre, la quantité de chaleur à enlever à la vapeur par le condenseur est bien celle qui résulte de la diminution de chaleur interne du fluide qui remplit le cylindre, attendu qu'il n'y a de travail extérieur effectué, ni dans l'opération réversible, ni dans l'autre.

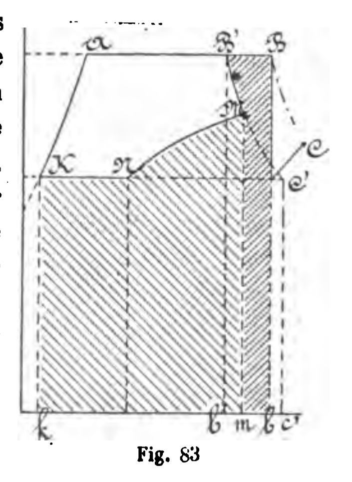


Fig. 83

Mais la plaque continue à se refroidir jusqu'à la température T_2 de

l'échappement, car nous avons admis qu'elle prend instantanément la température de la vapeur ; par conséquent, le corps conducteur placé dans le cylindre perd, pendant la ligne d'égal volume qui suit la détente, la quantité de chaleur M C' *c' m* qu'il n'a pas restituée à la vapeur pendant l'opération B' M. Il est facile de voir que la chaleur perdue par la plaque seule, à partir du moment où l'échappement s'ouvre, est représentée également par la surface B'B*b m*MB', car :

$$\text{B'B}\,bb' = \text{B'C'}c'b'$$
$$\text{B'B}bb' - \text{B'M}mb' = \text{MC'}c'm$$

Nous pouvons tracer la ligne MN, exprimant la transformation fictive à volume constant, d'après les règles déjà exposées, et nous trouvons finalement, pour la chaleur totale perdue au réfrigérant, l'ensemble des surfaces couvertes de hachures.

D'après les égalités déjà signalées, cette chaleur perdue totale est mesurée aussi par la figure KNMC'*c'k*. Relativement à la machine à détente complète avec plaque conductrice dans le cylindre, la perte est augmentée de la quantité MNC'.

Ainsi, dans le cas où la détente est incomplète, l'effet de la plaque conductrice est particulièrement pernicieux. Ce fait provient de ce que la plaque condense toujours la même quantité de vapeur pour se réchauffer, mais qu'elle ne restitue pendant la détente qu'une partie de la chaleur reçue.

Il est utile de remarquer que, même dans le cas d'une détente complète, et lorsque toute la chaleur absorbée par la plaque est restituée à la vapeur, le rendement est abaissé par l'influence du corps étranger. Nous savons en effet, et le diagramme ne fait que traduire cette propriété, que la chaleur communiquée au fluide à des températures décroissantes nécessairement inférieures à T_1 ne peut avoir son maximum d'efficacité au point de vue de la production du travail.

On pourrait, jusqu'à un certain point, être tenté d'assimiler l'action de la plaque métallique à celle de la paroi du cylindre lui-même, mais il y a, comme nous le verrons, une différence essentielle entre la plaque, que nous supposons prendre à chaque instant, dans toute son épaisseur, la température du fluide, et une paroi dans laquelle la chaleur est en mouvement ; d'ailleurs, même dans le cas d'une pellicule très mince, notre hypothèse serait irréalisable ; néanmoins, le cas purement théorique examiné ici est propre à montrer combien la conductibilité

des parois peut modifier les cycles dans un sens défavorable au rendement.

127. — *Effet d'une soustraction de chaleur pendant la détente.* — Si la chaleur enlevée était simplement versée au réfrigérant, l'effet de l'opération ne serait pas douteux; nous pouvons supposer que la chaleur enlevée pendant chaque abaissement dT de la température, est tenue en réserve pour être restituée pendant la quatrième opération du cycle; si l'enlèvement de chaleur se produisait de manière à rendre la ligne BC' (fig. 84), identique à la ligne KA, le cycle, bien que ne présentant aucunement la compression qui caractérise la transformation finale du cycle de Carnot, aurait le même rendement que ce dernier; il rentrerait dans la catégorie des cycles parfaits, les lignes BC' et KA étant isodiabatiques (41).

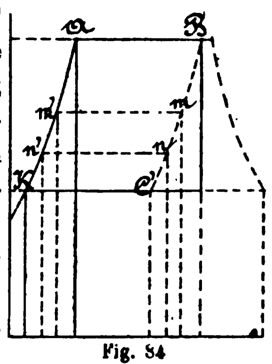


Fig. 84

Mais pour qu'il puisse en être ainsi, la chaleur soustraite pendant la transformation mn, au lieu de se perdre au réfrigérant, devrait pouvoir être employée à l'échauffement du liquide suivant $n'm'$. Nous retrouvons le régénérateur des machines à air chaud, mais sous forme de réchauffeur d'alimentation, car la restitution de chaleur peut se faire sur le trajet de la pompe alimentaire à la chaudière.

Il y a différentes manières de réaliser le chauffage de l'eau d'alimentation, mais aucune n'est parfaitement satisfaisante, et toutes les difficultés qui s'opposent à l'emploi des régénérateurs se présentent ici sous une forme différente [1].

Le réchauffage pourrait, théoriquement, être combiné de la manière suivante [2] :

La machine motrice est partagée entre un cylindre principal, fonctionnant à condensation à la manière ordinaire, et une série de petites machines recevant la vapeur de la même chaudière, mais dont la température d'échappement serait échelonnée (T' T'' T'''...); désignons ces

1. L'encrassement du régénérateur des machines à air chaud devient l'incrustation du faisceau tubulaire, etc.

2. Cette explication est, pensons nous, due à M. Cotterill. M. *Sauvage — Annales des Mines*, t. XVII, 1890, p. 433, a aussi étudié l'effet du réchauffage dont il est ici question.

Cotterill, Note on feed water Heaters. — *Engineering*, 1er sem., p. 527.

machines par les numéros 1, 2, 3, etc. La chaleur abandonnée par le cylindre de la dernière machine pendant la condensation sert à échauffer à la même température T''', l'eau d'alimentation de la machine principale; en outre, la vapeur condensée de la machine 3, qui se trouve elle-même à la température T''', s'ajoute à l'eau d'alimentation.

La chaleur abandonnée par la machine 2 est de même reprise tout entière, et ainsi de suite. Si l'on suppose que le nombre d'échelons est suffisant, le liquide sera introduit à la chaudière à la température T_1, c'est-à-dire que la chaleur de vaporisation seule devra lui être communiquée.

Le travail recueilli sera celui de la machine principale et des machines auxiliaires.

Le bénéfice de la combinaison provient de ce que les petites machines fonctionnent avec un rendement thermique égal à l'unité; en effet, comme dans l'alimentation à l'injecteur Giffard, leur chaleur d'échappement est entièrement utilisée. Si l'on conserve, avec leur signification, les quantités de chaleur Q_1 et Q_2 pour la machine principale, tandis qu'on appelle q'_1 q''_1, q'''_1... les quantités de chaleur empruntées au foyer par les machines auxiliaires, le rendement de l'ensemble est :

$$\frac{Q_1 - Q_2 + q'_1 + q''_1 + q'''_1}{Q_1 + q'_1 + q''_1 + q'''_1}$$

On ne pourrait cependant jamais espérer dépasser ni même atteindre le rendement des cycles parfaits, car les quantités de chaleur mises en œuvre par les cylindres auxiliaires sont limitées à ce qui est nécessaire pour échauffer l'alimentation.

D'ailleurs, les opérations indiquées, surtout aux températures les plus élevées, ne pourraient s'effectuer sans un jeu compliqué de petites pompes et de tuyauteries délicates.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que, dans le cas où la détente est incomplète, le réchauffeur interposé sur le trajet du cylindre au condenseur constituerait un gain assuré, puisque dans ce cas la vapeur, au moins pendant les premiers instants de l'échappement, est à une température supérieure à celle du condenseur [1].

1. Ce genre de réchauffage, quelquefois employé, est rendu peu efficace par l'incrustation intérieure, et surtout par les matières de graissage du cylindre, qui encrassent le réchauffeur et altèrent sa conductibilité au bout de très peu de temps.



128. — Aux remarques qui précèdent se rattache la théorie des réchauffeurs employés, depuis 1880, par M. *Weir* dans les machines compound. On emprunte, au réservoir intermédiaire, une petite quantité de vapeur, qui sert à alimenter un réchauffeur parcouru par l'eau extraite du condenseur. Cette combinaison, qui semble paradoxale au premier abord, se justifie théoriquement.

Au point de vue de la démonstration, nous pouvons considérer le petit cylindre de la machine compound, qui reçoit 1 kilogramme de vapeur, comme s'il était constitué de deux cylindres, dont l'un, recevant le poids $1 - \mu$, envoie intégralement sa vapeur au cylindre à basse pression, et dont l'autre partie, qui fonctionne avec le poids μ, emploie sa vapeur d'échappement à échauffer l'eau d'alimentation pendant son trajet vers la chaudière.

La machine compound dans laquelle évolue le poids $1 - \mu$ peut être envisagée, pour la question actuelle, comme une machine monocylindrique M (fig. 85); une partie du trop plein du condenseur est refoulé,

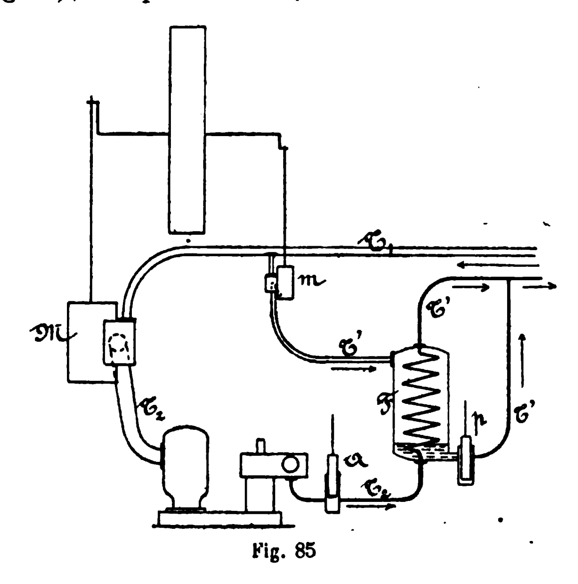


Fig. 85

par la pompe alimentaire A, dans un réchauffeur tubulaire F, dont le faisceau est chauffé extérieurement par la vapeur d'échappement de la machine auxiliaire *m*, qui fonctionne avec le poids μ. Nous supposons, du reste, que la chute de température dans la machine *m* est modérée; l'échappement se fait sous une pression plus ou moins élevée, et à une

température correspondante. La vapeur se condense autour du faisceau, et l'eau qui en résulte est extraite par la pompe de purge p, qui la refoule dans le tuyau d'alimentation.

Nous supposerons que l'eau extraite du condenseur de la machine M se trouve à la température T_2, et que le passage dans le serpentin l'échauffe à la température T', qui est celle de la vapeur d'échappement de la machine m, après comme avant sa condensation.

Le cycle de la machine principale, supposée sans compression, n présente rien de particulier ; il est représenté (fig. 86) par le contour

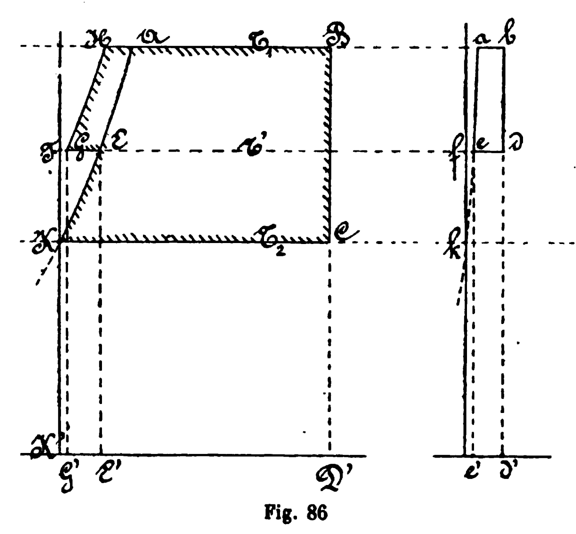


Fig. 86

KABCK ; le poids du fluide en jeu est $1 - \mu$. Représentons aussi le cycle de la machine auxiliaire *eabde*, compris entre les températures T_1 et T', et comportant un poids μ de vapeur ; au point e, cette vapeur est entièrement condensée, et l'entropie de l'eau qui en résulte (supposée nulle à T_2) est fe ; la chaleur cédée suivant de, représentée par le rectangle ed', est appliquée à l'eau d'alimentation de la machine principale ; nous supposons, du reste, que le poids μ est tel que la chaleur en question soit précisément celle qu'il faut pour produire la transformation KE, c'est-à-dire que l'on a :

$$ed = \frac{\text{Surf. KEE'K}}{T'}$$

Transportons de en EG, nous aurons évidemment :

$$EG < EF$$

Opérons de la même manière pour chacune des sécantes horizontales du cycle de la machine *m*, que nous amenons en GHAE.

La chaleur transformée en travail par l'ensemble des deux machines est représentée par le contour bordé de hachures, tandis que la chaleur empruntée au foyer est :

$$E'EABD' + e'eabd'$$

ou, à cause de l'égalité entre des surfaces équivalentes, et dont la forme seule a été changée :

$$K'KABD' + GHAE$$

Le rendement est, par conséquent, supérieur à celui que donnerait la machine ordinaire, car celui-ci, indépendant du poids de fluide qui évolue, est le même que pour la machine M, c'est-à-dire qu'il est exprimé par :

$$\frac{KABC}{K'KABD'}$$

tandis que le rendement de l'ensemble des deux machines est donné par :

$$\frac{KABC + EGHA}{K'KABD' + EGHA}$$

Nous retrouvons, avec plus de précision, la même conclusion qu'au numéro précédent, c'est-à-dire que la machine auxiliaire, dont toute la chaleur d'échappement est utilisée, ajoute un même nombre aux deux termes de la fraction qui exprime le rendement calorifique.

Il est évident que, dans une machine compound, le cylindre auxiliaire *m* est inutile, car il fait corps avec le cylindre à haute pression de la machine principale ; ce cylindre à haute pression reçoit donc le poids total de vapeur égal à l'unité ; la fraction μ prélevée au réservoir intermédiaire, est choisie de manière à pouvoir être entièrement condensée dans le réchauffeur [1].

1. Ce genre de réchauffeurs a été employé aussi par M. *Normand*, constructeur au Havre, pour les machines du torpilleur *Avant-Garde;* la quantité de vapeur prise au cylindre à basse pression varie du 7e au 12e de la quantité traversant la machine. M. *Sauvage. Annales des Mines*, article cité, calcule que, pour la même dépense de vapeur, l'augmentation du travail est de 5,5 % entre les températures extrêmes de 160° et 40°.



129. — Enfin, il est un cas dans lequel le bénéfice du réchauffeur n'est pas douteux, c'est celui des machines sans condensation, la détente, en effet, ne peut y être poussée que jusqu'à la pression atmosphérique ; le cycle de la machine comporte donc une ligne d'échappement à 100° C., tandis que la température de l'eau d'alimentation puisée à l'extérieur demande, pour être amenée à cette température, une dépense de chaleur. Cette quantité de chaleur peut être reprise intégralement à la vapeur d'échappement.

130. — *Effet de la surchauffe.* — La surchauffe peut résulter de phénomènes accessoires, tels que le passage par un détendeur, le remplissage de l'espace nuisible, l'étranglement à l'admission, mais ces causes sont largement compensées par l'effet de paroi dont l'étude fera l'objet du § V.

Pour obtenir un degré de surchauffe appréciable, on dispose la chaudière de manière à communiquer de la chaleur à la vapeur, soit dans la chambre de vapeur même, soit sur le trajet du dôme à la machine. Cette communication de chaleur se fait donc à pression constante, opération pour laquelle la vapeur se comporte comme un gaz (62) dont la chaleur spécifique serait égale à 0,48

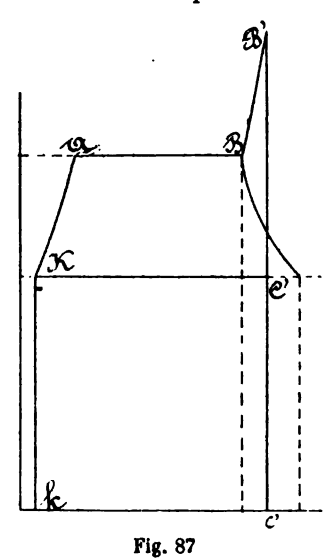


Fig. 87

En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 119, on peut supposer que la communication de chaleur s'effectue dans le cylindre même ; le point B (fig. 87), correspond à la vapeur saturée sèche ; la surchauffe amène la ligne de transformation B B', pendant laquelle la température s'élève ; puis le cycle s'achève comme dans la machine ordinaire, par la détente adiabatique B' C' et la condensation C' K. Le rendement du cycle est le rapport :

$$\frac{\text{KABB'C'}}{k\text{KABB'}c'}$$

on voit qu'il est supérieur à celui de la machine à vapeur saturée ayant la même *pression* initiale (1).

1. J. Macfarlane Gray. — *Engineering*, 1892, 1er sem., p. 260; Gustave Hermann, ouvrage cité.

Toutefois, l'avantage de la surchauffe serait peu important, car on ne peut la pousser à une température très élevée sous peine de compromettre le fonctionnement des pistons et des distributeurs à glissement (tiroirs, valves Corliss). Dans la pratique, on a trouvé, à une certaine époque, de grands avantages à la surchauffe, et Hirn en était partisan ; elle agit surtout en diminuant la condensation initiale, mais ce point n'est pas examiné ici.

Après avoir été abandonnée pendant longtemps, la surchauffe semble aujourd'hui reprendre une certaine vogue en Alsace ; la substitution des huiles minérales aux huiles végétales et aux graisses, pour la lubrification des cylindres, permet d'élever la température initiale plus haut qu'on ne pouvait le faire autrefois.

§ II

Etranglements et autres pertes analogues.

131. — *Admission.* — Un étranglement plus ou moins fort peut résulter de l'insuffisance des passages d'admission (fig. 88) ; appelons x' le titre du mélange avant son passage à travers l'orifice du cylindre pendant l'introduction de la vapeur, T' et T'' les températures du mélange, w sa vitesse dans la section contractée de l'orifice ; nous avons établi (éq. 59 *bis*) la formule approximative :

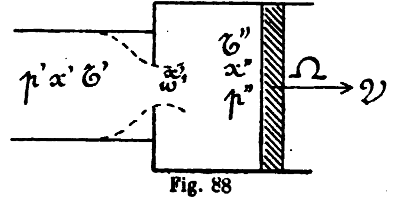


Fig. 88

$$(59\ bis) \qquad w = 91.2 \sqrt{r'x' \frac{T' - T''}{T'}}$$

La température T'' est ici inconnue, mais nous avons une équation qui donne le titre x'' du mélange lorsque les tourbillons qui se produisent à l'entrée du cylindre sont éteints ; cette équation (60) prend ici la forme :

$$(60) \qquad x'' = \frac{A\,(p' - p'')\,u + q' - q'' + r'\,x'}{r''}$$

q' et p' se rapportent à la température T', p'' et q'' à la température T''.

Le volume du kilogramme du mélange dans le cylindre [1], à l'état d'équilibre, sera donc :

$$u + (u'' - u)\, x''$$

u'' est le volume spécifique de la vapeur dans le cylindre, c'est-à-dire à la température T''.

Supposons que le piston, de section Ω, se déplace avec la vitesse V ; il engendre, par seconde, le volume $V\Omega$, et le cylindre reçoit le poids :

$$\frac{V\,\Omega}{u + (u'' - u)\, x''}$$

ou, très approximativement :

$$\frac{V\,\Omega}{u''\, x''}$$

Soit ω la section de la lumière ; le débit en poids qui passe par l'orifice devra être égal à la valeur qui vient d'être trouvée ; on déduit de cette condition, en appliquant l'équation (59 *bis*), et en appelant x'_1 le titre à l'orifice :

$$\frac{V\,\Omega}{x''} = \frac{91{,}2\,\omega}{x'_1}\sqrt{r'\, x'\,\frac{T'-T''}{T'}}$$

ou, en remplaçant x'' par sa valeur trouvée plus haut :

$$\frac{V\,\Omega\, r''}{A\,(p' - p'')\, u + q' - q'' + r'x'} = \frac{91{,}2\,\omega}{x'_1}\sqrt{r'\, x'\,\frac{T' - T''}{T'}}$$

La seule inconnue de cette équation est T'', car les quantités p'' et q' s'en déduisent au moyen des tables ; x'_1 est le titre du mélange dans l'orifice, on sait qu'il se déduit immédiatement de x' et des températures T' et T'', tout au moins lorsque l'on suppose que l'écoulement est adiabatique. On pourra donc résoudre l'équation par tâtonnements, et on trouvera la valeur de T'' et de toutes les fonctions qui en dépendent.

1. En excluant le cas où x'' serait supérieur à l'unité, ce qui indiquerait que la vapeur est surchauffée (75) ; cette hypothèse s'écarte naturellement dans l'application, pour peu que x' soit différent de l'unité.

Les formules d'écoulement ont été établies pour le mouvement permanent ; nous les employons ici pour un écoulement dont le régime varie, en supposant qu'elles fournissent un degré d'approximation suffisant.

La température T'' est nécessairement inférieure à T' (1). On a quelquefois supposé, en s'appuyant sur un raisonnement sommaire, que cette chute de température (ou de pression) n'avait pas d'effet sur le rendement thermique, parce qu'elle est accompagnée d'une légère augmentation du titre. Si l'on suppose, cependant, que les parois du cylindre sont inertes, il est facile de démontrer que la modification qui résulte de l'étranglement abaisse le rendement.

Le contour KABC (fig. 89) étant le diagramme entropique de la machine sans étranglement, reçoit, par coup de piston, la quantité de chaleur :

$$q' - q_1 + r' x'$$

q_1 est la chaleur de l'eau d'alimentation.

Lorsque l'on étrangle la lumière d'introduction, on dépense, par coup de piston, la même quantité de chaleur; d'après l'équation 60, on a du reste :

$$q'' + r'' x'' = q' + r' x' + A\,(p' - p'')\,u$$

ou, en retranchant des deux membres la quantité q_1 :

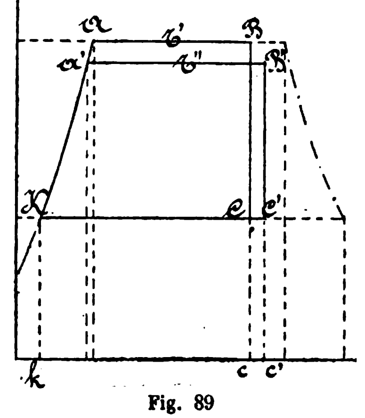


Fig. 89

$$q'' - q_1 + r'' x'' = q' - q_1 + r' x' + A\,(p' - p'')\,u$$

Si l'on avait introduit directement dans la machine la vapeur à la température T'' et au titre x'', la chaudière aurait dû fournir, par coup de piston, la quantité de chaleur:

$$q'' - q_1 + r'' x''$$

On voit que cette quantité de chaleur, représentée par la surface kKA'B'c', est un peu plus grande que celle fournie à la machine sans étranglement ; la différence A ($p' - p''$), qui est du reste très petite, provient de ce que, par le procédé de l'étranglement, la chaudière alimen-

1. La différence n'est cependant pas très considérable, ainsi qu'on peut s'en assurer par des applications numériques; elle n'atteint guère que 1° pour d'assez grandes vitesses de piston, avec les proportions usuelles de lumières ; pour une pression initiale de 8 atmosphères absolues, cette chute de température est accompagnée d'une chute de pression de 0 kil. 2 environ par centimètre carré.

tée à la pression p', restitue sous forme de chaleur le supplément de travail d'alimentation :

$$(p' - p'') u$$

mais la chaleur correspondante :

$$A (p' - p'') u$$

est extrêmemeut faible; nous pouvons en faire abstraction, et considérer la machine fonctionnant avec de la vapeur étranglée, qui reçoit directement de la chaudière la quantité de chaleur kKABc comme une machine sans étranglement recevant la chaleur kKA'B'c', en supposant ces deux surfaces égales, bien que la seconde soit un peu plus grande.

Or, la comparaison des quantités de chaleur abandonnées dans les deux cas au réfrigérant, montre que l'effet de l'étranglement est nuisible; toutefois, la perte d'effet ainsi calculée serait presque toujours négligeable; en pratique, les orifices ne sont pas en mince paroi, ils forment des canaux plus ou moins prolongés, ce qui modifie le phénomène (133).

Lorsque les machines sont à espace nuisible imparfaitement rempli, le séchage de la vapeur est plus prononcé [1] que nous ne l'avons trouvé avec un simple étranglement.

L'espace nuisible suffirait à lui seul à élever le titre, alors même qu'il n'y aurait pas d'étranglement.

Cette question peut du reste être traitée au moyen du principe de l'équivalence appliqué à l'opération non réversible du remplissage de l'espace nuisible, le piston moteur étant supposé immobile pendant le phénomène. Il est visible que le travail exercé par la vapeur de la conduite, vapeur qu'on peut assimiler à un piston, sur la vapeur qui se précipite dans l'espace nuisible, a pour effet d'augmenter son énergie intérieure.

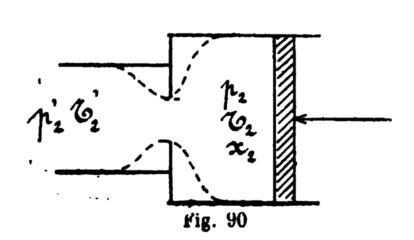


Fig. 90

132. — *Échappement.* — Supposons que l'on connaisse la pression du condenseur p'_2; on cherche les quantités T_2, p_2, x_2, (fig. 90) qui se rapportent à la vapeur du cylindre pendant l'échappement. On peut appliquer la formule trouvée plus haut, elle de-

1. On ne devra pas perdre de vue que nous raisonnons sur une machine à parois inertes.

vient, en changeant de notation, et en appelant x'_2 le titre dans la section étranglée :

$$\frac{V\ \Omega\ r'_2}{A\ (p_2 - p'_2)\ u + q_2 - q'_2 + r_2 x_2} = \frac{91{,}2\ \omega}{x'_2} \sqrt{r_2 x_2 \frac{T_2 - T'_2}{T_2}}$$

On peut résoudre l'équation par tâtonnements en essayant différentes valeurs de T_2, d'où l'on déduit $r_2 p_2$ et q_2 par les tables; le diagramme entropique donne x_2 et x'_2 se rapportant à la détente adiabatique pour la température T_2 que l'on essaye, et pour la température T'_2 connue.

Pour des vitesses très considérables, qui ne sont pas atteintes en pratique, par exemple pour 200 mètres environ par seconde, on trouverait dans le cylindre un excès de température de 3°, la température du condenseur étant de 40° C., et le titre dans le cylindre étant 0,80; l'étranglement amènerait sur le piston un excès de contrepression de 128 kilogrammes par mètre carré, ou 0 k. 0128 par centimètre carré; cette différence ne peut altérer que de 1 ou 2 % le travail recueilli par une machine à vapeur, encore faut-il qu'elle soit à longue détente, c'est-à-dire que la pression moyenne soit très faible.

L'influence des étranglements ne serait donc pas bien grande, si les lumières et les conduits ne constituaient de véritables tuyaux plus ou moins longs. Pour l'admission, la perte est beaucoup réduite par l'élévation du titre; pour l'échappement, au contraire, cette perte est complète, car l'élévation du titre se produit au bénéfice de la chaleur interne emportée au réfrigérant.

133. — *Conduites.* — Dans un tuyau de vapeur, le frottement exerce une action spéciale très différente de celle qu'il produit dans une conduite d'eau; il se transforme en chaleur [1], qui devrait se partager entre les deux corps en contact, mais le tuyau perd très peu de chaleur par rayonnement, surtout s'il est bien enveloppé, et lorsque l'on suppose le régime établi, la température de la paroi ne varie pas d'un instant à l'autre. La chaleur passe à la vapeur, dont elle modifie le titre, mais, sans produire cependant la surchauffe; plus la conduite est longue, et

1. Cette transformation se produit aussi dans les conduites d'eau des turbines, etc. Nous avons vérifié directement ce fait avec M. F. Van Rysselberghe, dans une expérience faite sur une turbine actionnée par une chute d'environ 500 mètres, et fonctionnant par conséquent avec assez de pertes pour que l'élévation de température de décharge fût sensible. Dans les phénomènes d'hydraulique, cette chaleur n'exerce que des effets négligeables.



plus le frottement nécessite, pour un débit donné, une *forte chute* de pression et par conséquent de température, si l'on admet que la vapeur reste saturée.

La chaleur Q_1, au lieu d'être communiquée en grande partie à la température la plus élevée du cycle, l'est à une température d'autant plus basse que les conduites sont plus longues et plus étranglées. Les lois du frottement de la vapeur sont inconnues, mais il est très probable que la vitesse intervient avec un exposant supérieur à l'unité, et que la densité, qui est fonction de la pression et du titre, entre comme facteur dans la résistance.

Le frottement des conduites paraît exercer une influence plus grande que les étranglements, mais les données font défaut pour le calculer.

C'est à cette cause qu'il faut rapporter la différence que l'on observe toujours entre le vide au diagramme ou dans le cylindre, et le vide au condenseur; cette perte peut atteindre 0 k. 2 par centimètre carré dans les machines dont les communications entre le cylindre et le condenseur sont contournées ou partiellement obstruées par les valves à deux voies que l'on place souvent pour permettre aux machines de fonctionner éventuellement sans condensation. Le chiffre que nous venons de citer est au moins 15 fois plus élevé que celui que nous avons trouvé au n° 131 pour un très fort étranglement en mince paroi.

L'effet d'un détendeur placé entre la chaudière et la machine est le même que celui d'un étranglement; lorsque l'on fait abstraction de l'influence des parois, il occasionne une perte, qui ne devient toutefois sensible que pour une forte chute de pression. Il peut arriver que l'augmentation du titre exerce un effet favorable sur l'action de paroi, et cet effet ne serait même pas douteux si la vapeur atteignait un certain degré de surchauffe.

L'emploi du détendeur a été motivé par une raison étrangère au rendement : celle de fournir aux machines une pression régulière, malgré les variations de l'allure des feux, principalement dans les chaudières à faible volume d'eau.

§ III

Condensation.

134. — Nous avons développé au n° 118 les considérations qui permettent d'envisager le fonctionnement du condenseur, abstraction faite de la pompe à air ; mais celle-ci est nécessaire, dans les condenseurs par surface, pour maintenir le vide malgré les rentrées d'air accidentelles, qu'il est impossible d'éviter d'une manière absolue. Dans les condenseurs à injection, on doit se préoccuper, en outre, de l'air amené en dissolution dans l'eau froide, et qui se dégage partiellement à cause de l'élévation de température et de la chute de pression maintenue dans le condenseur.

On sait que la vapeur se forme, dans une enceinte renfermant de l'air, comme dans le vide ; sa tension, qui dépend de la température de l'eau, s'ajoute à la pression de l'air.

Lorsque la pression de l'air est celle de l'atmosphère, il n'y a aucun avantage à condenser la vapeur, car, en supposant même que le refroidissement soit tel que la tension de la vapeur devînt négligeable, la contrepression dans le cylindre devrait être égale à la pression atmosphérique ; les machines sans condensation peuvent être envisagées comme des machines dans lesquelles la condensation s'opérerait à la température de 100°, malgré que l'atmosphère se trouve à une température beaucoup plus basse.

Il résulte de ces remarques que la température inférieure à considérer dans le cycle peut être supérieure à celle du réfrigérant, non seulement pour les raisons exposées aux numéros 132 et 133, mais encore parce que le condenseur renferme une certaine quantité d'air qui relève la tension dans ce récipient; comme la vapeur doit s'écouler néanmoins du cylindre vers le condenseur, la pression dans le cylindre, pendant l'échappement, doit être au moins égale à la tension de la vapeur dans le condenseur (celle qui correspond à T'_2), augmentée de la tension de l'air.

Ainsi, supposons que le condenseur se trouve à la température de 40°, la pression correspondante est 0 k. 0747 par centimètre carré ; si la ten-

sion de l'air est en même temps de 0 k. 10, la température dans le cylindre, en négligeant toute perte par étranglement, ne pourra être inférieure à 57° environ, qui donne pour la vapeur saturée une pression égale à la somme des valeurs ci-dessus.

Comme le rendement des cycles est affecté par la diminution de l'écart des températures, surtout lorsqu'elle provient de l'élévation de la température inférieure, il en résulte que la présence de l'air au condenseur est une cause fort importante de perte d'effet utile.

La pression qui s'établit au condenseur dépend à la fois du poids d'air qui pénètre dans ce récipient et du volume extrait par la pompe à air; le régime qui s'établit est tel que le poids d'air qui se dégage dans le condenseur par suite des fuites et du gaz dissout, est égal au poids extrait par la pompe. Cette question sera du reste examinée avec plus de détails dans un autre fascicule.

135. — Dans le calcul de la quantité d'eau à injecter [1], on raisonne d'ordinaire comme si le mélange qui remplit le cylindre à l'extrémité de la course du piston était condensé sous la pression correspondante; or il n'en est ainsi que lorsque la détente est complète; dans ce cas, en effet, la condensation s'opère à la température constante qui correspond à la saturation, et le travail du piston réintroduit dans le mélange la chaleur latente externe; le condenseur doit, par conséquent, enlever au kilogramme de vapeur qui se condense la chaleur de vaporisation r_2; si l'on injecte l'eau froide peu à peu, et en la mélangeant à l'eau chaude du condenseur, de manière à ne pas créer de chute de température, on aura finalement échauffé de t_0 à t_2 toute l'eau d'injection; si on appelle P le poids d'eau froide introduit, on devra avoir, en supposant égale à l'unité la chaleur spécifique de l'eau :

$$P = \frac{r_2 x_2}{t_2 - t_0}$$

et l'équation est correcte lorsque le phénomène de condensation se produit comme nous l'avons imaginé.

La quantité de chaleur qui a été employée à échauffer l'eau est du reste représentée, comme nous l'avons vu depuis longtemps, par le rectangle K c (fig. 91). En supposant le titre égal à l'unité, ce qui peut à la

1. Ou de la quantité de chaleur à enlever aux condenseurs par surface.

rigueur se produire lorsque la détente, au lieu d'être adiabatique, est influencée par la paroi, surtout lorsque le cylindre est entouré d'une enveloppe, la chaleur enlevée pendant la condensation serait représentée par le rectangle total, dont la valeur est r_2.

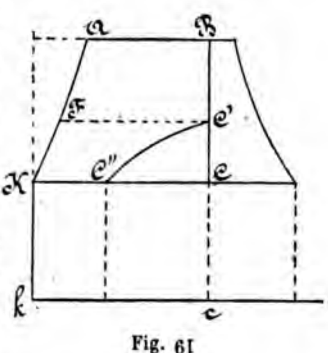


Fig. 61

Mais dans tous les cas où la détente est incomplète, et se termine, par exemple, par la ligne fictive de volume constant C'C'', la chaleur enlevée par l'eau d'injection pour amener le mélange à l'état liquide et à la température t_2 est évidemment représentée par la surface k K C''C'c, et on commettrait une erreur en prenant cette quantité de chaleur égale à k K F C' c ; c'est cependant ce que l'on fait quelquefois [1] ; M. Zeuner a le premier redressé cette manière d'opérer.

En procédant suivant la méthode habituelle, on trouve, si t' est la température centigrade à la fin de la détente, x' le titre, et q' la chaleur du liquide :

$$P = \frac{q' - q_2 + r' x'}{t_2 - t_0}$$

ou, en supposant le titre égal à 1 :

$$P = \frac{\lambda' - q_2}{t_2 - t_0} = \frac{\lambda' - t_2}{t_2 - t_0}$$

Cette valeur ne serait exacte que si la condensation s'opérait à la pression constante correspondant à la température t' ; l'erreur est faible lorsque t' ne diffère pas beaucoup de t_2.

Pour calculer exactement le poids P, il faut suivre, ainsi que nous l'avons établi au numéro 122, la ligne de transformation C' C'' K ; pendant la condensation à volume constant, C'C'', aucun travail extérieur n'est fourni, la chaleur à enlever par le réfrigérant correspond, par conséquent, à la diminution de chaleur interne du mélange, et vaut :

$$q' + [r' - Ap'(u' - u)]\, x' - q_2 - [r_2 - Ap_2(u'_2 - u)]\, x''$$

1. Il est vrai de dire que l'erreur est sans aucune importance pour le but que l'on a en vue; elle conduit seulement à des dimensions de pompe à air un peu plus grandes.

Le volume reste constant, et l'on a par conséquent :

$$u + (u' - u)\, x' = u + (u'_2 - u)\, x''$$

D'ailleurs, la quantité de chaleur enlevée pendant la transformation C''K est égale à $r_2 x''$; on a donc, en tenant compte des deux expressions qui précèdent :

$$P\,(t_2 - t_0) = q' - q_2 + [r' - Ap'\,(u' - u)]\, x' + Ap_2\,(u' - u)\, x'$$

Lorsque l'on fait $x' = 1$ et que l'on néglige le dernier terme, dont l'influence n'est pas grande, on trouve :

$$P = \frac{q' - q_2 + \rho'}{t_2 - t_0}$$

et, en se servant de la valeur de ρ donnée au numéro 47 :

$$P = \frac{q' - q_2 + 575{,}4 - 0{,}791\, t'}{t_2 - t_0} = \frac{575{,}4 + 0{,}209\, t' - t_2}{t_2 - t_0}$$

tandis que la formule que l'on applique ordinairement, est :

$$P = \frac{606{,}5 + 0.305\, t' - t_2}{t_2 - t_0}$$

Comme on le voit, l'écart entre les deux valeurs n'est pas très considérable [1]. Ce calcul nécessiterait du reste encore une correction à cause de l'étranglement à l'échappement, du frottement dans la conduite reliant le cylindre au condenseur, et de la tension de l'air du condenseur.

Lorsque l'on tient compte de l'influence des parois, il faut ajouter à la chaleur dont nous avons fait le calcul, celle qui est communiquée à la vapeur, pendant l'échappement, par les parois du cylindre ; les théories exposées au numéro 126 nous ont donné l'expression graphique de cette

1. *Zeuner*, pp, 368 à 385..
Madamet, pp. 149 à 152. — M. Dwelshauvers-Dery prend comme base de calcul l'équation de la 4e période du diagramme dans la méthode de Hirn (148); *Revue universelle des Mines*, 3e série, t. V (1889). — Pour appliquer cette méthode à un calcul *a priori*, il faut faire des hypothèses sur l'action des parois.

quantité de chaleur, déduite du poids de vapeur présente au cylindre au commencement et à la fin de la détente, et du poids admis au cylindre.

M. Madamet fait du reste remarquer avec raison que le moyen le plus sûr de calculer *a priori* la quantité d'eau froide à injecter dans un condenseur, ou la quantité de chaleur à enlever aux parois d'un condenseur à surface, consiste à prendre la différence entre la chaleur fournie au kilogramme de vapeur par la chaudière, et l'équivalent du travail que l'on peut attendre de cette dépense de chaleur, en partant des données établies par l'expérience dans les conditions où se trouve le moteur en projet. En fait, tout calcul établi sur d'autres bases est affecté des mêmes incertitudes que les problèmes qui se rapportent au travail recueilli.

Il faut encore ajouter que le régime des machines est variable dans la plupart des cas, c'est-à-dire que la pression initiale, le degré d'introduction, et même le nombre de tours, peuvent varier dans certaines limites, et que les calculs relatifs aux condenseurs doivent être faits dans l'hypothèse la plus défavorable.

§ IV

Machines à cycles spéciaux.

136. — *Machines à multiple expansion.* — Dans les machines de Woolf et les machines compound de divers types, la vapeur fonctionne dans deux ou plusieurs cylindres successifs ; nous n'avons pas à les décrire ici, ni à chercher toutes les raisons qui peuvent les faire préférer aux machines monocylindriques, mais nous devons essayer de les analyser au point de vue thermique, ce que nous ferons d'abord en négligeant l'action des parois.

Imaginons une machine ordinaire à détente complète et sans espace nuisible, elle aura pour diagramme de pressions le contour F B C E (fig. 92). Ce diagramme peut être réalisé en deux fois, c'est-à-dire dans deux cylindres successifs dont les volumes seraient respectivement AD et FE ; le premier, choisi arbitrairement, admet le volume de fluide BC, le détend suivant CD, puis l'expulse dans un *réservoir* que nous sup-

posons indéfini, dans lequel est maintenue la pression M, (constante en vertu de notre hypothèse sur les dimensions du réservoir). La vapeur est ensuite admise au grand cylindre; si l'on suppose qu'elle n'a pas subi de transformation dans le réservoir, et que le volume d'admission AD au grand cylindre est précisement égal au volume d'échappement du petit cylindre, la pression d'admission au grand cylindre sera égale à M, et la ligne de transformation qui en résulte se superposera sur la ligne d'échappement du petit cylindre. La vapeur achève son évolution suivant DEF comme dans la machine ordinaire.

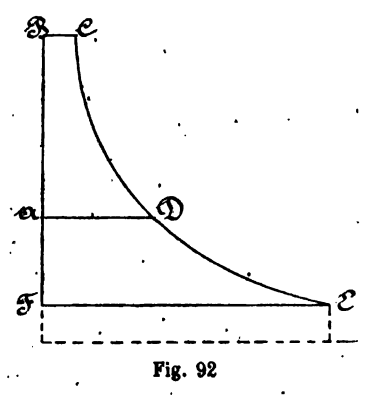


Fig. 92

Le travail de l'alimentation retranche de ce diagramme une surface rectangulaire très étroite, comme dans la machine monocylindrique.

On imagine facilement le partage du diagramme en trois ou quatre parties à peu près èquivalentes en surface, et l'on obtient ainsi les machines à triple ou quadruple expansion; peu importe comment les pistons transmettent leur action à l'arbre moteur: ou trouve, du reste, à ce point de vue, un très grand nombre de combinaisons; il peut arriver, par exemple, que chacun des étages du diagramme ci-dessus soit accompli dans deux cylindres jumeaux, ils fonctionnent alors comme un seul cylindre de volume double.

Les réservoirs intermédiaires dans lesquels séjourne la vapeur en passant d'un cylindre au suivant sont nécessités par le manque de concordance entre l'échappement d'un cylindre et l'admission au cylindre qui le suit; le calcul établit [1] que la dimension de ces réservoirs ne doit pas être bien considérable pour que la pression s'y maintienne sensiblement constante, comme nous l'avons supposé.

Réduite à ces simples termes, la machine à expansion multiple ne présenterait aucune supériorité physique, son diagramme entropique (fig. 93), serait identique à celui de la machine monocylindrique; la ligne

1. Ce calcul a toujours été fait, il est vrai, en assimilant la vapeur à un gaz permanent qui se détendrait ou se comprimerait à une température constante; aussi ne pourrait-il être sérieusement invoqué, si, par un concours assez compliqué de circonstances, ses conclusions n'étaient vérifiées par l'expérience. Voir, par exemple, *Note sur les Diagrammes de deux machines marines*. — *Annales des Ingénieurs* sortis des Écoles spéciales de Gand, 1886.

$D_1 A_1$ (température du réservoir) n'interviendrait même pas dans le cycle total, car le transvasement de la vapeur d'un cylindre dans l'autre ne modifie pas l'entropie du fluide; cette ligne peut avoir un certain intérêt au point de vue du partage du travail entre les deux cylindres, elle n'en a aucun en ce qui concerne l'utilisation de la chaleur.

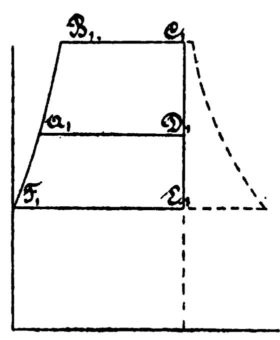


Fig. 93.

137. — La principale raison d'être du système compound résulte de l'influence des parois, qui sera examinée à part; dans l'état actuel de nos connaissances, cette influence est très difficile à apprécier quantitativement, et les explications élémentaires que l'on a voulu donner de l'avantage économique du système compound sont en réalité très peu satisfaisantes. D'ailleurs, il ne peut en être autrement, car cet avantage résulte de la balance qui s'établit entre diverses circonstances, les unes favorables, les autres défavorables au rendement, (les étranglements, les pertes de charge et les condensations des réservoirs, par exemple).

En dehors du côté purement calorimétrique de la question qui nous occupe, on peut étudier diverses questions relatives au rendement de la machine compound; pour le moment, nous pouvons examiner la modification que ce système introduit dans les espaces nuisibles.

Nous avons établi, au numéro 124, que dans toute machine à parois inertes à détente complète, on peut annuler, par une compression convenable, l'influence de l'espace nuisible; la remarque qui termine le numéro 126 signale les raisons pour lesquelles cette compression ne peut, dans les machines à condensation, être poussée aussi loin que l'exigent les conditions d'économie; on peut même dire que, dans les machines à condensation à pression initiale quelque peu élevée, la compression est relativement insignifiante, et laisse à l'espace nuisible une grande partie de son influence.

Dans la machine compound, le petit cylindre est dans les conditions requises pour que la compression y produise les meilleurs effets, car la détente peut y être complète; de plus la pression du réservoir intermédiaire possède une valeur qui se concilie complètement avec les conditions de la distribution. Le grand cylindre est aussi notablement amélioré, parce que la pression initiale y est très modérée, influence qui

atténue l'effet de l'espace nuisible (123); d'autre part, la compression fournie par le réglage normal de la distribution ramène la pression de l'espace nuisible assez près de celle du réservoir intermédiaire. [1]

Il est suffisamment établi aujourd'hui que la question des espaces nuisibles n'est réellement importante que dans les machines monocylindriques à condensation, pour lesquelles il y a grand intérêt à les réduire matériellement; cette réduction a été poursuivie surtout par Corliss. Pour les machines compound, la question des espaces nuisibles n'existe pour ainsi dire pas, elle est facilement résolue par la compression [2]

138. — *Machines à vapeurs combinées.* — L'influence de la nature du fluide s'exerce, non sur le rendement du cycle de Carnot, mais sur la forme du diagramme du travail. On peut, par l'emploi d'un liquide très volatil, comme l'éther, et pour un écart donné de températures, exagérer la pression motrice, et réduire en conséquence le volume du cylindre. Dans la machine à vapeur d'eau, la faiblesse des pressions motrices aux températures peu supérieures à celle du condenseur contribue à abaisser le rendement organique. Par contre, l'eau est bien le fluide le plus avantageux aux températures initiales, car la pression de sa vapeur n'a rien d'excessif; celle de l'éther, au contraire, atteint 10 atmosphères environ pour la température modérée de 120°.

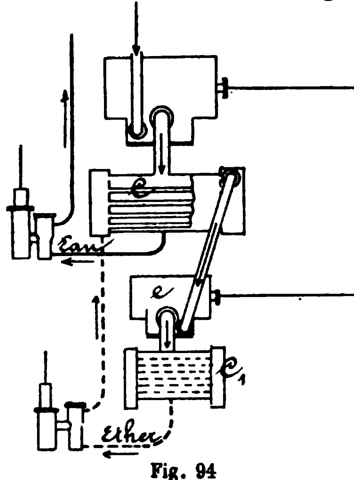


Fig. 94

Il résulte de ces considérations que l'eau est avantageuse pour la partie supérieure du cycle, et que l'éther convient mieux aux basses températures. Les machines à *vapeurs combinées*, imaginées par M. Du Trembley en 1840, comprenaient un premier cylindre à vapeur d'eau fonctionnant entre les températures de 120° (2atm.abs.) et 70° (0atm.,30 abs.). Le condenseur C (fig. 94), était à surface, et servait de vaporisateur

1. M. *de Fréminville* avait surtout insisté sur ce bénéfice de la machine compound, dans une remarquable étude publiée en 1878, mais en négligeant le rôle des parois sur lequel nous reviendrons par la suite.

2. Qui peut cependant donner lieu à de sérieuses difficultés lorsque les machines doivent pouvoir éventuellement fonctionner à échappement libre, c'est-à-dire avec des pressions d'échappement plus élevées.

d'éther ; cette dernière vapeur était employée dans un cylindre spécial *e*, puis condensée dans un condenseur à surface C_1, refroidi par un courant d'eau ; l'éther liquide était repris dans ce condenseur et refoulé au vaporisateur C. Dans une expérience, on a trouvé que la température de l'éther dans le vaporisateur était de 52° (1,75atm.abs.) et que la température inférieure du cycle descendait à 20° (0,57atm.abs.).

Si les cycles étaient parfaits, et s'il n'y avait pas de chute de température entre les deux machines, le rendement des deux cylindres combinés couvrirait l'écart total des températures (120° — 20°) tandis que celui de la machine à vapeur d'eau, avec condensation obligée à 35° environ, ne porte que sur une chute de 120° à 35°. La différence est surtout sensible parce que la température initiale de la machine à vapeur d'eau est peu élevée [1].

L'expérience avait donné un certain avantage économique aux vapeurs combinées ; d'ailleurs, à cette époque, la pression initiale des chaudières marines, (qui étaient alimentées à l'eau de mer), était toujours inférieure à 2 atmosphères, et l'on cherchait à utiliser la partie du cycle la plus désavantageuse et donnant lieu à un grand encombrement. Le système de Du Trembley était rationnel, il n'avait que l'inconvénient de la complication et de l'emploi d'un liquide dangereux.

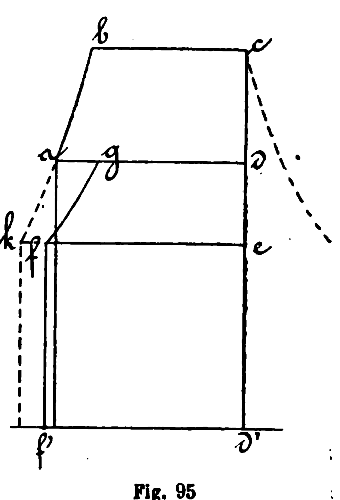


Fig. 95

Nous savons que, dans tout cycle de machine à vapeur, la période de compression est considérée comme irréalisable. Ce fait modifie les conclusions un peu sommaires que l'on pourrait tirer de l'assimilation des cycles à ceux de Carnot ; ainsi, en supposant qu'il n'y ait pas de chute de température au vaporisateur à éther, les cycles entropiques des deux vapeurs sont représentés fig. 95 ; le poids d'éther (environ 4 à 5 kilogrammes) à conjuguer avec 1 kilogramme d'eau, résulte de ce que le rectangle *ad'* doit être équivalent à la chaleur cédée à l'éther *f'fgdd'*. Si la machine était à vapeur d'eau entre les mêmes températures, elle donnerait un rendement différent, la ligne *fg* serait remplacée par *ka* [2].

1. *Ledieu*. — Les nouvelles Machines à vapeur marines, t. I, p. 189.
2. Les données reproduites au n° 66, pour l'acide sulfureux et l'ammonia-

139. — *Vapeurs autres que la vapeur d'eau.* — Divers corps ont été proposés ou essayés pour remplacer la vapeur d'eau [1]; les liquides volatils diminuent l'encombrement, mais les pressions très élevées obligent à diminuer l'écart des températures; en général donc, on ne peut guère espérer des diverses vapeurs un rendement supérieur à celui de la vapeur d'eau. Il ne faudrait pas cependant trop se hâter de conclure, en s'appuyant sur les propriétés des cycles de Carnot, à l'équivalence de toutes les vapeurs, car le rapport entre la chaleur du liquide et la chaleur de vaporisation, qui diffère lorsque l'on passe d'un corps à l'autre, peut rompre cette équivalence d'une manière sensible. En un mot, les vapeurs sont inégales parce que leurs cycles sont différemment altérés par la période d'échauffement du liquide, la limite adoptée pour la détente, l'influence plus ou moins grande des parois, affectée du reste par la nature du fluide.

140. — L'affinité de certains corps pour l'eau, vaincue par l'élévation de température, comme nous le verrons dans l'étude des machines à glace (189), peut servir à faire fonctionner des moteurs; le corps volatil est refroidi par un condenseur à surface, et repris par l'eau, qu'il échauffe; cette dissolution est réintroduite dans les régénérateurs. Il ne s'agit pas ici d'une vaporisation ou d'une condensation, mais de la décomposition et de la reconstitution successives d'une solution, (Haton de la Goupillière, t. I, p. 849).

141. — On peut ainsi utiliser des phénomènes d'affinité en se servant de la chaleur qu'ils dégagent, pour vaporiser un liquide, ou tout au moins pour contribuer à cette vaporisation; tel est par exemple le système de M. Honigmann, employé pour des locomotives de tramways; la vapeur d'échappement est absorbée, avec un fort dégagement de chaleur, dans une solution très concentrée de soude caustique, qui entoure la chaudière à vapeur d'eau. Pour que le phénomène puisse se produire, il faut commencer par introduire dans la chaudière une certaine quan-

que, pourraient être employées utilement à l'étude de machines fonctionnant au moyen de ces vapeurs. On a employé le chlorure et le sulfure de carbone; M. Lafond a fait usage du chloroforme.

1. Haton de la Goupillière, t. I.

tité d'eau surchauffée [1]; la soude caustique se sature peu à peu et le phénomène cesse, mais elle peut être revivifiée par la chaleur [2]. Une charge de soude modérée suffit pour entretenir la vaporisation pendant plusieurs heures.

Nous rencontrons ici un fait entièrement nouveau dans la théorie des moteurs thermiques, puisque le fluide qui abandonne la machine se met spontanément à une température supérieure à celle de la chaudière; mais on ne peut nullement invoquer ce phénomène contre le postulatum de Clausius, attendu qu'une action moléculaire intervient, et joue le rôle d'un véritable foyer.

142. — Parmi les diverses vapeurs essayées avec plus ou moins de succès, celle qui a donné lieu aux applications les plus importantes est la vapeur légère de pétrole; il ne faut pas confondre ces machines avec les moteurs dont il a été question au nº 117, dans lesquels l'hydrocarbure sert à produire dans le cylindre un mélange détonant.

L'huile choisie, qui présente une densité de 0,725, (un peu supérieure à celle du naphte), est vaporisée dans un serpentin, qui constitue la chaudière. MM. Yarrow et Cie, à Londres, qui construisirent ce genre de moteurs pour actionner des embarcations légères [3], se servaient primitivement d'un jet de la vapeur combustible pour chauffer le serpentin; plus tard, ils ont employé, pour alimenter le foyer, un brûleur consommant du pétrole ordinaire.

Des expériences ont été faites par ces constructeurs pour comparer les travaux recueillis au frein par un même moteur, alimenté successivement à la vapeur de naphte et à la vapeur d'eau, pour *une même dépense* de combustible. La machine essayée était un petit moteur à très grande introduction [4]. La puissance a été à peu près deux fois plus grande pour la machine à hydrocarbure; la pression moyenne, pour cette dernière, a été notablement supérieure à celle de la vapeur d'eau pour la même température.

1. Comme dans le système de locomotive sans foyer de Lamm et Francq.
La Locomotive sans foyer, Paris. Dunod, 1876. Engineering, 1882, 2e sem., p. 208. — Cette machine ne diffère en rien du moteur ordinaire, mais elle fonctionne au moyen d'une provision d'eau chaude emmagasinée sous forte pression, et dépensée à une pression réduite. Il y aurait lieu de faire l'étude du système au point de vue théorique.
2. M. Riedler a publié sur ces machines une étude intéressante.
Voir Engineering, 1883, 2e sem., p. 155 et 177; 1884, 1er sem., p. 53.
3. Connues sous le nom de *Zéphir Launches*.
4. *Engineering*. 1888, 1er sem., pp. 349-517-610.

Les propriétés physiques de la vapeur de pétrole ne sont pas suffisamment connues pour permettre de trouver les causes de cette supériorité, qui peuvent être multiples (influence des parois, diminution relative des frottements, influence de la chaleur du liquide).

La maison Esscher Wyss, de Zurich, construit aussi des embarcations légères à vapeur de naphte; une dérivation de la vapeur employée sert à alimenter le brûleur, comme dans la disposition primitive des machines de Yarrow [1].

143. — *Turbo-moteurs.* — Différentes tentatives ont été faites pour recueillir l'énergie de la vapeur en la faisant agir comme l'eau dans les turbines, c'est-à-dire en employant d'abord l'énergie à communiquer de la vitesse au fluide, et en utilisant la quantité de mouvement ainsi obtenue pour produire une impulsion. La grandeur de l'effet obtenu ne dépend que de la force vive que le fluide peut acquérir, c'est-à-dire de sa masse, qui est faible, et de sa vitesse, qui peut devenir très grande.

Le principe ci-dessus est très séduisant, car il permet de réaliser des machines extrêmement simples, sans organes à frottements, et sans avoir recours au mécanisme à bielle, dont l'inertie est une source de difficultés. La première idée du moteur à vapeur se trouve du reste dans l'*éolipyle* de Héron l'Ancien, appareil qui est au turbo-moteur ce que le tourniquet hydraulique est à la turbine.

Pour utiliser une chute de température assez élevée, on peut prévoir, d'après la théorie des turbines [2], que la vitesse d'entraînement doit être fort considérable; c'est en effet ce qui a lieu dans les machines réalisées jusqu'ici.

La voie dans laquelle *M. Parson* a trouvé un succès décisif consiste à employer un grand nombre de turbines (fig. 96) entre lesquelles la chute est partagée; la vapeur qui sort de la première roue R, avec une pression un peu réduite, est reçue entre des directrices fixes D qui l'amènent sur une deuxième série d'aubes mobiles, et ainsi de suite. Il y a jusqu'à 45 turbines montées sur le même arbre, et comme il en résulterait, pour celui-ci, une poussée longitudinale (2e fascicule, n° 39), on associe deux séries de turbines symétriques; la vapeur est reçue, par exemple, à 6 atmosphères absolues, elle sort de la dernière roue à la pression atmosphérique, et s'échappe définitivement.

1. Engineering, 1892, 2e sem., p. 320.
2. 2e fascicule.

Sans vouloir formuler une théorie minutieuse de cette machine, cherchons à nous rendre compte des conditions de son fonctionnement.

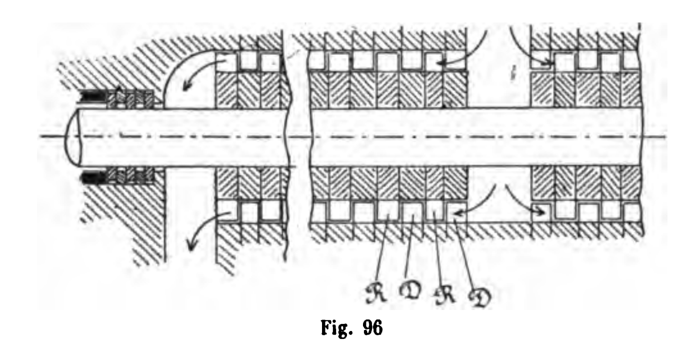


Fig. 96

En coupant les séries successives de directrices et d'aubes par un cylindre médian, on obtient, par développement, les directrices d_1, les aubes a_1, les directrices d_2, etc, (figure 97). La vapeur, avant de s'engager entre les directrices d_1, se trouve à la pression p_1 de la chaudière, sa température t_1 et son titre x_1, sont connus ; elle s'écoule en vertu de la différence de pression, et possède, dans la première section de séparation entre d_1 et a_1, une vitesse absolue U_1, dépendant de la pression p'_1 et, par conséquent de la température t'_1 qui règne dans cette section; son titre, x'_1 est celui qui résulte de la condition d'adiabaticité.

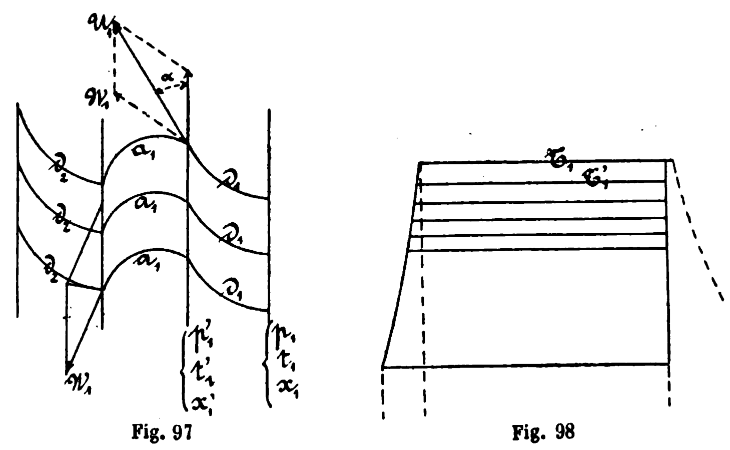


Fig. 97 Fig. 98

Si nous suivons le diagramme entropique de la quantité de vapeur qui s'écoule par une portion quelconque des canaux choisie de manière

à ce que cette quantité soit précisément un kilogramme, nous aurons, par l'équation (58):

$$A \frac{U_1^2}{2g} = \int_{T'_1}^{T_1} dq + r_1 x_1 - r'_1 x'_1 + A (p_1 - p'_1) u$$

c'est-à-dire que l'énergie disponible sous forme de force vive est précisément, si l'on néglige le dernier terme, la surface comprise entre les horizontales T_1 T'_1 dans la figure 98 [1].

C'est cette énergie qu'il s'agit d'utiliser en ramenant au repos la masse de vapeur; or cette modification peut se faire sans changer la pression ni le titre, car il suffit de supposer que la vitesse relative W_1 que prend le fluide à l'entrée de la première roue mobile, soit conservée pendant le passage sur cette roue; on y arrivera en maintenant constante la section du canal, ce que nous pouvons supposer réalisé. Nous admettons que l'inclinaison des aubes à l'entrée soit telle qu'il n'y ait pas de choc, et nous négligeons le frottement.

Le mélange doit du reste quitter la première turbine avec une vitesse nulle, cette condition ne peut être réalisée pratiquement d'une manière parfaite, (non plus que dans les turbines hydrauliques), mais théoriquement, elle revient à supposer que les canaux s'infléchissent à la sortie de manière à être tangents au plan qui les termine perpendiculairement à l'axe; de plus, la vitesse d'entraînement doit être égale à W_1; rien ne s'oppose, à la rigueur, à ce qu'il en soit ainsi, il suffit de supposer que le tracé des aubes est celui des turbines d'action (2e fascicule, n° 46).

Théoriquement, la vitesse absolue du fluide à la sortie de la turbine est nulle, sa température et son titre sont donnés par le diagramme entropique. Le mélange reprend de la vitesse en vertu de la chute de pression qui existe entre l'entrée et la sortie de la deuxième série de directrices; nous pouvons répéter, au sujet de chaque paire de couronnes, le raisonnement qui a été fait pour la première. Toutes les turbines ayant le même diamètre et étant montées sur le même arbre, ont la même vitesse circonférentielle; par conséquent, la vitesse relative W est la même dans tous les canaux mobiles et égale à W_1, ce qui oblige, à cause de l'augmentation du volume spécifique du fluide, à

1. Le diagramme entropique ne s'applique pas aux opérations non réversibles; il nous sert ici à représenter, d'une manière commode, en nous appuyant sur l'équation de l'écoulement, la quantité de chaleur qui se trouve dans la vapeur sous forme cinétique.



agrandir les canaux des directrices suivant une loi déterminée. Cette augmentation peut s'obtenir en agissant sur leur largeur seulement, si on veut conserver le même tracé.

Quoiqu'il en soit, et sous réserve qu'il n'y ait ni chocs, ni frottements, et que le fluide soit ramené au repos absolu en sortant de chacune des roues, on voit que la machine utilisera toute la surface du cycle d'une machine ordinaire entre les mêmes limites de température [1].

Lorsque les turbines successives ont le même tracé et ne diffèrent que par la largeur, l'égalité des vitesses relatives W entraîne celle des vitesses absolues U, c'est-à-dire que le diagramme entropique est partagé, par les températures successives, en bandes d'égale surface.

Comme on ne peut pratiquement annuler la vitesse absolue avec laquelle le fluide quitte chacune des roues, une certaine quantité d'énergie sera conservée au bénéfice de la turbine suivante; cette condition n'est évidemment pas favorable au rendement, puisqu'elle abaisse la température à laquelle la chaleur est transformée en travail.

Les frottements et les chocs ont aussi pour effet de retransformer en chaleur, mais à une température inférieure, de la force vive déjà acquise, et conséquemment d'abaisser le rendement, en augmentant, en fin de compte, la chaleur perdue à l'échappement.

Si, pour préciser les indications ci-dessus, on prend le cas de 45 turbines successives, la vapeur de la chaudière étant sèche et à la pression de 6 atmosphères absolues, et si la vapeur est abandonnée à 100°, on trouve pour le titre final 0,89; la quantité de chaleur transformée en travail dans chaque turbine, par kilogramme de vapeur qui y passe, est, après calcul, de $1^{cal},713$.

La chute de température d'une turbine à l'autre est supérieure à 1° au commencement de la série, et elle décroît jusqu'à la sortie; admettons, cependant, que cette chute ne soit que de 1° au commencement; la vitesse, calculée par la formule approchée 59 (*bis*) est:

$$U_1 = 97^m,00$$

1. Le terme $A(p_1 - p'_1)u$, que nous avons négligé pour chaque turbine, est même nécessaire pour rétablir l'égalité du turbo-moteur avec la machine ordinaire, car, en réunissant tous les termes analogues, on voit qu'ils représentent la chaleur équivalente au travail d'introduction de l'eau dans la chaudière.



On sait que, pour les turbines d'action, on a la relation :

$$W_1 = \frac{U_1}{2 \cos \alpha}$$

α étant l'angle des directrices avec le plan normal à l'axe ; si l'on admet, par exemple : $\alpha = 60°$ (angle qui serait considéré comme très grand pour une turbine hydraulique), on trouve :

$$W_1 = 97^m,00$$

Pour un diamètre de $0^m,10$, cette vitesse, égale à la vitesse d'entrainement, correspondrait à 18.400 révolutions par minute ; la vitesse réalisée n'est que la moitié environ de celle que nous donne ce calcul.

La consommation de vapeur de cette turbine, employée pour actionner des génératrices d'électricité, a été trouvée de 23 k., 5 par cheval électrique et par heure, soit probablement 19 kilogrammes rapportés au travail fourni à l'arbre. Ce chiffre est un peu supérieur à celui des machines ordinaires fonctionnant dans les mêmes conditions de pression, mais il lui reste cependant comparable, c'est-à-dire que les pertes dans les deux cycles, quoique provenant de causes différentes, sont du même ordre.

Le régulateur de vitesse des turbo-moteurs doit nécessairement agir sur la pression d'entrée, c'est-à-dire comme un détendeur, ce qui a pour effet d'abaisser le rendement lorsque la machine ne fonctionne pas à pleine puissance.

La turbine Parson, perfectionnée récemment, a été appliquée à une importante station électrique à Cambridge ; les machines fonctionnent au moyen de la vapeur surchauffée, et a condensation ; des essais minutieux, conduits par *M. Ewing*, ont établi qu'à pleine charge la nouvelle turbine ne consommerait que 7 kilogrammes de vapeur par cheval sur l'arbre, chiffre comparable, sinon inférieur, à celui des meilleures machines à vapeur compound qui se trouvent dans les mêmes conditions de pression. La surchauffe améliore le cycle, mais elle semble agir surtout dans ce cas en diminuant le frottement. Le nouveau régulateur agit en ouvrant plus ou moins longtemps, d'une manière rhythmique, la prise de vapeur.

Le principe des turbo-moteurs n'a donc rien d'irrationnel, ni en théorie, ni dans l'application ; l'obstacle qui en arrête le développement est la grande vitesse de rotation, qui ne convient guère que pour les machines électriques. Des dispositions très ingénieuses ont été prises pour réaliser cette vitesse ; dans l'impossibilité de faire coïncider l'axe prin-

cipal d'inertie avec l'axe de figure de l'arbre, on a laissé à ce dernier une certaine liberté, les coussinets, au lieu d'emboiter l'arbre, sont constitués par une série d'anneaux qui peuvent se déplacer dans le sens du rayon [1], tout en étant maintenus ensemble par la pression d'un ressort.

§ V

Action des parois.

144. — Lorsque l'on évalue la quantité de chaleur transformée en travail en prenant la surface de l'un des diagrammes thermiques examinés depuis le commencement de ce chapitre, on trouve un résultat économique toujours supérieur à celui que donne l'expérience. La différence, surtout pour les machines à condensation, est considérable (elle peut atteindre 40 %), et par le fait, la plupart des théories exposées au chapitre précédent ne conservent qu'une valeur relative; très utiles pour indiquer qualitativement l'influence de certains facteurs, elles ne permettent pas de faire *a priori* des calculs précis sur le rendement ou les dimensions d'une machine. Elles peuvent même induire en erreur; ainsi, d'après ce qui précède, il y aurait tout avantage, dans la machine à parois inertes, à réaliser une détente complète, alors que, dans la pratique, l'influence des parois assigne une limite à la détente, c'est-à-dire que les machines présentent un maximum de rendement (calculé sur la puissance indiquée) pour un rapport de détente relativement peu élevé.

M. Reech avait remarqué, dès 1850 [2], que la consommation réelle, rapportée au coup de piston, est notablement supérieure à celle que l'on peut déduire du diagramme en prenant, par exemple, le volume de vapeur lorsque l'introduction vient de se fermer; il en a conclu qu'une notable quantité de la vapeur admise, condensée au début de la course, échappe au calcul.

1. Pour les essais de M. Ewing et la description du nouveau turbo-moteur voir *Engineering*, 1891, 1er sem., p. 504; 1892, 1er sem., p. 52; 2e sem., pp. 571, 571; l'ancien moteur a fait l'objet de nombreux articles dans la même publication, 1885, 1er sem., pp. 451. 461; 1887, 1er sem., p. 379; 1888, 1er sem., p. 35.
La nouvelle turbine Parson est radiale au lieu d'être axiale, comme les turbines *Dumoulin* et *Dow*, qui sont centrifuges. *Haton de la Goupillière*, t. II, pp. 428 à 434.
2. — *Madamet*, Appendice.



D'ailleurs, nous savons que, dans la détente adiabatique, la quantité de vapeur que l'on peut déduire du diagramme est variable en chaque point de la détente, mais les différences que l'on trouve en réalité ne sont pas celles qui résultent de la variation du titre que produirait la détente adiabatique; il arrive même le plus souvent que le titre, au lieu de s'abaisser, s'élève pendant la détente.

Reech avait conclu de ces faits, que « l'on est conduit à des conséquences fausses en raisonnant sur un cylindre dont les parois n'auraient pas la faculté d'absorber ou de restituer du calorique. »

Qu'on remarque bien ici qu'il ne s'agit pas, pour les parois, de la faculté de *laisser passer* du calorique, ce qui ferait allusion à une perte par rayonnement; le phénomène envisagé est tout autre, et d'une importance beaucoup plus grande.

Hirn poursuivait en Alsace, à peu près à la même époque, un ensemble de recherches calorimétriques tendant à vérifier, au moyen de la machine à vapeur, l'équivalent mécanique de la chaleur. Cette détermination devant comporter nécessairement la mesure du travail recueilli, L, celle de la chaleur reçue Q_1 et de la chaleur Q_2 rendue par la machine, on devait trouver, entre ces quantités, la relation :

$$Q_1 - Q_2 = AL$$

qui était vérifiée d'une manière suffisamment exacte en se servant de l'équivalent mécanique, connu avec une très grande approximation par d'autres expériences. Or, la dépense de chaleur Q_1 a toujours été trouvée supérieure à celle accusée par les diagrammes. Hirn a attribué, comme Reech, et indépendamment de lui, la perte de chaleur à l'action de la couche métallique superficielle, qui, refroidie pendant la détente et la communication avec le condenseur, se réchauffe pendant l'admission en condensant de la vapeur, et fournit ensuite de la chaleur au fluide qui se détend, mais sans vaporiser complètement le liquide déposé sur les parois; ce liquide n'achève de se vaporiser que pendant l'échappement, en continuant à emprunter de la chaleur aux surfaces avec lesquelles il est en contact.

Le refroidissement qui résulte du phénomène qui vient d'être indiqué provoque une nouvelle condensation au moment de l'admission, et le même ordre de choses s'établit et se perpétue à chaque évolution, en produisant un effet analogue, dit *M. de Fréminville* (*cours pratique de machines à vapeur marines*, 1861), à une fuite de vapeur qui passerait

directement de la chaudière au condenseur par l'intermédiaire d'un canal qui serait ménagé dans la paroi du cylindre [1].

145. — Le phénomène hypothétique étudié au n° 126, bien qu'il ne puisse être assimilé complètement à l'action des parois, est de nature à bien faire comprendre le sens de cette action.

En se reportant à la figure 83, on voit que dans une machine sans espace nuisible et à détente incomplète recevant de la chaudière une certaine quantité de chaleur, l'effet d'une plaque conductrice qui prend constamment dans le cylindre la température de la vapeur, est de condenser, pendant l'admission, la quantité de vapeur correspondant à l'altération BB' du cycle entropique. Toute la chaleur correspondante n'est pas perdue néanmoins, attendu que la ligne B'M n'est pas adiabatique, mais la plus grande partie, représentée par la surface B'B*bm*M, passe au condenseur sans effectuer de travail.

Dans l'hypothèse qui a servi de base au raisonnement, la quantité de chaleur perdue au condenseur par l'effet de la paroi augmente lorsque la détente est de moins en moins complète ; l'expérience ne justifie pas entièrement cette déduction ; l'explication de ce désaccord est donnée au n° 166.

146. — Nous avons supposé qu'une plaque métallique se trouvait dans le cylindre, mais nous aurions pu obtenir les mêmes effets d'une certaine masse d'eau se retrouvant en quantité constante au commencement de l'évolution, c'est-à-dire échappant, par suite de son adhérence aux parois ou par toute autre cause, au courant qui balaye l'intérieur du cylindre pendant les premiers instants de l'échappement.

Soit μ le poids d'eau qui se trouve dans le cylindre (supposé à parois inertes). Lorsque l'on introduit 1 kilogramme de vapeur saturée sèche venant de la chaudière, une partie y de cette vapeur se condense pour échauffer l'eau que nous supposons refroidie à la température du condenseur, on a :

$$y = \frac{\mu (q_1 - q_2)}{r_1}.$$

1. M. *Dwelshauvers-Dery* emploie une comparaison plus complète et plus exacte. (Voir Encyclopédie *Léauté*, Calorimétrie de la Machine à vapeur), car la chaleur ne s'écoule pas directement et intégralement; une partie est restituée pendant la détente, bien qu'à une température inférieure à la température *maxima* du cycle. Il n'y a de chaleur s'écoulant directement que celle qui passerait, par conductibilité longitudinale (d'une face à l'autre du piston), et par rayonnement extérieur).

le poids total qui subit les transformations du cycle est $1 + \mu$, et son titre est :

$$\frac{1 - \mu \frac{q_1 - q_2}{r_1}}{1 + \mu}$$

La quantité de vapeur présente au cylindre à la fin de l'admission est $1 - y$. Ces données nous permettent de tracer le diagramme entropique du poids $1 + \mu$ figure 99 ; AB, ligne de transformation du liquide $1 + \mu$ s'obtient en ajoutant les abscisses des lignes *ab* (1 kilog.) et *ee* (μ kilog.). La quantité de vapeur $1 - y$ étant connue ([1]), on portera :

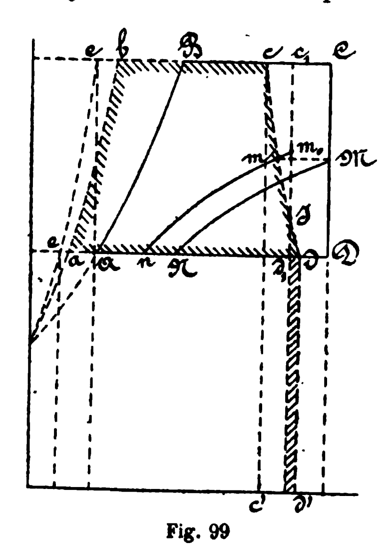


Fig. 99

$$BC = \frac{(1 - y) r_1}{T_1}$$

Le cycle s'achève au moyen des lignes CD, DA. Au point A la quantité de liquide est $1 + \mu$.

Pour comparer à la machine ordinaire celle qui nous occupe, et dans laquelle nous avons admis qu'un poids μ d'eau stagnante se trouve dans le cylindre au commencement de chaque course, nous pouvons rapporter tout le diagramme à la ligne *ab*, c'est-à-dire déplacer vers la gauche toutes ses abscisses de quantités égales aux abscisses de la ligne *ee*, relative au liquide μ ; nous obtenons ainsi la ligne *cd* (située par rapport à CD comme *ee* est située par rapport à l'axe des entropies nulles). La chaleur utilisée par le cycle est *abcd*.

Quant à la machine ordinaire fonctionnant avec cylindre sec à l'état initial et admettant 1 kilogramme de vapeur sèche, son diagramme sera abc_1d_1, car le point *b* est relatif au kilogramme du liquide, bc_1 se rapporte à 1 kilogramme de vapeur ; cc_1 est relatif au poids y de vapeur

1. Les choses se passent évidemment comme si la chaleur nécessaire pour porter le poids μ, de la température T_2 à la température T_1, était fournie directement par la chaudière ; mais, dans ce cas, ayant déjà tenu compte de cette quantité de chaleur dans le tracé AB, nous ne devrons augmenter l'entropie que de la quantité correspondante au poids $1 - y$ de vapeur.

dont la condensation était nécessaire pour échauffer le liquide μ. Le rectangle dont la base est cc_1, qui représente la chaleur de vaporisation (ou de condensation) du poids y, est équivalent à la surface $c'c\ dd'$.

Donc, pour une même dépense de chaleur, la machine qui renferme à l'état initial une certaine quantité d'eau, emporte au réfrigérant une quantité de chaleur supérieure; la différence est le rectangle $d_1\ d'$ couvert de hachures.

Il y a du reste identité absolue entre ce diagramme et celui du nº 126; le poids d'eau qui peut produire les mêmes effets qu'une plaque métallique mince est très faible, car sa chaleur spécifique est l'unité, tandis que celle de la fonte, égale à 0.115 (158), est 8, 7 fois moins grande. Comme la densité de la fonte est 7, 2 fois plus grande que celle de l'eau, il s'en suit que les quantités de fonte ou d'eau capables de produire les mêmes effets sont à peu près égales en volume.

Nous pourrions examiner sur les deux machines (avec ou sans eau initiale) l'effet d'une détente incomplète. L'opération irréversible pendant laquelle le cylindre se met instantanément en équilibre de pression avec le condenseur peut être remplacée, comme nous l'avons démontré, par une transformation réversible à volume constant MN dans le cas où il y a de l'eau stagnante, mais qui devient mn par le transport horizontal effectué sur tout le cycle ABCD. Dans la machine dont le cylindre est sec au moment initial, la transformation à volume constant qui met fin à la détente, doit aboutir au même point n, en supposant que le cylindre ait le même volume que dans l'autre cas; par conséquent, les transformations mn coïncident dans les deux machines, mais elles commencent en des points m_0, m un peu différents. La même observation pouvait être faite au nº 126.

Il résulte de cette remarque que la présence de l'eau dans le cylindre au moment initial aura pour effet de prolonger la détente jusqu'à une température plus basse (m au lieu de m_0), mais l'inverse pourrait se produire si les dimensions du cylindre étaient telles que la ligne m_0m tombât en dessous du point I.

147. — Les deux hypothèses examinées dans ce qui précède (effet d'une plaque de métal ou effet d'une certaine quantité d'eau stagnante) se rapprochent de celles qui ont été émises pour expliquer l'action des parois; la première est celle de Hirn, la seconde est celle que M. Zeuner admet comme possible; nous les avons appliquées à un phénomène

simplifié, l'intervention du métal ou de l'eau dans un cylindre est beaucoup plus compliquée, mais il était néanmoins utile de donner ce premier aperçu.

Il serait impossible, sans faire appel aux lois physiques plus ou moins connues de la transmission de la chaleur à travers les milieux, ou sans procéder à des expériences directes très difficiles et très délicates (1), de découvrir quelle est l'hypothèse la plus probable, car les essais calorimétriques ne peuvent élucider complètement la question, leurs résultats s'expliquent indifféremment au moyen des deux hypothèses; cependant, des circonstances en apparence très accessoires peuvent jeter un grand jour sur la nature des phénomènes physiques qui s'accomplissent réellement.

Deux voies différentes se présentent pour résoudre le problème qui nous occupe : l'une, surtout expérimentale, fournit le moyen, en se servant de quelques hypothèses, d'analyser la chaleur communiquée au cycle par les corps étrangers (fonte ou eau); l'autre, plus théorique, consiste à rechercher, en se basant sur les lois de pénétration de la chaleur, l'expression analytique de la chaleur absorbée ou rendue (2).

148. — *Méthode d'expérience de Hirn* (3). — Elle consiste à recher-

1. Analogues, par exemple, à celles qu'a faites M. Bryan Donkin Jr pour mesurer directement la température des parois à toutes profondeurs pendant le fonctionnement même, ou pour examiner, au moyen de parois transparentes, ce qui se passe effectivement dans le cylindre. Nous ferons encore allusion, plus loin, à ces belles et intéressantes expériences.

2. M. *E. Haerens* (*Annales des Ingénieurs de Gand*, 1889), dans un important mémoire consacré à la machine à vapeur, a exposé un procédé de calcul qui consiste à considérer la température de la paroi comme constante, et à évaluer cette température d'après la condition que la somme algébrique des échanges est nulle pour la période (si nous supprimons le rayonnement et l'enveloppe); connaissant cette température moyenne, qui dépend des conditions du diagramme, l'auteur établit une formule donnant *a priori* la quantité de chaleur cédée aux parois pendant l'admission, et, par conséquent, la condensation; puis il suppose qu'une partie de cette eau rentre dans le cycle pendant la détente. M. Haerens a appliqué sa théorie à la machine monocylindrique et à la machine compound, et déterminé l'effet des enveloppes.

M. Thomas English a proposé, à plusieurs reprises, l'emploi de formules empiriques pour déterminer la *condensation initiale*.— *Institution of Mechanical Engineers*, 1887-1889 et mai 1892.

3. *Hirn*. — Théorie mécanique de la chaleur, et de nombreux articles dans le Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse, par Hallauer, de 1873 à 1883.

Zeuner. — Civil Ingenieur, 1881-1882. — Mémoires traduits dans la Revue universelle des Mines.

Dwelshauvers-Dery.— Divers articles de la Revue universelle des Mines, dont la substance est résumée et complétée dans le récent ouvrage du même auteur : — Étude calorimétrique de la machine à vapeur. — Encyclopédie Léauté.

cher, sur une machine à vapeur étanche, fonctionnant à une admission constante et égale sur les deux faces du piston :

1°) La chaleur Q_1 empruntée à la source supérieure;

2°) La chaleur Q_2 versée au condenseur;

3°) La chaleur AL transformée en travail;

4°) La chaleur rayonnée e.

Entre ces quantités, on doit avoir la relation :

$$Q_1 = AL + Q_2 + e \tag{a}$$

dont la vérification indique si l'expérience a été bien faite.

On analyse, en se servant du diagramme moyen de l'essai, et en faisant certaines hypothèses, le passage de la chaleur de la vapeur aux parois ou *vice versa*, en attribuant à la fonte un rôle capital et exclusif dans ce passage.

Ces hypothèses sont :

A) que la vapeur est sèche à la fin de l'échappement, au moment où la compression commence;

B) que le fluide emprisonné dans le cylindre se comporte comme un mélange uniforme, de température constante dans toute sa masse ; c'est-à-dire que, si de l'eau se forme sur les parois par condensation de vapeur, elle a toujours la température de la vapeur avec laquelle elle est en contact, bien qu'elle touche, d'autre part, une paroi métallique plus froide pendant l'admission, plus chaude pendant l'échappement.

L'hypothèse **A**) est nécessaire pour définir un état initial du fluide qui reste dans le cylindre à un moment déterminé et connu. L'hypothèse **B**) permet de calculer, à un instant quelconque, la chaleur interne du fluide d'après sa composition.

L'équation (a) permettrait, à la rigueur, de trouver la chaleur rayonnée e, mais par la différence de deux nombres très grands, sur lesquels une erreur relative assez faible aurait une influence considérable. D'ailleurs, une incertitude presque sans remède s'attache à la détermination de la quantité de chaleur Q_1, car si le poids de la vapeur fourni à la machine peut être déterminé avec une très grande approximation [1], son titre n'est pas connu avec précision.

1. Par le poids de l'eau d'alimentation fournie à la chaudière, et moyennant les corrections nécessaires. On peut aussi condenser la vapeur qui sort de la machine dans un condenseur à surface. On prendra la différence entre le poids d'eau d'injection et la décharge du condenseur; ce dernier moyen est incertain, à cause de la grandeur des nombres.



La vapeur des chaudières peut entrainer une quantité d'eau plus ou moins grande en suspension, et il n'existe aucun moyen pratique convenable de déterminer la proportion exacte d'eau entraînée [1]. Mais la chaleur rayonnée *e* est toujours fort petite, on peut la connaître avec une approximation suffisante en laissant séjourner la vapeur dans la machine arrêtée, et en mesurant l'eau de condensation des purges. L'équation pourra, par conséquent, servir de vérification, notamment pour ce qui concerne l'eau entraînée.

Q_1 comprend aussi la chaleur cédée par la vapeur qui se condense dans les enveloppes, et que l'on calcule d'après le poids de l'eau évacuée par les robinets de purge.

Procédons à la détermination de la chaleur absorbée et rendue par les parois, et, à cette fin, supposons que, sur le diagramme du travail, on puisse déterminer les positions rigoureuses du piston pour lesquelles se produisent l'ouverture et la fermeture de l'admission et de l'échappement.

Première période. — La compression commence en A, figure 100, la vapeur emprisonnée est sèche en vertu de l'hypothèse **A** ; son volume, et par conséquent son poids sont connus. Tous les volumes sont comptés à partir de la ligne XX obtenue en portan l'espace nuisible à gauche du point correspondant à l'extrémité de la course. La période considérée s'arrête en B; le volume et la pression du mélange étant connus, ainsi que le travail reçu, on trouve le titre du mélange en B, et on calcule sa chaleur interne; désignons par U le travail interne, en l'affectant d'un indice se rapportant à la position du piston, par R la chaleur positive ou négative fournie par les parois, par L le travail ac-

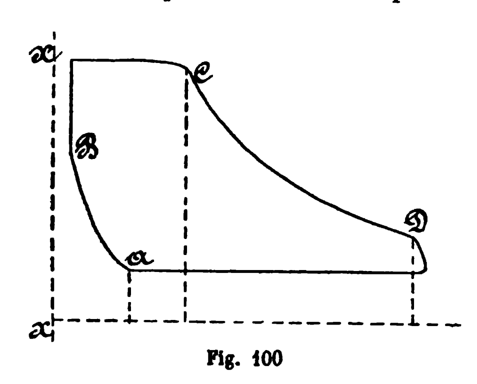


Fig. 100

1. Les méthodes employées à cet effet seront examinées à propos des chaudières. Le phénomène d'entrainement d'eau est contesté par quelques ingénieurs; d'après eux, il peut y avoir entrainement de paquets d'eau lorsque les dispositions de chaudières s'y prêtent, mais non entrainement continu. Le *procédé au sel*, sur lequel ils se basent pour énoncer ce fait, est sujet à objections.

compli, qui prend le signe négatif dans le cas où il est reçu par le fluide; R et L comprennent donc implicitement leur signe.

La quantité U, se rapportant à l'unité de poids, devra être multipliée par le poids μ du fluide emprisonné dans l'espace nuisible, et l'on aura :

$$\text{(I)} \qquad \overset{b}{\underset{a}{R}} = A\left[\mu\,(U_b - U_a) + \overset{b}{\underset{a}{L}}\right]$$

Cette équation permet de calculer la chaleur fournie; pour cette période, on trouvera que la valeur de R est négative (1), c'est-à-dire que la paroi absorbe de la chaleur.

Deuxième période. — Au point B, l'admission s'ouvre brusquement, l'espace nuisible achève de se remplir, c'est-à-dire qu'une certaine quantité de vapeur, poussée du tuyau d'admission par un piston fictif sous la pression p_1, se précipite dans l'espace nuisible ; la courbe d'indicateur montre que ce remplissage a lieu instantanément, et que la pression est déjà établie lorsque le piston se meut ; pendant ce temps la vapeur continue à affluer, du travail extérieur est accompli, et les parois se réchauffent par une forte condensation de vapeur.

Soit C le point du diagramme pour lequel l'admission vient de se fermer. Pendant le trajet de B en C, l'opération accomplie n'est pas entièrement réversible, à cause du remplissage de l'espace nuisible, mais le principe de l'équivalence s'applique néanmoins à la transformation, si l'on suppose que C est un point d'équilibre. Soit ν le poids de vapeur pris à la conduite, et x_1 son titre; ce poids, connu par l'expérience, est introduit sous la pression p_1, et la chaleur fournie, comptée depuis zéro, est :

$$\nu\,(q_1 + r_1\,x_1 + A p_1\,u)$$

ν ne comprend que le poids admis dans le cylindre, à l'exclusion de celui condensé dans l'enveloppe. L'expression ci-dessus est obtenue en

1. On peut hardiment supposer, dans toutes les machines à vapeur saturée, humide ou sèche, et même légèrement surchauffée, que la vapeur est en dessous du point de saturation pour tout état du diagramme; s'il en était autrement, on s'en apercevrait du reste dans le calcul préliminaire du titre, car celui-ci serait supérieur à l'unité. Il faudrait alors chercher par tâtonnements le point où le titre est égal à l'unité, et, à partir de ce point, se servir des propriétés de la vapeur surchauffée.



ajoutant, à la chaleur interne, celle qui correspond au travail d'introduction, c'est-à-dire :

$$A p_1 \nu \left[u + (u'_1 - u)\, x_1\right]$$

car le volume admis a été expulsé du tuyau vers le cylindre.

La chaleur $A\mu U_b$ s'ajoute à celle qui vient de la chaudière ; pendant l'introduction, c'est le poids total $\mu + \nu$ qui évolue ; on a donc, en continuant l'emploi des mêmes notations :

$$\text{(II)} \qquad \overset{c}{\underset{b}{R}} = A(\mu + \nu)\, U_c - A\mu\, U_b - \nu\,(q_1 + r_1 x_1 + A p_1 u) + A \overset{c}{\underset{b}{L}}$$

Le point C du diagramme fait connaître, par le calcul du titre, la valeur du terme

$$A(\mu + \nu)\, U_c$$

Le diagramme fait connaître également le terme du travail.

L'équation fournira donc la valeur de la chaleur cédée par la paroi, entre les points B et C, au mélange qui se trouve dans le cylindre.

Troisième période. — Depuis le point C jusqu'au moment où l'échappement s'ouvre (ou un peu avant), c'est-à-dire jusqu'au point D, le poids du fluide ne varie pas ; la transformation CD est réversible, et on pourrait en déduire, point par point, la chaleur interne du mélange ; si nous considérons tout l'ensemble de l'opération, nous pouvons poser l'équation :

$$\text{(III)} \qquad \overset{d}{\underset{c}{R}} = (\mu + \nu)(U_d - U_c) + A \overset{d}{\underset{c}{L}}$$

qui fait connaître la chaleur fournie au fluide par la paroi.

Quatrième période. — Pendant le parcours de la ligne DA du diagramme, le poids ν est expulsé du cylindre, et son titre s'annule, tandis que le poids μ est réintroduit dans le cycle à l'état de vapeur sèche. Le point D correspond à un état d'équilibre ; à l'instant A où la compression va commencer, les deux parties μ et ν du fluide qui a pris part à l'évolution DA ont également atteint un état d'équilibre, et on peut calculer leur chaleur interne. Comme ν est entièrement liquéfié à la tem-

pérature t_2 du condenseur, pour laquelle la chaleur du liquide est q_2 par kilogramme, la chaleur interne du poids $\mu + \nu$ sera, au point A :

$$A \mu U_a + \nu q_2$$

mais il faut compter comme gain de chaleur interne l'échauffement de l'eau de condensation qui s'ajoute au cycle de D en A [1]. Appelons Q_2 le nombre de calories employé à cet échauffement, nombre qui est l'une des mesures de l'expérience. De plus, l'eau provenant de la condensation de la vapeur expulsée du cylindre dans le condenseur, y dépose l'énergie correspondante à ce travail d'expulsion, c'est-à-dire $A\nu p_2 u$ [2].

$$\text{(IV)} \qquad \overset{a}{\underset{d}{R}} = A \mu U_a + \nu q_2 + A \nu p_2 u + Q_2 - A (\mu + \nu) U_d + A \overset{a}{\underset{a}{L}}$$

Rien n'empêcherait évidemment de se servir de cette dernière équation pour déterminer la chaleur fournie par la paroi à la vapeur pendant l'échappement, car on peut mesurer ou évaluer tous les termes qui composent le second membre.

En ajoutant membre à membre les équations des quatre phases, on doit retrouver l'expression du principe de l'équivalence pour tout le contour fermé du diagramme, cette addition donne, en effet :

$$\text{(V)} \qquad \sum_a^a R + \nu (q_1 - q_2 + r_1 x_1) - Q_2 = A \sum_a^a L - A \nu (p_1 - p_2) u$$

Le premier membre de cette équation exprime bien l'excès de la chaleur fournie au fluide, soit par le cylindre, soit par la chaudière, sur la chaleur abandonnée définitivement au réfrigérant, tandis que le second membre représente le travail moteur développé sur le piston diminué du travail résistant de la pompe alimentaire.

Cette dernière équation pourrait remplacer l'une des autres, par exemple la dernière, et, par différence avec la somme des trois premières, fournir la chaleur cédée par la paroi pendant la quatrième période.

1. Il faudrait même compter le travail fourni à l'eau d'injection pour la pousser dans le condenseur.

2. En d'autres termes, le travail accompli sur le fluide, par les forces extérieures, ne comprend pas entièrement le travail L du diagramme depuis le point D jusqu'au point A, parce que le fluide conserve le volume u lorsqu'il est condensé.

Mais il y a plus : on peut, par une simple remarque, faciliter le calcul de cette quantité de chaleur; en effet, le cylindre pendant le fonctionnement, atteint un régime pour lequel son état thermique est le même au commencement et à la fin de chaque période, c'est-à-dire que la chaleur qu'il cède pendant la période est précisément celle qu'il reçoit.

Si donc le cylindre est parfaitement isolé par sa surface extérieure et s'il n'y a pas d'enveloppe, on doit trouver

$$\sum_a^a R = o$$

Si le cylindre perd par rayonnement une quantité de chaleur e que l'on mesure, on aura :

$$e + \sum_a^a R = o$$

Enfin, si le cylindre est entouré d'une enveloppe de vapeur, peu importe comment celle-ci est disposée [1], il s'y condense une certaine quantité de vapeur, une partie de la chaleur mise en liberté par cette condensation sous la pression connue de l'enveloppe, passe à la paroi extérieure d'une manière continue, l'autre partie est cédée à la paroi intérieure; appelons e_1 et E_1 ces deux quantités dont la somme est donnée par l'expérience; e_1 peut être déterminé par une expérience préalable, ou évalué approximativement; on connait donc E_1, chaleur fournie au cylindre par sa paroi *extérieure*, et l'on a :

$$\text{(VI)} \qquad - E_1 + \sum_a^a R = o$$

car l'équation doit exprimer que la paroi, pour l'ensemble des quatre opérations du diagramme, conserve le même état thermique. En faisant usage de la dernière relation, l'équation (V) devient celle que l'on pouvait poser *a priori* en vertu du principe de l'équivalence.

Les équations (I), (II), (III) et (VI) permettent de trouver successivement les quantités :

$$\overset{b}{\underset{a}{R}},\quad \overset{c}{\underset{b}{R}},\quad \overset{d}{\underset{c}{R}},\quad \overset{a}{\underset{d}{R}}$$

1. Notre raisonnement et nos calculs s'appliquent également au cas où l'enveloppe est chauffée par le passage de la vapeur qui se rend dans le cylindre, car, dans ce cas, v s'obtient en défalquant, de la vapeur fournie par la chaudière, la condensation dans l'enveloppe, absolument comme lorsque celle-ci est chauffée par un tuyautage indépendant.



L'équation IV doit ensuite se vérifier identiquement ; on pourrait, il est vrai, se servir des équations surabondantes (IV) ou (V) pour trouver Q_2, mais on n'a aucun intérêt à connaître cette quantité de cette manière ; la seule utilité de l'une ou l'autre de ces équations est qu'elles fournissent le moyen de contrôler l'exactitude des expériences, qui donnent Q_2.

Ces calculs, appliqués à la machine de la filature de *Logelbach*, expérimentée par Hirn les 7 et 8 septembre 1875, ont donné les résultats consignés ci-dessous ; la machine n'avait pas d'enveloppe, elle fonctionnait avec une détente assez longue eu égard à la pression d'admission, l'expérience a été faite avec de la vapeur saturée et avec de la vapeur surchauffée.

	VAPEUR saturée	VAPEUR surchauffée	OBSERVATIONS
R_a^b compression	— 1.41	— 1.30	Chaleur cédée à la paroi
R_b^c admission	— 49.97	— 34.31	» »
R_c^d détente	8.30	12.45	Chaleur rendue par la paroi.
R_d^a échappement	40.36	21.69	» »
e chaleur rayonnée	2.72	1.47	Par différence.

149.— La méthode de Hirn a fait l'objet de nombreuses discussions ; les unes, portant sur quelques incorrections, ont perdu leur intérêt depuis que cette méthode a été mise en formules ([2]), et nous ne nous y arrêterons pas, mais les hypothèses sur lesquelles s'appuie la méthode elle même ont donné lieu à de sérieuses objections, faites surtout par M. Zeuner, et notamment sur les points suivants :

Les indications du diagramme à la fermeture de l'admission ne peu-

1. D'après M. Dwelshauvers-Dery.
2. Voir à ce sujet les nombreux travaux de M. Dwelshauvers-Dery, les deux Mémoires de M. Zeuner, et ceux de Hallauer, ceux de M. Pasquier (Annales de l'Union des Ingénieurs sortis des Écoles de Louvain, années 1879 et suivantes).



vent servir de base pour déterminer l'état du mélange emprisonné à ce moment derrière le piston, parce que le phénomène réversible de l'introduction de la vapeur avec un étranglement plus ou moins prononcé, et du remplissage de l'espace nuisible, n'est pas encore terminé; en un mot, le point C ne correspond pas à un état d'équilibre. Pour cette raison, il conviendrait de réunir les deux phases d'admission et de détente, afin d'éliminer l'état intermédiaire inconnu.

Toutefois, l'approximation que donne la méthode de Hirn en ce qui concerne la deuxième et la troisième périodes est une question d'appréciation, et la principale critique de M. Zeuner porte sur l'hypothèse **A**. Si, au lieu de supposer égal à 1 le titre de la vapeur emprisonnée au commencement de la compression, comme le fait Hirn, on laisse le titre indéterminé et représenté par exemple par x_2, la méthode conduit aux mêmes équations que précédemment, mais la chaleur fournie à la vapeur par la paroi pendant l'échappement dépend de x_2, de sorte qu'en interprétant la même expérience, on trouve des valeurs très différentes pour cette perte (dont la recherche est évidemment l'objectif de la méthode), suivant l'hypothèse admise pour x_2.

Sans doute, la chaleur abandonnée au réfrigérant est la même au total, mais elle se compose de R, de l'énergie du travail de refoulement, et de la chaleur interne que possède le fluide au point D; le travail de refoulement, donné par le diagramme, est connu; la valeur donnée à x_2 n'a en réalité pour effet que de modifier le partage, entre deux termes complémentaires, de la chaleur totale qu'ils représentent. Mais, pratiquement, la question est du plus haut intérêt, car les moyens à mettre en œuvre pour se débarrasser de l'eau stagnante dans un cas, et de l'influence des parois dans l'autre, sont différents.

Dans son premier mémoire [1] M. Zeuner, en discutant les résultats d'une expérience de Hallauer, cherche l'expression de la chaleur cédée par la paroi pendant la quatrième période, en donnant à $1 - x_2$ des valeurs qui varient de 0 (hypothèse de Hirn) à 0,50, et trouve :

1. *Revue des Mines*, 2e série, t. XI, pp. 16 à 55, en traduction du *Civil Ingenieur*, t. XXVII.
   » 2e série, t. XI, pp. 56 à 68. — Réponse de Hirn au mémoire précédent.
   » 2e série, t. XIII, pp. 1 à 26. — Deuxième Mémoire de M. Zeuner.

$1 - x_3 =$	0.00	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
$\frac{a}{d}$ R =	20.050	19.673	19.107	18.163	16.276	11.616

On voit que, dans ce cas au moins, l'hypothèse de Hirn a pour effet, non d'exagérer la perte de chaleur au condenseur (qui est évidemment toujours la même dans une même expérience) mais d'exagérer la contribution de la paroi dans cette perte.

M. Dwelshauvers-Dery suppose que la paroi prend toujours superficiellement la température de la vapeur, et que l'équilibre s'établit très rapidement [1]; M. Anspach [2] trouve que, dans la théorie alsacienne, cette hypothèse est rendue nécessaire par l'étude des courbes de compression ; il établit, d'autre part, par les théories admises sur la conductibilité, que cet équilibre est impossible, et que la température de la pellicule interne ne varie pas beaucoup ; nous trouverons une confirmation du peu d'étendue de cette variation dans la discussion de la théorie de *M. Kirsch* (§ VI).

Les phénomènes de condensation et de revaporisation d'une partie de la vapeur admise au cylindre ne sont pas mis en doute par les objections faites à la théorie alsacienne, et l'expérience, si intéressante qu'elle soit, au moyen de laquelle M. Donkin est parvenu à rendre ces phénomènes visibles sur une paroi de cristal, ne peut être invoquée ni dans un sens ni dans l'autre [3].

1. *Dwelshauvers-Dery*. Étude calorimétrique, etc., n° 27. — Nous nous bornons à citer ici cette hypothèse, qui sera discutée au paragraphe VI.
2. *Lucien Anspach*. — Le Rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. Revue universelle des Mines, 3e série, tt. XVII et XVIII.
3. Bulletin de Mulhouse. — Le Révélateur de Donkin, 1889, pp. 128 et 458, 1890, p. 289. — Revue universelle des mines 1893, *Donkin, Sur la forme de l'eau dans les cylindres*. — Nous donnons, en tête de ce volume, un spécimen d'instantané photographique, montrant l'état des parois du révélateur, d'après un cliché que nous devons à l'obligeance de M. Sidney Donkin; les ombres visibles dans les deux images proviennent de douilles et tubulures qui se trouvent vers l'intérieur du manchon en cristal, pour le mettre en communication avec le cylindre de travail, et pour la mesure de la température de la vapeur.
On observe généralement que de grosses gouttes d'eau ruissellent sur les parois pendant l'admission, en même temps que le verre se couvre d'une buée continue et dense; pendant l'échappement, les parois deviennent d'une transparence relative, et le volume des gouttes diminue; dans les limites où l'expérience a été faite, la vitesse de rotation (30 à 150 tours par minute) ne semble apporter aucun changement au phénomène.

150. — *Représentations graphiques.* — Plusieurs modes de représentation permettent de mettre en évidence l'échange de chaleur, qui, d'après l'hypothèse alsacienne, se fait entre la paroi et la vapeur ; ils peuvent être utiles pour faire apparaître les phénomènes secondaires que l'on découvrirait difficilement à l'inspection des tableaux de chiffres, toujours assez compliqués, auxquels conduit l'application de la méthode de Hirn.

Le procédé de M. Dwelshauvers-Dery [1] consiste à porter en ordonnées positives ou négatives, sur le diagramme même du travail, comme l'ont fait Ayrton et Perry pour les machines à gaz (24 et 110), la quantité d'énergie fournie ou enlevée à la vapeur par unité d'accroissement de volume du fluide, cette énergie étant exprimée en kilogrammètres. Si dR est la quantité de chaleur échangée pendant l'accroissement dv de volume, EdR est l'énergie correspondante, en kilogrammètres ; on porte en ordonnée la quantité :

$$E \frac{dR}{dv}$$

et l'on obtient une courbe délimitant une surface dont l'élément représente l'énergie fournie, de même que les éléments de la courbe des pressions représentent les travaux effectués.

Le diagramme en question pourrait s'appeler la courbe différentielle d'échange ; sa surface totale, intégrée par rapport au volume, ou :

$$\int E \frac{dR}{dv} dv$$

représente la quantité d'énergie échangée depuis une origine déterminée [2].

En vertu du principe de l'équivalence, on a du reste :

$$E\,dR = dU + pdv$$

ou :

$$dU = E\,dR - pdv$$

ou encore :

$$\frac{dU}{dv} dv = \left(E \frac{dR}{dv} - p\right) dv$$

1. Bulletin de Mulhouse, 1888.
2. *M. Anspach*, mémoires cités, s'est servi de la courbe intégrale des échanges, superposée à la courbe intégrale du travail.

La différence entre les ordonnées de la courbe différentielle d'échange et celles du diagramme du travail exprime donc la variation d'énergie interne, par unité d'accroissement de volume, du fluide soumis à la transformation; on peut rapprocher cette remarque de celle qui figure en note au n° 24.

La courbe des échanges ne peut être déterminée par points que pour les opérations réversibles (compression et détente), tandis que les intégrales qui se rapportent à chacune des périodes du diagramme sont connues; M. Dwelshauvers-Dery se contente généralement de figurer par des rectangles les surfaces qui représentent l'échange total de chaque période. On tient compte du signe en portant ces surfaces au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal sur lequel sont comptés les volumes (ou les courses). Les rectangles se rapportant aux quatre périodes sont désignés dans la figure 101 par les numéros 1 à 4. En suivant le contour des rectangles successifs dans le sens des flèches, on forme une figure à deux boucles, dont les surfaces seraient évidemment égales si e ou E_1 étaient nulles (148); car, en ajoutant à chacune de ces boucles la partie des rectangles qui se recouvrent, elles exprimeraient, l'une la chaleur reçue, l'autre la chaleur rendue par la paroi.

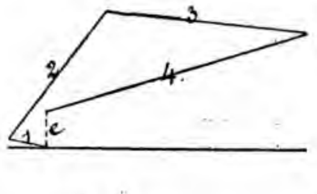
Dans la machine sans enveloppe, la chaleur reçue par la paroi est en excès, sur la chaleur rendue, de la quantité e; lorsqu'il y a une enveloppe l'inverse a lieu, et l'excès de l'une des boucles sur l'autre est E_1.

Fig. 101

Lorsque l'on fait usage de la courbe intégrale des échanges en supposant uniforme le flux de chaleur en fonction du volume pendant chaque période, le diagramme est formé d'une série de lignes droites qu'on trace facilement au moyen d'un pôle. L'ordonnée en un point quelconque est la quantité de chaleur reçue à travers la paroi interne; l'ordonnée finale sera donc $-$ E_1 ou e (fig. 102), suivant que la machine

1. Voir de nombreux tracés de diagrammes d'échanges dans diverses publications, et notamment la Revue universelle des Mines; 3e série, t. VII, Machines Willans.

Dwelshauvers-Dery.— Minutes of Proceedings of C. E, 1888-1889, 4e partie.



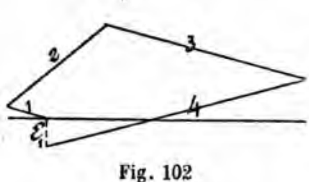


Fig. 102

est à enveloppe de vapeur, on n'en possède pas.

151. — La méthode de Hirn peut être appliquée aux machines compound [1]; les équations (I), (II), (III), (IV) du n° 148 sont applicables au petit cylindre, et font connaître le terme :

$$\overset{a}{\underset{d}{\mathrm{R}}}$$

Pour le grand cylindre (fig. 103), on commencera l'analyse par le point A', la période de compression A'B' porte sur un poids μ' de fluide, et fait connaître :

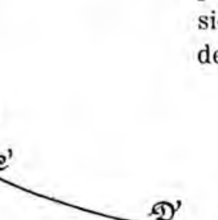


Fig. 103

$$\overset{b'}{\underset{a'}{\mathrm{R}}}$$

Pour la période d'admission B'C', il faut observer, en faisant le calcul de la chaleur interne du poids de fluide $\mu' + \nu'$ au point C', que le poids ν' peut différer de ν, par exemple à cause du drainage du réservoir intermédiaire, dans lequel l'eau se condense, ou parce que la vapeur chauffe l'enveloppe du grand cylindre ; dans ce cas, soit π la somme des poids condensés, et q' la chaleur du liquide qui en résulte [2] ; appelons e_1 et E_1 les quantités de chaleur rayonnée et cédée utilement au grand cylindre, c'est-à-dire par la face active de l'enveloppe. Nous aurons :

$$\overset{a}{\underset{d}{\mathrm{R}}} + \overset{c'}{\underset{b'}{\mathrm{R}}} = \mathrm{A}\left[(\mu'+\nu')\mathrm{U}_{c'} + \mu\mathrm{U}_a\right] + \pi q' - \mathrm{A}\left[\mu'\mathrm{U}_{b'} + (\mu+\nu)\mathrm{U}_d\right] + \mathrm{A}\left(\overset{c'}{\underset{b'}{\mathrm{L}}} + \overset{a}{\underset{d}{\mathrm{L}}}\right) + e_1 + \mathrm{E}_1$$

1. M. *Longridge* a fait cette application en 1881. — Engineering 1882, 1er sem. p. 200, Voir aussi Dwelshauvers, ouvrage cité. — *Minutes of Proceedings of C.-E.* vol. LXX et LXXIX, (John Mair).— Madamet, ouvrage cité.

2. Les purges sont recueillies séparément, et on pourra en déduire la chaleur e_1 rayonnée par le réservoir et le grand cylindre, ainsi que la chaleur E_1 absorbée par le fourreau intérieur du grand cylindre.

Cette relation exprime, comme celles que l'on pose pour les autres périodes, que la chaleur fournie au fluide par les parois du petit et du grand cylindre, pendant le transvasement, est égale à la chaleur disparue sous forme de travail effectué par le fluide, augmentée de l'accroissement de la chaleur interne depuis le commencement jusqu'à la fin de l'opération, et de la chaleur $e_1 + E_1$ cédée directement, peu importe à quels corps.

L'équation se simplifierait beaucoup si le transvasement pouvait s'opérer sans aucune condensation, ni perte de pression, et si l'espace nuisible au grand cylindre était nul, en un mot, si les lignes DA, B'C' coïncidaient ; on aurait alors :

$$\overset{a}{\underset{d}{R}} + \overset{c'}{\underset{b'}{R}} = o$$

c'est-à-dire que la chaleur fournie par la paroi du petit cylindre pendant l'échappement serait simplement absorbée par la paroi du grand cylindre pendant l'admission, mais ce serait là une approximation très grossière dans la plupart des cas.

On voit cependant qu'il n'est pas absurde de supposer que, dans la machine compound, la chaleur pendant le transvasement ne fait que changer de paroi, sans passer dans la vapeur au moment du transvasement, comme on l'a quelquefois supposé pour donner la raison de l'économie réalisée dans ces machines [1]. A en juger par les résultats d'application de la méthode de Hirn aux machines compound, la chaleur absorbée par les parois du grand cylindre pendant l'admission est même beaucoup plus grande que celle que les parois du petit cylindre cèdent à la vapeur pendant l'échappement (Essai Longridge de 1889.) [2].

1. Dans le mode de raisonnement auquel nous faisons allusion, on dit que la machine compound permet à la chaleur emmagasinée par les parois de rentrer dans le cycle à une température plus élevée que dans la machine monocylindrique. On perd de vue que la vapeur en se transvasant rencontre des parois refroidies, de sorte que si elle apporte effectivement avec elle la chaleur des parois du petit cylindre, elle ne peut la garder. Le bénéfice de la machine compound provient d'une diminution dans l'action de la paroi (155).

2. L'application de la méthode de Hirn est traitée avec de nombreux développements dans le *Traité des Machines à vapeur de Sinigaglia*, Traduction De Billy — Paris, Doin, 1890.

152. — *Représentation des échanges au moyen du diagramme entropique.* — Nous avons étudié, au moyen de ce diagramme, l'effet produit par une plaque de métal ou par une certaine quantité d'eau stagnante (**126, 145, 146**), mais en partant d'hypothèses, et par un procédé synthétique ; le même diagramme peut être appliqué au procédé expérimental de Hirn, mais les résultats auxquels il conduit sont naturellement subordonnés aux hypothèses sur lesquelles s'appuie la méthode alsacienne.

Le diagramme entropique du fluide total contenu dans le cylindre pourrait être déduit entièrement de la courbe des pressions (nos 60 et 122), si toutes les opérations du cycle, réelles ou fictives, étaient réversibles. Malheureusement, le diagramme usuel des machines comprend deux transformations non réversibles : le remplissage de l'espace nuisible lorsque celui-ci n'est pas nul ou lorsque la compression n'est pas complète, et l'échappement.

Dans certains cas particuliers, (par exemple espace nuisible nul, ou compression complète ramenant la pression d'admission au moment où l'introduction s'ouvre), on peut cependant tracer approximativement un diagramme entropique fermé. Nous examinerons successivement ces deux cas.

153. — *Espace nuisible nul.* — La courbe d'indicateur présente la forme AA' BC (fig. 104). Soit ν le poids de vapeur admis au cylindre ; supposons que la chute de pression pendant l'introduction soit insensible, et considérons, non la quantité de chaleur fournie au kilogramme d'eau qui serait dans le cylindre, mais celle fournie à l'eau de la chaudière pendant le cycle. La différence entre ces quantités est celle qui correspond au travail $p_1 u$ d'introduction de l'eau dans

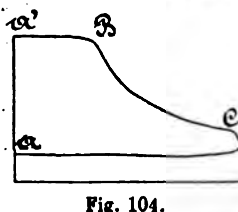


Fig. 104.

la chaudière ; en réalité le cycle s'établit, non avec la quantité de chaleur communiquée par le foyer à l'eau de la chaudière, mais avec une quantité supérieure de Ap_1u (n° 148, 2e période), la différence est, du reste, négligeable. La chaleur fournie pendant le trajet AB, et apportée par la vapeur dans le cylindre, correspond à la transformation KMN

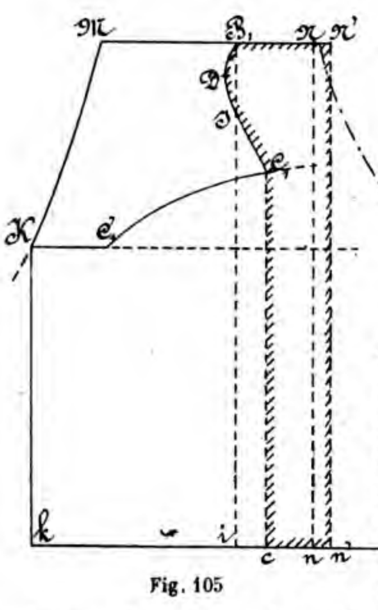


Fig. 105

(fig. 105) de ν kilogrammes de fluide depuis l'état liquide à la température de l'alimentation jusqu'à l'état de vapeur au titre x_1, on a donc :

$$MN = \frac{\nu r_1 x_1}{T_1}$$

mais l'état du fluide qui se trouve dans le cylindre à la fin de l'admission est figuré par le point B_1, qu'on déduit facilement du volume de vapeur présent au diagramme. La chaleur absorbée par la paroi interne pendant l'introduction est donc représentée par le rectangle $B_1 n$.

La transformation réversible BC, peut être traduite soit par le calcul, soit par le procédé graphique (n°s 60, 122) sur le diagramme entropique, et donne la ligne $B_1 C_1$; on a, par conséquent, en prenant les notations du n° 148 :

$$\overset{b}{\underset{a}{R}} = - \text{rect. } B_1\, n$$

$$\overset{c}{\underset{b}{R}} = - B_1\, DI + IC_1 ci$$

Soit toujours E_1 la quantité de chaleur cédée par l'enveloppe pendant tout le parcours du diagramme ; E_1 provient de la condensation, sous la pression p_1, d'un certain poids de vapeur connu ; c'est, par conséquent, la chaleur de vaporisation de cette vapeur, et on peut la représenter par le rectangle Nn' [1]. Puisque la période de compression du cycle est supprimée, on a :

$$\overset{a}{\underset{a}{\Sigma}}\, R = E_1$$

et, par conséquent :

$$\overset{a}{\underset{c}{R}} = \text{surf. } n'\, N'\, B_1\, DC_1\, c$$

1. Nous supposons que l'eau de l'enveloppe est réintroduite dans la chaudière sans abaissement de température.

On voit que la dernière transformation du cycle n'intervient pas dans la recherche de la perte à l'échappement due à l'influence des parois.

L'égalité ci-dessus est purement quantitative, ainsi, il faudrait bien se garder d'en conclure que la bande N*n*' due à l'intervention de l'enveloppe, a pour effet d'augmenter la perte due aux parois pendant l'échappement; si l'enveloppe n'existait pas, la courbe $B_1 C_1$ serait différente, et empiéterait sur le diagramme, le point B_1 serait plus rapproché du point M. D'ailleurs, la bande N*n*' ne représente que la chaleur utilement cédée par l'enveloppe; la dépense effective est, dans la pratique, augmentée de la chaleur du liquide lorsqu'on n'utilise pas l'eau de purge pour réchauffer l'eau d'alimentation.

Pour annuler la chaleur cédée par les parois pendant l'échappement, il faudrait, soit en diminuant la condensation initiale, soit en prolongeant la détente, annuler la surface qui représente cette perte, mais il faut se garder de croire que l'on aurait ainsi annulé l'influence des parois elles-mêmes. Supposons par exemple que, grâce à l'emploi d'une enveloppe plus active et d'une détente plus prolongée, on ait pu modifier le diagramme comme dans la figure 105 *bis* de manière que les surfaces couvertes de hachures soient égales, et que leur somme soit nulle lorsque l'on tient compte de leurs signes : il n'y aura plus de chaleur cédée par les parois pendant l'échappement, mais leur action nuisible s'exercera encore en élevant le titre du mélange qui s'échappe au condenseur, cette élévation de titre provenant, en définitive, de ce que la chaleur enlevée par les parois pendant l'admission rentre dans le cycle, avec une partie de la chaleur de l'enveloppe, à une température inférieure à T_1 [1].

L'état de choses que nous venons d'indiquer ne se réalise jamais; il est théoriquement possible, à la condition que le point C_1 soit amené sur la courbe de saturation du poids de fluide admis dans le cylindre, ou en dehors de cette courbe (vapeur sèche ou surchauffée); car, s'il en est ainsi, les parois du cylindre étant sèches, la quantité de chaleur qu'elles peuvent céder pendant l'échappement est très réduite.

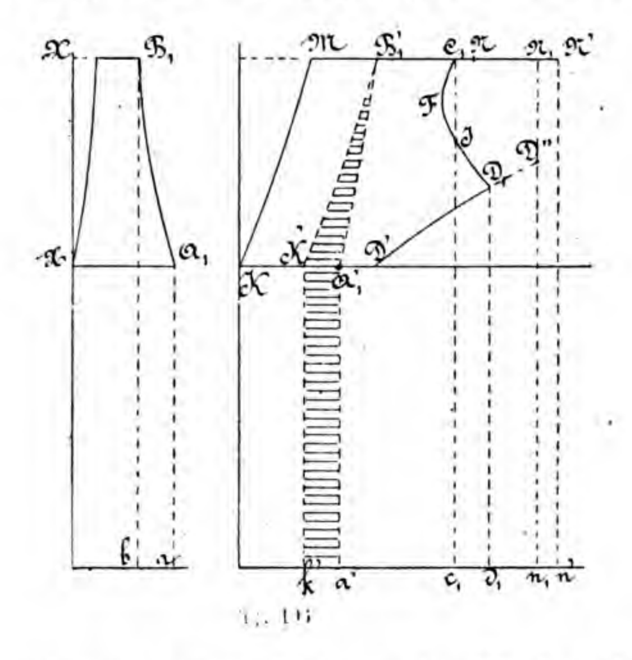
Il est possible aussi qu'au point de vue de l'action des parois, l'eau due à l'altération du titre, qui se forme au sein de toute la masse, se

1. Pour *un même volume* de cylindre recevant intérieurement le même poids de vapeur, la chaleur perdue au réfrigérant à l'exclusion de celle de la paroi, (surf. k K C'_1 C_1 c), augmente lorsque l'on parvient par l'effet d'une enveloppe plus active à relever la courbe de détente. Tout n'est donc pas bénéfice dans les moyens par lesquels on combat l'action de la paroi.



comporte d'une manière bien différente que celle qui est formée par la condensation superficielle ; quoi qu'il en soit, la vapeur à la fin de la détente est toujours loin d'être sèche.

154. — *Compression remplissant l'espace nuisible.* — La vapeur sèche de poids μ, emprisonnée au moment où commence la compression, donne lieu à la transformation $A_1 B_1$ (fig. 106), qui se déduit de la courbe



du diagramme, attendu que l'opération est réversible. Les calculs effectués sur les machines expérimentées jusqu'ici montrent que non seulement la vapeur supposée sèche au début de l'opération cède de la chaleur à la paroi, mais encore qu'elle en cède suffisamment pour abaisser le titre en dessous de l'unité (il peut cependant y avoir des exceptions).

Le diagramme tracé pour le poids μ (que l'on a exagéré à dessein dans la figure) met en évidence le terme

$$\overset{b}{\underset{a}{R}} = -\,\text{surf. } b B_1 A_1 a$$



Le poids ν introduit dans le cylindre s'ajoute au poids μ, qui d'après notre hypothèse, se trouve à la même pression. Nous supposons aussi que la vapeur de l'espace nuisible n'est pas surchauffée. Traçons séparément le diagramme KMN, relatif au poids ν sorti de la chaudière avec le titre x_1 ; et rapportons sur ce diagramme, en prenant KM comme origine, l'entropie du poids μ (il suffit de porter $KA'_1 = XA_1$, $MB'_1 = XB_1$). La chaleur cédée à la paroi pendant la compression sera aussi représentée par la surface marquée de hachures horizontales, et l'entropie du poids $\mu + \nu$, à la fin de l'introduction, s'il n'y avait pas de condensation pendant cette période, serait l'abscisse du point N_1 choisi de telle manière que $NN_1 = MB'_1$.

Or, la vapeur se condense pendant l'introduction, et cède à la paroi sa chaleur de vaporisation, ce qui ramène le point N_1 en C_1, on a donc :

$$\overset{c}{\underset{b}{R}} = - \text{rect. } C_1 n^1$$

La courbe de détente est $C_1 D_1$; l'enveloppe cède la quantité de chaleur $N_1 n'$.

L'équation de condition entre les échanges de chaleur de la vapeur à la paroi, et *vice versa* donnera :

$$\overset{a}{\underset{d}{R}} = k' K' B_1' A_1' a' + N' C_1 F I D_1 d_1$$

L'effet de la compression est aussi de contribuer au réchauffement des parois ; par conséquent, si, d'une part, la chaleur correspondante est perdue par le poids μ, d'autre part, la condensation pendant l'introduction (et par conséquent la ligne $N_1 C_1$) est moindre. Nous ferons donc ici la même observation qu'au numéro précédent relativement à l'interprétation du diagramme ; si la compression n'existait pas, la ligne C_1D_1 serait différente. Il est utile de faire remarquer que la machine à parois neutres avec compression adiabatique ramenant la pression initiale dans l'espace nuisible aurait le diagramme $K'B'_1N_1D''D'$, tandis qu'en tenant compte de l'effet des parois, et malgré une dépense plus grande de E_1 (enveloppe), l'énergie recueillie n'est que $A'_1B'_1C_1D_1D'$.

Les lignes d'égal volume $D''D'$, D_1D', se superposent, parce que, dans les deux machines, nous supposons que le cylindre ait les mêmes dimensions ; cependant, cette coïncidence n'est qu'approximative, car dans la

machine à parois inertes, le titre de la vapeur emprisonnée dans l'espace nuisible est inférieur à l'unité.

155. — Il ne faut voir, dans les diagrammes que nous venons d'exposer, qu'un simple procédé qui permet de représenter les résultats d'une hypothèse ; soit que l'on opère par le calcul ou par les relations graphiques, on trouvera nécessairement qu'en dernière analyse le calcul ou les diagrammes sont d'accord avec les faits, mais cet accord ne justifie pas les hypothèses qui servent de base à la méthode alsacienne, il est une conséquence nécessaire du principe de l'équivalence.

Le diagramme entropique permet encore, en se basant sur les mêmes hypothèses, de montrer assez clairement la raison d'être du système compound. Supposons, en effet, que chacun des cylindres soit sans espace nuisible et à détente complète, et qu'il n'y ait pas de chute de pression entre les deux cylindres ; supposons encore qu'il n'y ait pas d'enveloppes de vapeur, et que le rayonnement soit nul [1].

Dans ces conditions, le diagramme entropique du petit cylindre accuse une perte de chaleur par la paroi pendant l'échappement, et elle est représentée (154) par la surface $c_1 C_1 B_1 Nn$, (fig. 107).

Rien ne nous empêche de supposer que cette quantité de chaleur soit précisément celle qu'absorbe la paroi du grand cylindre pendant l'admission, car le volume du petit cylindre peut toujours être choisi de manière qu'il en soit ainsi.

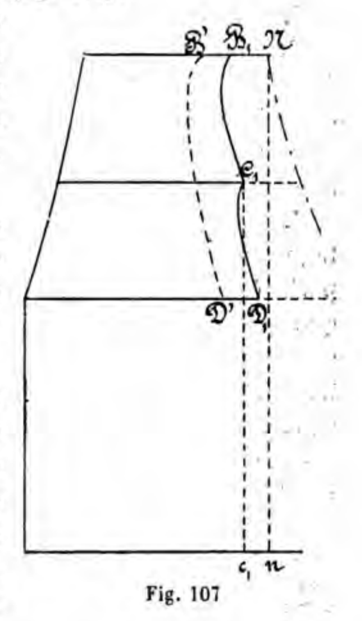


Fig. 107

Le mélange sera donc transvasé sans subir aucune condensation, et la courbe de détente C_1D_1 du grand cylindre sera dans le prolongement de celle du cylindre admetteur.

C'est donc la condensation initiale du petit cylindre (qui règle B_1N) qui détermine en quelque sorte la perte dans la machine totale; une partie de la chaleur perdue dans le cycle du petit cylindre rentre même utilement au cylindre à basse pression, or, la condensation est évidemment plus faible

1. Cette dernière hypothèse tend à invalider la démonstration, car le rayonnement est plus grand dans la machine compound que dans la machine mono-

que dans la machine monocylindrique, attendu que la surface du petit cylindre seule est en jeu, et que la chute de température est réduite. Dans la machine monocylindrique, on aurait, par exemple, la ligne de détente B'D'.

Les choses ne peuvent se passer ainsi en réalité, l'avantage que nous venons de signaler est partiellement compensé (137).

§ VI

Mouvement de la chaleur dans la paroi.

156. — La pénétration de la chaleur à la surface interne de la paroi pendant l'admission, et son passage en sens inverse, dépend de conditions qui paraissent, au premier abord, donner prise à l'analyse mathématique.

M. Grashof [1] a étudié le cas, relativement simple, d'une paroi alternativement en contact, sur sa surface interne, et pendant des temps égaux, avec de la vapeur à deux températures différentes : celles de la chaudière et du condenseur, par exemple ; le même auteur a aussi résolu le cas où la surface extérieure serait en contact avec de la vapeur à température constante, comme dans le cas d'une enveloppe.

M. Kirsch, professeur à Chemnitz, a cherché à se rapprocher davantage des conditions où se trouve le cylindre de la machine à vapeur, en partant d'une hypothèse *à priori* sur l'état de la surface interne, à savoir que celle-ci possède toujours la température de la vapeur avec laquelle elle est en contact. Cette température peut s'exprimer en fonction du temps, d'après le diagramme des pressions, tout au moins lorsqu'on suppose la vapeur saturée, ce qui est le cas ordinaire.

Pour pouvoir effectuer l'intégration, M. Kirsch a exprimé analytiquement la température de la surface interne au moyen de la série de Fou-

cylindrique de même puissance et fonctionnant dans les mêmes conditions de détente, mais la différence est fort petite, attendu que la chaleur perdue par rayonnement se chiffre par 2 ou 3 pour 100 seulement de celle reçue par les machines, au moins dans les conditions ordinaires.

1. Zeitschrift des Vereines D. I. 1881.

rier, qui permet d'exprimer, assez fidèlement pour les besoins des applications, la température de la vapeur.

Mais l'hypothèse de l'égalité de la température entre la vapeur et la paroi, si elle pouvait être adoptée, conduirait, avec les coefficients que fournit la Physique, à un mouvement beaucoup plus intense que celui qu'on observe en réalité, ainsi que nous le verrons par la suite.

La chaleur éprouve, à la surface de séparation des milieux, une résistance qui se traduit par un coefficient spécial (coefficient de conductibilité extérieure), de sorte que, pour traiter le problème dans toute sa généralité, il faudrait tenir compte de ce coefficient pour trouver l'intégrale qui donne la solution; il faudrait aussi supposer que l'état initial de la paroi en tous les points de son épaisseur intervient dans la détermination des constantes d'intégration.

Le problème ainsi posé est très difficile, sinon insoluble; les phénomènes qui se passent réellement au contact de la paroi sèche ou humide suivant les cas, ne sont du reste pas bien définis, de sorte que la théorie de M. Kirsch ne saurait traduire exactement les faits. Toutefois, cette remarquable analyse explique, mieux que ne l'avaient fait toutes les conjectures plus ou moins vagues émises auparavant, et l'action des parois, et celle des enveloppes; elle met en outre en évidence l'effet de la vitesse de rotation des machines sur les phénomènes d'échange [1].

157. — Considérons une paroi métallique homogène, d'une épaisseur assez grande, en contact par la surface A avec de la vapeur à température constante (fig. 108), et, par la surface B, avec l'air extérieur; lorsque le régime est établi, les températures décroissent, de A vers B, suivant une loi représentée par les ordonnées de la droite inclinée. La quantité de chaleur qui traverse la paroi par seconde et par mètre carré de surface est proportionnelle à la différence de

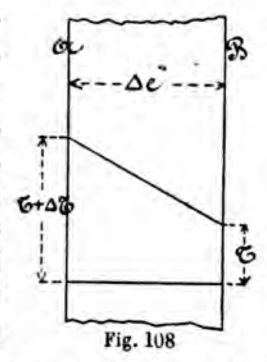


Fig. 108

1. *Dr Kirsch*. Die Bewegung der Waerme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschinen. Leipzig, Arth. Félix 1886. Le lecteur qui, sans recourir au mémoire ci-dessus, voudrait obtenir plus de développements que ne le comporte notre exposé, consultera utilement le résumé très élégant de *M. M. J. Henrotte* et *J. H. A. Yssel de Schepper*, Revue Universelle des Mines, 3e série T. VI pp. 40 à 87, ainsi que le Cours de Machines de M. Haton de la Goupillière T. II. pp. 60 à 74. M. Cotterill expose également d'une manière claire et concise la théorie du mouvement de la chaleur dans les parois.

température ΔT des deux faces et en raison inverse de l'épaisseur Δe de la cloison ; elle est en outre proportionnelle à un coefficient λ qui caractérise la matière ; soit q cette quantité de chaleur, on a :

$$q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta e}$$

le second facteur de q est représenté par l'inclinaison de la droite sur la normale commune aux parois, que nous supposons planes (ou à faible courbure) et parallèles.

L'expression de q s'applique aussi à une tranche infiniment mince de la paroi lorsque les températures des faces, ou l'une d'elles seulement, varient avec le temps τ; dans ce cas, la droite fixe devient une courbe mobile avec le temps ; $\frac{dT}{dx}$, qui est proportionnel à l'intensité du passage de la chaleur à travers un plan quelconque intermédiaire, dépend à la fois du temps τ et de la distance x du plan à l'une des faces.

Prenons deux plans distants de dx, à une profondeur quelconque dans la cloison ; la différence entre les quantités de chaleur qui traversent ces plans entraine une variation de température de la tranche, variation qui est :

$$\frac{dT}{d\tau} d\tau$$

et, en appelant c la chaleur spécifique de la matière, la quantité de chaleur gagnée par la tranche pendant le temps $d\tau$ est pour l'unité de surface et l'épaisseur dx, en appelant δ le poids spécifique du métal :

$$c\,\delta \frac{dT}{d\tau} d\tau \; dx \qquad \text{(I)}.$$

D'autre part, la chaleur qui traverse le plan qui se trouve à la profondeur x est, par unité de temps :

$$\lambda \frac{dT}{dx}$$

et la différence entre cette quantité de chaleur et celle qui sort par la face $x + dx$ est :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx$$

ou, pendant le temps $d\tau$:

(II) $$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx\ d\tau.$$

En égalant les expressions (I) et (II), on obtient :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{c\delta}{\lambda} \frac{dT}{d\tau}$$

posons

$$k = \frac{\lambda}{c\delta}$$

k est constant pour une matière déterminée, et l'équation devient :

(III) $$k \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{dT}{d\tau}$$

Il faut intégrer cette équation, c'est-à-dire trouver la température en fonction du temps et de la position de la couche considérée, et déterminer les constantes de manière à tenir compte des conditions initiales ; en supposant un état de régime atteint, on aura par exemple, pour $x = o$:

$$T = f(\tau)$$

et pour $x = \infty$:

$$T = \text{constante.}$$

Il est avantageux d'introduire, au lieu du temps, l'angle α décrit par la manivelle depuis un instant initial, en admettant, ce qui est est suffisamment vrai ici, que la vitesse angulaire de l'arbre est constante. Si l'on désigne par n le nombre de tours de la manivelle, par minute, on a :

$$\alpha = \frac{2\pi n}{60} \tau$$

et l'équation III devient :

III') $$\frac{60\,k}{2\pi n} \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{dT}{d\alpha}$$

On reconnait qu'elle est vérifiée par l'intégrale suivante, qui donne la température d'une tranche quelconque, à la profondeur x, pour l'angle α de la manivelle.

$$T = B + C\,e^{-mx} \cos(\alpha - mx)$$

m doit avoir une valeur déterminée, que l'on obtient en introduisant dans l'équation différentielle les dérivées partielles qui y figurent :

$$\frac{dT}{d\alpha} = -\,Ce^{-mx} \sin(\alpha - mx)$$

$$\frac{dT}{dx} = - Cme^{-mx} \cos(\alpha - mx) + Cme^{-mx} \sin(\alpha - mx)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 2\, Cm^2e^{-mx} \sin(\alpha - mx)$$

Ces valeurs vérifient l'équation, pourvu que l'on ait :

$$m = \sqrt{\frac{\pi n}{60\, k}}$$

L'intégrale peut aussi s'écrire :

$$T - B = Ce^{-mx} \cos(\alpha - mx)$$

Sous cette forme, $T - B$ représente l'excès positif ou négatif de la température de la tranche sur la température fixe et arbitraire B.

Il s'agit maintenant de déterminer la constante C d'après les conditions de la paroi intérieure ; or, pour $x = o$, on a :

$$T_i - B = C \cos \alpha$$

Lorsque l'on suppose que la température T_i varie suivant la loi sinusoïdale représentée figure 109, on a, en appelant T_0 la température moyenne, et T_M la température maxima :

$$T_i - T_o = (T_M - T_o) \cos \alpha$$

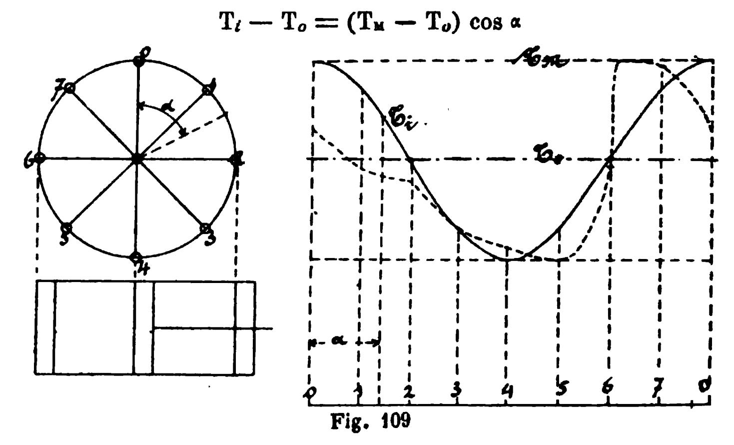


Fig. 109

Nous supposons que l'on ait pris pour l'origine des angles le point pour lequel la manivelle a décrit un angle droit depuis le point mort correspondant à l'admission.

Pour concilier les deux dernières équations, il faut faire :

$$B = T_o$$
$$C = T_M - T_o$$

et l'intégrale devient :

$$\text{(IV)} \qquad T - T_o = (T_M - T_o)\, e^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{60\,k}}} \cos\left(\alpha - x\sqrt{\frac{\pi n}{60\,k}}\right)$$

Lorsque x augmente, le facteur trigonométrique conserve une valeur finie, tandis que l'exponentielle diminue très rapidement dans l'épaisseur de la paroi ; l'excès positif ou négatif de la température de la tranche x, sur la température moyenne de la paroi intérieure exposée à la vapeur, tend par conséquent vers zéro, et un calcul numérique fait reconnaître que, pour la fonte, la température ne varie plus d'une manière sensible à quelques millimètres de la face intérieure [1].

1. La courbe des températures, dont l'ordonnée est $T - T_o$, peut être construite de la manière suivante : supposons d'abord que α soit nul (la face interne est au maximum de température), on calcule, pour différentes tranches équidistantes, I, II,..... la valeur :

$$y = (T - T_o)\, e^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{60\,k}}}$$

ainsi que l'angle

$$\beta = -x\sqrt{\frac{\pi n}{60\,k}}$$

qui augmente proportionnellement à x, et dont il suffit, par conséquent, d'avoir une seule valeur; on construit, à partir des lignes verticales I, II..... (fig. 111) l'angle β, et on porte, sur le côté de cet angle, la valeur y, sur laquelle on décrit une circonférence. La température, lorsque α est nul, est donnée, dans chaque section, par le rayon vecteur vertical de cette circonférence; lorsque la manivelle a tourné de l'angle α, la température est donnée par un rayon vecteur qui suivrait la manivelle dans son mouvement.

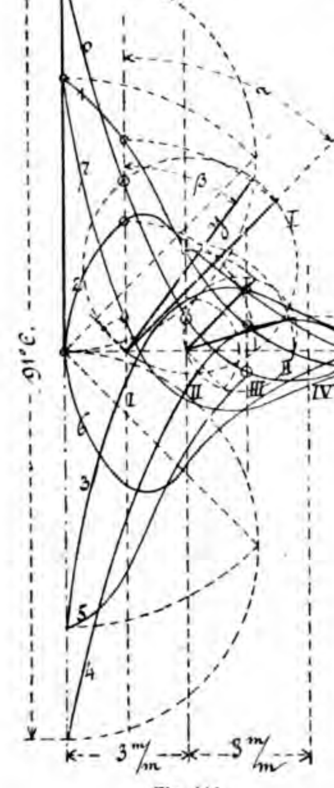


Fig. 111

Les courbes de température sont tracées dans l'hypothèse où le rayonnement serait nul, pour huit positions équidistantes de la manivelle, et jusqu'à la profondeur de 6 millimètres seulement. L'écart maximum du diagramme sinusoïdal de la température de la vapeur est supposé le même que dans la figure 110, et l'on a admis que l'arbre fait 60 révolutions par minute.

158. — Nous avons admis que la paroi intérieure suit, dans ses variations de température, la loi sinusoïdale. Le trait pointillé de la figure **109**, montre quelle serait, pour une machine à condensation dont le diagramme est donné figure 110, la loi des températures déduite de la courbe des pressions, en portant en abscisses les angles α compris depuis la position initiale que nous avons choisie (90° en avant du point mort).

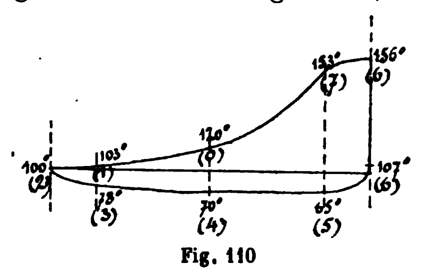


Fig. 110

La paroi du cylindre exposée à la vapeur d'un même côté du piston comprend .

1° Des surfaces constantes et toujours en contact avec le fluide qui évolue (couvercle, face du piston qui regarde la vapeur, canal d'admission) ;

2° Une surface peu importante masquée par le piston lorsque celui-ci est aux extrémités de sa course ;

3° Une surface variable avec α, exposée d'un côté à l'échappement, de l'autre côté à l'admission ; le piston, en se mouvant, fait constamment varier la partie de cette surface exposée au diagramme de gauche ou de droite.

Les surfaces du *type-couvercle* sont les plus simples à considérer ; nous pouvons, avec quelque raison, admettre qu'elles se trouvent dans les conditions de notre hypothèse ; la surface 2°, peu importante, peut être ajoutée à celles du type couvercle.

La surface 3° peut être partagée en anneaux cylindriques de longueur égale ; si nous considérons par exemple celui qui se trouve au milieu de la longueur, il est exposé successivement à toutes les températures suivantes :

Échappement sur la face de droite,
Détente sur la face de gauche,
Échappement sur la face de gauche,
Détente sur la face de droite.

Occupons-nous des surfaces du *type couvercle*, et déterminons la quantité de chaleur qui les traverse à chaque instant ; nous en déduirons ensuite la quantité de chaleur totale qui y pénètre et qui en sort pendant un tour.

Par mètre carré de paroi, et pour l'intervalle de temps $d\tau$, en consi-

dérant comme positive toute quantité de chaleur dQ qui passe de la vapeur à la paroi, on aura :

$$\frac{dQ}{d\tau} d\tau = -\lambda \frac{dT}{dx} d\tau$$

En effet, la chaleur entre dans la paroi lorsque la température décroit de la surface vers l'intérieur de celle-ci, et *vice versa* [1] ; or, on tire de l'équation (IV) en faisant $x = o$ dans la dérivée :

$$\text{(V)} \qquad -\frac{dT}{dx} = \sqrt{\frac{\pi n}{60\,k}}\,(T_M - T_o)\,(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Le flux de chaleur dans un sens ou dans l'autre s'annule avec $\frac{dT}{dx}$, c'est-à-dire lorsque :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \pi + \frac{\pi}{4}$$

cet angle correspond aux positions 1 et 5 de la manivelle lorsque l'on suppose que la rotation a lieu dans le sens des numéros. La chaleur entre dans la paroi depuis la position 1 jusqu'à la position 5, puis elle passe en sens contraire [2]. Le maximum du *flux* et du *reflux* se produit aux points 3 et 7 situés à angle droit sur les précédents.

Ainsi, la restitution de chaleur par la paroi commence 45° après que le maximum de température s'est produit, et le flux vers la vapeur possède sa plus grande intensité lorsque la manivelle a dépassé de 45° la position pour laquelle la température du fluide atteint la valeur moyenne;

1. C'est ici que s'accuse le côté défectueux de la théorie, car, lorsque l'on se place à l'intérieur de la paroi, la température varie d'une manière continue, puisque λ est lui-même continu; mais à l'entrée, il y a un changement de milieu qui nécessiterait une chute brusque de la température entre le fluide et la première couche de métal; on ne peut donc supposer que la face interne prend la température de la vapeur, dans les conditions ordinaires des machines à condensation, au moment où l'échange est maximum. On trouve que la variation de température, pour rester d'accord avec le coefficient d'absorption ou d'émission entre la vapeur et la fonte, doit être incomparablement moindre que ne le suppose la théorie ci-dessus; il est vrai que ce coefficient n'est pas connu avec beaucoup de certitude, mais, même en prenant les valeurs les plus élevées pour la transmission entre la paroi et la vapeur, l'écart des températures extrêmes devrait être considérablement réduit.

2. Les courbes 1 et 5, dans la figure 111, devraient être normales à la paroi, au point de départ; c'est par une erreur de tracé qu'elles ne satisfont pas à cette condition.



la paroi continue à restituer de la chaleur même lorsque la température de la vapeur s'élève.

La quantité de chaleur totale qui forme le flux ou le reflux est :

$$Q = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \lambda \frac{dT}{dx} d\tau$$

équation dans laquelle on prendra la valeur $\frac{dT}{dx}$ de l'équation (V), et où l'on exprimera τ en fonction de α.

On trouve, après intégration :

$$Q = \lambda \sqrt{\frac{2 \times 60}{\pi n k}} (T_M - T_o) \tag{VI}$$

Les valeurs de λ données par M. Kirsch, d'après le petit nombre des expériences connues, correspondent à une tranche d'un millimètre d'épaisseur et un degré centigrade de différence entre les températures des parois ; δ est le poids de la tranche pour 1 m. c. de surface et un millimètre d'épaisseur. Bien que k varie légèrement avec la température, on peut lui donner la valeur moyenne qui correspond à 100° C. et qui est la suivante :

VALEURS DE k

Acier Bessemer (Kirchhoff)	9,9
— puddlé —	14,1
Fer (Kirchhoff)	14,1
Fer (Weber)	15,8
Fer (Angstrœm)	17,2
Fer (Lorenz)	17,91

Pour la fonte, à défaut d'indications, on peut prendre $k = 18$; on a, du reste, pour ce métal :

$c = 0,115$ (Regnault a donné 0,1298)
$\delta = 7,73$ [1]

1. Chiffre plus élevé que celui que l'on adopte (7,2), mais nous citons d'après l'original.

D'où

$$\lambda = c\delta k = 16$$

D'après *Lorenz*, λ vaut, vers 100°:

VALEURS DE λ

Cuivre.	72,3	Etain.	14,2
Bronze.	28,3	Plomb.	7,3
Laiton.	25,4	Antimoine . . .	4,0
Fer	16,3	Bismuth	1,6

L'équation (VI) permet de faire rapidement le calcul numérique de la quantité de chaleur absorbée par la paroi et par mètre carré de surface du type couvercle; soit, par exemple, une machine à condensation fonctionnant entre les températures centigrades de (160° et 40°), et prenons $n = 60$. Il vient:

$$T_M = 160$$
$$T_o = \frac{160 + 40}{2} = 100$$

d'où :

$$Q = 179 \text{ calories.}$$

Supposons que le piston ait $0^m,50$ de diamètre ; sa surface est $0^{m^2},196$ et, en admettant comme minimum que la somme des surfaces du type couvercle soit le double de cette quantité, nous aurons pour cette machine et par tour, mais pour une face seulement:

$$Q = 179 \times 0,196 \times 2 = 70 \text{ calories.}$$

En comptant les deux faces, la quantité de chaleur absorbée et restituée par la paroi serait par heure

$$2 \times 70 \times 3.600 = 505.600 \text{ calories}$$

ce qui équivaut à la chaleur de condensation d'environ 1000 kilogrammes de vapeur à 6 atmosphères absolues.

Ce chiffre, qui représente la somme des quantités condensées pendant une heure, relevées au moment où le diagramme accuse le titre le plus faible, dépasse même la quantité de vapeur totale admise au cylindre pour une machine ayant les dimensions que nous venons d'indiquer et fonctionnant dans des conditions moyennes. Cependant, nous avons négligé les surfaces intérieures des canaux d'admission, et nous n'avons tenu compte que des surfaces du type couvercle. La différence

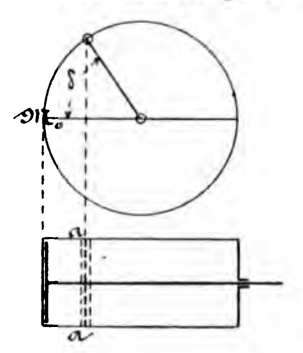
entre le résultat du calcul et la réalité est trop considérable pour être mise sur le compte de la valeur adoptée pour λ ; elle provient, pour une certaine part, de ce que la loi réelle de variation de la température n'est pas la loi sinusoïdale, mais elle est due surtout à ce que la température de la face interne du cylindre n'est pas égale à celle de la vapeur.

Relativement à la première cause signalée, M. Kirsch s'approche de la courbe des températures de la vapeur en représentant celle-ci, non par une sinusoïde, mais par la somme des termes constituant la série de Fourier :

$$A_0 + A_1 \sin \alpha + A_2 \sin 2\alpha + A_3 \sin 3\alpha \ldots$$

Les conclusions du calcul sont cependant peu modifiées.

La surface du *type cylindre* exerce une influence comparable à celle que nous avons étudiée pour les parois du type couvercle ; si nous fixons notre attention sur l'un des anneaux, *a*, composant le pourtour du cylindre (fig. 112), nous voyons qu'il est exposé, lorsque la manivelle effectue une révolution entière à partir du point mort M_0, à toutes les températures successives représentées par les ordonnées de la courbe marquée en trait fort. Nous supposons que l'épaisseur du piston soit négligeable, et que l'anneau change brusquement de face au passage du piston ; la courbe des températures de la face interne en fonction du temps ou de l'angle est différente d'un anneau à l'autre, mais tout compte fait, l'ensemble de la surface se trouve à peu près dans les conditions de l'anneau moyen, et l'on voit que l'excès de sa température sur la température moyenne T_0 change quatre fois de signe pendant un tour de manivelle. M. Kirsch substitue à la température réelle celle qui serait



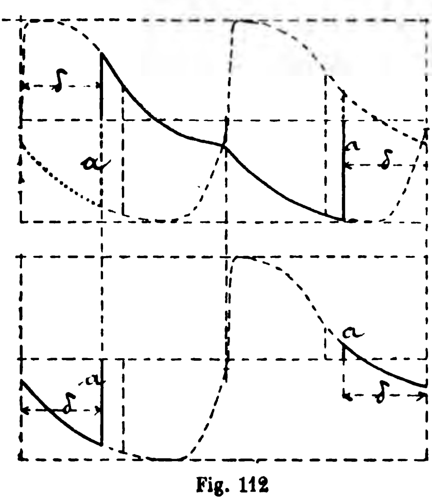


Fig. 112

donnée par :

$$T_i - T_o = -(T_M - T_o) \sin 2\alpha$$

qui, pour :

$$\alpha = o\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3}{2}\pi\ ,\ 2\pi,$$

donne :

$$T_i - T_o = o$$

et pour :

$$\alpha = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

donne :

$$T_i - T_o = \mp (T_M - T_o$$

En intégrant l'équation différentielle (III') de manière à introduire les conditions définies ci-dessus, on démontre que les variations de température se propagent à l'intérieur de la paroi, mais l'amplitude des variations décroit plus rapidement que pour les surfaces du type couvercle. On peut aussi chercher l'expression de flux de chaleur, et l'on constate qu'il change deux fois de sens pendant un tour, c'est-à-dire que la chaleur passe deux fois de la vapeur vers la paroi et deux fois en sens inverse. Dans des conditions ordinaires de pression et de détente, on démontre que l'intensité de l'échange dû à la partie cylindrique est à peu près égale à la moitié de celui qui est produit par les surfaces du type couvercle. Il faut tenir compte, évidemment, en superposant les effets dûs aux deux genres de surfaces, du sens dans lequel ils se produisent à un moment donné.

159. — La restitution de chaleur à la paroi par la vapeur coïncide presqu'entièrement avec la période d'échappement, non seulement pour les surfaces du premier genre, mais encore pour celles du manteau; elle explique donc la perte à l'échappement, mais comme nous l'avons fait remarquer déjà, cette théorie exagère l'influence de la paroi.

L'équation VI donnerait immédiatement le bénéfice que l'on peut réaliser au moyen du système compound, où la chute des températures est partagée entre deux cylindres, dont l'un présente en outre une surface réduite; nous avons établi (155) que la perte due aux parois dans le système compound est réglée par le petit cylindre seul; même en faisant la part de ce qu'il y avait d'approximatif dans le raisonnement, on voit

qu'il reste une marge considérable pour expliquer la diminution de la perte à l'échappement résultant de l'adoption de deux cylindres; pour rendre égaux les flux de chaleur des deux cylindres, on constate que la pression initiale du réservoir devrait être abaissée notablement en dessous de celle qui convient pour réaliser l'égalité des travaux, condition que l'on tient presque toujours à obtenir pour des raisons d'un ordre différent. Il serait du reste dangereux, on le comprendra, de baser sur les formules de la théorie de M. Kirsch des calculs quantitatifs.

160. — ***Influence du rayonnement et des enveloppes.*** — La perte par rayonnement équivaut à un flux uniforme vers l'extérieur, phénomène qui se greffe sur celui de la chaleur participant au mouvement de flux et de reflux. La courbe des températures, dont l'inclinaison en chaque point caractérise le passage de la chaleur à travers une section déterminée, devra traduire le nouvel état de choses.

Soit q la chaleur rayonnée par mètre carré et par seconde, T la température à la profondeur x à un instant donné, lorsqu'il n'y a pas de rayonnement, et T' la température lorsque l'on tient compte de cette perte; on devra avoir :

$$\lambda \frac{dT'}{dx} = \lambda \frac{dT}{dx} + q$$

ou

$$\frac{dT'}{dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{q}{\lambda}$$

Comme la température de la surface intérieure n'a pas changé, on voit que les courbes de température, mobiles d'un instant à l'autre dans tous les cas, aboutiront sur la face intérieure aux mêmes points que précédemment, et pourront être obtenues au moyen des ordonnées que donne l'équation (IV), mais en les rapportant à un axe incliné, $\frac{q}{\lambda}$ mesurant la tangente de cette inclinaison (fig. 113).

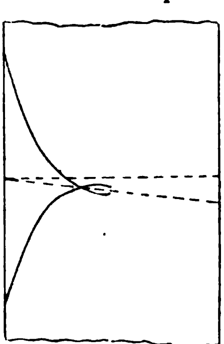


Fig. 113

Le flux de la vapeur vers le métal augmente de la quantité q, appliquée au temps correspondant à une demi-révolution, le reflux du métal vers la vapeur diminue d'autant (1).

1. Le fait n'est qu'approximatif; il est basé sur la supposition que la température de la paroi extérieure ne varie que très peu, sinon la perte q, qui doit

Ce raisonnement est aussi applicable au cas où il existe une enveloppe de vapeur, mais la température extérieure est alors maintenue constante, et le flux de chaleur est dirigé vers l'intérieur ; la température de la paroi extérieure peut être supposée égale à celle de la vapeur de l'enveloppe, et, dans ce cas, être la même que la température *maximum* de l'entrée au cylindre (fig. 114). Cependant, la présence d'un voile d'eau sur la surface condensante de l'enveloppe, c'est-à-dire à l'extérieur du fourreau, peut opposer une résistance assez grande au passage de la chaleur vers l'intérieur et abaisser la température des couches de métal voisines. Les courbes de température dans le cas de l'enveloppe présentent les formes indiquées (fig. 114) ; on ne devra pas perdre de vue que ces courbes sont mobiles, les positions indiquées se rapportent au flux et au reflux. On peut facilement établir que la surface comprise entre deux courbes est proportionnelle à la quantité de chaleur reçue ou donnée par le métal.

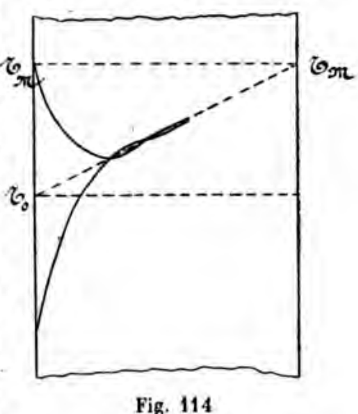


Fig. 114

Lorsque l'on calcule d'après ce que nous venons de voir la quantité de chaleur que l'enveloppe introduit dans le métal en prenant la valeur de λ dont nous avons déjà fait usage, on trouve que la condensation y serait considérable et bien supérieure à ce qu'elle est en réalité ; l'erreur provient en grande partie de ce que la température de la paroi intérieure ne suit pas celle de la vapeur. La température moyenne de paroi à la face intérieure du cylindre est nécessairement plus élevée, si l'on en juge par la condensation que l'on recueille d'ordinaire dans les enveloppes, que la moyenne des températures maximum et minimum du diagramme. Les expériences de M. Donkin rendent ces conjectures assez probables ; très incertaines lorsqu'il s'agit de la température de la couche interne, où le mouvement de la courbe est grand et par conséquent rapide, les expériences thermométriques directes donnent, sans doute avec exactitude, la température moyenne des couches un peu moins rapprochées de l'intérieur du cylindre.

s'écouler à l'extérieur par convection et par rayonnement, serait évidemment variable, mais la loi exponentielle trouvée pour l'état thermique de la paroi justifie entièrement notre manière de voir.

Les températures trouvées par M. Donkin dans l'enveloppe et l'intérieur de la paroi, par exemple dans son expérience 107 [1], expliquent les condensations que l'on trouve dans les enveloppes, et qui s'élèvent rarement au-dessus de 6 % de la quantité de vapeur qui passe au cylindre, il s'agit de machines monocylindriques à longue détente et condensation ayant une vitesse de piston peu supérieure à 2 mètres par seconde.

L'effet de l'enveloppe a longtemps paru inexplicable, à cause du manque apparent de proportion entre le résultat produit et la faible quantité de vapeur condensée.

L'enveloppe diminue le flux de chaleur vers la paroi, et augmente le reflux; son effet est, d'une part, d'augmenter la quantité de chaleur restituée pendant la période motrice, d'autre part de hâter la dessiccation de la surface du cylindre pendant l'échappement même [2]; or, la chaleur de la paroi ne passe à la vapeur que par l'intermédiaire de l'eau qui sert de véhicule, il en résulte que la petite quantité de chaleur qui vient de l'enveloppe exerce un effet indirect considérable.

Telle est du moins l'explication généralement admise et qu'il serait assez difficile de tirer des théories exposées dans ce paragraphe, attendu que l'hypothèse sur laquelle est basée l'intégration des équations est surtout en défaut à partir du moment où la paroi est sèche.

161. — Il resterait de plus à examiner dans quelles circonstances l'eau peut ne pas être entièrement revaporisée à la fin de l'échappement; si tel était le cas, elle pourrait facilement s'accumuler dans les cavités qui existent dans certaines conformations de cylindres: un calcul plus ou moins analogue à celui que nous avons fait pour la paroi s'appliquerait à cette eau, qui deviendrait, non plus l'agent de l'échange comme le suppose la théorie alsacienne, mais le siège même de la déperdition du calorique [3].

1. Minutes of Proceedings of C. E., mémoire cité (fig. 6., pl. VI). Dans les machines compound à deux cylindres, l'ensemble des condensations dans les deux enveloppes s'élève parfois jusqu'à 10 et même 12 °/. de la vapeur qui passe dans la machine.

2. On trouvera des renseignements fort complets sur l'enveloppe de vapeur dans le compte rendu de la Commission formée au sein de l'*Institution of Mechanical Engineers* pour l'étude expérimentale de cette question. Le premier rapport a été publié en octobre 1889; le second, en octobre 1892, dans les *Minutes of Proceedings* de cette Société. Voir aussi Engineering, 1892, 2e sem. pp. 556, 737, 766, 797.

3. Willans a observé directement l'effet nuisible dû à l'accumulation de l'eau dans une cavité du cylindre. — Engineering 1890, 1er sem., p. 556.



La grande difficulté de ce genre d'analyse provient du rôle que l'on doit attribuer au liquide qui se trouve dans le cylindre ; peut-il simplement être considéré comme prenant part à l'évolution générale au même titre que l'humidité qui modifie le titre dans la détente ou la compression, ou bien, par suite d'une différence de température notable avec le fluide qui participe à l'évolution, l'eau des parois fonctionne-t-elle, pendant une partie plus ou moins grande du cycle, à peu près comme un corps solide ? Les conséquences des deux hypothèses peuvent être très différentes, et il parait difficile de trancher la question. La valeur de λ est environ 100 fois moins grande pour l'eau que pour la fonte, et comme on a :

$$k = \frac{\lambda}{c\delta}$$

il vient pour les deux corps :

	λ	k	$\frac{\lambda}{\sqrt{k}}$
Fonte. . .	16	18	3,76
Eau. . . .	0,16	0,16	0,40

Toutes choses égales, en admettant qu'une couche d'eau en contact avec la vapeur prenne superficiellement la température de celle-ci, l'importance du flux est, d'après l'équation (VI) proportionnelle à la troisième colonne du tableau, et la variation de température à l'intérieur de la masse d'eau est, d'après l'équation (V) qui s'applique à la première couche, environ 10 fois plus forte que pour la fonte ; ces chiffres mettraient en évidence l'inaptitude de l'eau à prendre part à l'évolution du fluide actif, comme le suppose, par exemple, la méthode alsacienne dans le calcul de la chaleur interne en chaque point du diagramme [1].

162. — *Influence de la vitesse de rotation sur l'échange.* — En réunissant les surfaces du type couvercle et celle du cylindre proprement dit,

1. On peut objecter, il est vrai, que l'eau se trouve dans un état de grande division et de violente agitation; mais tel n'est pas toujours le cas. M. Cotterill a développé d'autres considérations du plus haut intérêt à propos de la question qui nous occupe.
Voir aussi le nouveau mémoire de M. Donkin, *Minutes of P. of C. E.* 1892-93.

on démontre, dans l'hypothèse de M. Kirsch, que le flux total est proportionnel par unité de surface, à :

$$\frac{\lambda}{\sqrt{n\,k}}$$

et à une série de constantes ; d'ailleurs comme les parois sont toujours en fonte, λ et k ont des valeurs déterminées et constantes lorsque l'on passe d'un cylindre à l'autre ; mais les surfaces du type couvercle ont une influence spécifique à peu près double, au point de vue de l'échange, de celle du manteau ; en appelant Σ et Σ' ces surfaces, Σ ne se rapportant qu'à l'une des extrémités du cylindre, la valeur totale de l'échange serait exprimée, par tour, par la fonction :

$$Q = M \frac{2\,\Sigma + \frac{1}{2}\,\Sigma'}{\sqrt{n}}$$

M étant un facteur constant.

Lorsque l'on compare des cylindres semblables, c'est-à-dire dans lesquels le rapport de la longueur au diamètre est constant, si on appelle R le rapport des volumes, les surfaces varient comme $R^{\frac{2}{3}}$, et, pour la même puissance, les nombres de tours varient en raison inverse de R, les conditions de pression de détente et de condensation étant identiques; ainsi pour une machine dont le cylindre serait R fois plus grand que celui du moteur considéré, et qui développerait la même puissance, l'échange serait :

$$Q_1 = M \frac{\left(2\,\Sigma + \frac{1}{2}\,\Sigma'\right) R^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{n}{R}}}$$

ou :

$$Q_1 = Q\,R^{\frac{7}{6}}$$

Ainsi, l'échange augmente lentement, pour la même puissance développée, lorsque le volume du cylindre augmente, ou *vice versa* ; mais pour obtenir l'échange en fonction du temps, les quantités Q et Q_1 doi-

vent être multipliées par les nombres de tours proportionnels des machines, c'est-à-dire par n et par $\frac{n}{R}$; en résumé, on aura :

$$\frac{Q_1 \frac{n}{R}}{Q n} = R^{\frac{1}{6}}$$

Lorsque l'on diminue les dimensions des cylindres, et que, pour obtenir la même puissance, on fait varier en sens inverse le nombre de tours par minute, l'échange diminue comme la racine sixième du nombre de tours ; la vitesse permet donc de combattre l'action de paroi, mais dans une mesure très faible [1].

163.— Lorsque le nombre de tours par minute figure parmi les données d'établissement d'un moteur, le volume du cylindre s'en déduit ; en appelant d le diamètre, et l la course du piston, dimensions qui déterminent les valeurs Σ et Σ' des surfaces participant aux échanges, on peut chercher, pour le volume donné, le rapport $\frac{l}{d}$ qui réduit l'échange au minimum ; on trouve :

$$\frac{l}{d} = 4$$

Il y aurait des difficultés à adopter d'aussi longues courses, mais la fonction des surfaces ne varie que très lentement dans une zone étendue de valeurs $\frac{l}{d}$; on reconnaît, par exemple, qu'elle augmente de 5,5 pour cent lorsqu'on descend à :

$$\frac{l}{d} = 2$$

valeur assez souvent admise pour les machines monocylindriques, ou

1. Les expériences de Willans ont montré que l'influence de la vitesse sur l'action de la paroi est à peu près celle qu'indique cette théorie; lorsque la vitesse était triplée ou quadruplée, on a généralement trouvé, sur une *même machine*, que la condensation à l'admission était réduite, par tour, dans le rapport de la racine carrée de cette augmentation. Pour les machines compound, la somme des condensations aux deux cylindres paraît suivre très approximativement la même loi. Les machines Willans n'ont pas d'enveloppes de vapeur.

pour les petits cylindres des machines compound (il s'agit de machines horizontales).

Si l'on tient compte, du reste, de ce qu'il est difficile de munir les couvercles, et surtout le fond d'avant, d'enveloppes de vapeur bien disposées, on voit qu'il y a intérêt, abstraction faite de toute autre considération, à allonger la course des machines à vapeur.

164. — Le flux constant dû à l'enveloppe ne dépend (160) que de la surface et de la température moyenne de l'intérieur du cylindre, relativement à celle de la vapeur de l'enveloppe; lorsque, pour une même puissance, on augmente le nombre de tours par minute dans un certain rapport R, on réduit toutes les surfaces, et par conséquent l'action de l'enveloppe, dans le rapport $R^{\frac{2}{3}}$. Cette considération achève d'expliquer pourquoi, malgré ce qui a été dit au numéro 162, les petites machines à rotation rapide ne sont pas plus économiques que les grands moteurs.

165. — Enfin, M. Kirsch a signalé aussi l'influence que la position des parois peut exercer sur les phénomènes d'échange; les surfaces verticales se débarrassent facilement de l'eau qui les couvre, et qui ruisselle vers le bas: leur dessiccation s'opère donc beaucoup plus vite; l'eau qui se ramasse au fond du cylindre s'y trouve sous une forme plus compacte, ce qui est de nature à réduire l'échange; il peut même arriver que l'eau soit balayée mécaniquement au condenseur, ce qui met fin à son action nuisible. D'après une expérience de M. Kirsch, la quantité d'eau qui peut adhérer à une surface verticale de tôle unie est de 20 grammes par mètre carré.

166. — *L'influence des parois limite le rapport de détente.* — La plupart des expériences entreprises à charge variable sur une même machine ont démontré que la consommation de chaleur du cycle, par cheval-heure, diminue lorsque l'introduction augmente, et atteint son minimun pour une détente qui, dans les machines à condensation, est encore loin d'être complète. Il y a donc, pour chaque machine, un rapport de détente plus avantageux que les autres: il dépend de la pression initiale, avec laquelle il augmente. Lorsqu'on augmente la pression, et que l'on adopte l'introduction la plus avantageuse qui correspond à cette pression, on trouve des consommations de plus en plus réduites, mais le

maximum d'économie n'augmente pas indéfiniment, et l'on ne trouve aucun avantage, pour un type donné (monocylindrique, par exemple), à dépasser une certaine pression, car la consommation finit par augmenter.

Ces faits seraient inexpliquables si l'on supposait les parois inertes, comme nous l'avons fait dans le § I de ce chapitre; ils sont dus au phénomène parasite de l'échange, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte.

Lorsque la détente est très prolongée, la perte par detente incomplète est faible, la perte due à la paroi a une certaine valeur, tout à fait comparable, sinon plus grande, à ce qu'elle serait pour une machine à détente moins complète. Pour une machine donnée, la perte de paroi est donc à peu près constante lorsque l'on augmente l'introduction, mais sa valeur diminue relativement au travail accompli, tandis que la perte due à la détente incomplète augmente relativement au même travail. C'est la compensation particulière qui s'établit entre ces deux actions qui place le maximum de rendement aux détentes modérées.

Plus l'action de la paroi est réduite par l'enveloppe de vapeur, plus la détente peut être prolongée; cette conclusion est vraie aussi pour les machines compound. L'expérience vérifie absolument cette déduction.

La limitation de l'économie par l'augmentation de la pression s'explique d'une manière analogue, mais ici plusieurs circontances concourent simultanément à combattre l'effet de l'élévation de la température initiale; d'une part, l'action de paroi devient de plus en plus grande pour un poids donné de vapeur consommée; d'autre part, la supériorité théorique du cycle est de moins en moins grande (1).

Si l'on pouvait chiffrer avec certitude la perte due aux parois, on pourrait trouver analytiquement, dans chaque cas, l'introduction qui procure la plus grande économie (2). Le résultat dépend de la combinaison de deux influences qui agissent en sens contraire, et l'on conçoit que les solutions peuvent différer beaucoup d'une machine à l'autre, suivant la disposition plus ou moins heureuse de l'enveloppe, la grandeur de l'espace nuisible, le degré de compression adopté, etc.

1. Nous ne devons pas perdre de vue que la période d'échauffement du liquide éloigne le cycle de celui de Carnot.

2. Le diagramme entropique peut faciliter beaucoup cette recherche, que nous ne ferons pas ici.



Jusqu'ici, on a résolu le problème expérimentalement, mais, comme dans toute question dont la solution dépend d'un maximum, on peut heureusement s'écarter beaucoup de la valeur rigoureuse qui donnerait le meilleur rendement sans altérer le résultat d'une manière notable.

Pour la machine sans condensation, où l'influence de paroi est plus faible, on s'attache assez généralement à terminer le diagramme par une pression motrice qui équilibre les résistances passives, c'est-à-dire que la détente est poussée aussi loin que possible ([1]). Pour les machines à condensation, au contraire, on trouve entre la pratique courante des constructeurs de grandes différences, qui s'expliquent par les considérations citées plus haut.

En général, dans les machines fixes, la détente est poussée beaucoup plus loin que dans les machines marines, sans aboutir à des consommations notablement plus avantageuses ; ce fait est motivé par des considérations d'ordre pratique : lorsque l'on établit une machine neuve d'usine, il est prudent de calculer ses dimensions largement, en vue de surcharges éventuelles dues au développement de l'industrie qu'elle active; à bord des navires, au contraire, le moteur reçoit toute sa charge dès le début; l'emplacement des appareils et leur poids est du reste parfaitement déterminé, et une augmentation de puissance serait rendue impossible à cause des générateurs.

1. Des expériences fort complètes, ayant pour but principal d'élucider la question du meilleur rapport de détente à adopter, ont été faites aux usines du Creuzot. Rapport de M. *Delafond*, Annales des Mines, 1884, t. VI. Voici un sommaire des résultats obtenus : (nous n'indiquons que les introductions donnant la consommation la plus réduite par cheval indiqué).

	PRESSIONS EFFECTIVES MOYENNES A LA CHAUDIÈRE				
	7 k., 75	6.25	4.50	3.50	2.50
A condensation, sans enveloppe...	0.09 — 9.58	0.14 — 8.90	0.155—8.08	0.150—8.40	0.182—9.15
— avec enveloppe...	0.067—7.38	0.115—7.55	0.155—7.76	0.143—8.13	0.190—8.85
Sans condensation, sans enveloppe.	0.17—12	. . . . .	. . . . .	0.37—12.17	
— avec enveloppe.	0.[illegible]0—10.74	. . . . .	. . . . .	0.34—12.64	

OBSERVATION : Le premier nombre est l'introduction, le second est la consommation en kilogrammes par cheval-heure indiqué).

167. — *Substances isolantes.* — Dès l'année 1876, M. Lissignol avait proposé de diminuer l'influence des parois en rendant leurs surfaces intérieures impénétrables à la chaleur au moyen d'un revêtement en plomb ou en porcelaine s'étendant aux pièces non exposées au frottement du piston, c'est-à-dire à toutes les surfaces que, dans l'exposé de la théorie de M. *Kirsch*, nous avons rapportées au type couvercle ; plus récemment, M. *Thurston* a repris la même idée [1]. Il n'existe pas à notre connaissance d'expériences *concluantes* sur l'application de ces enduits isolants.

§ VII

Utilisation de la chaleur produite dans le foyer.

168. — La dépense de chaleur désignée par Q_1 dans le cours de ce chapitre n'est pas celle que la combustion rend disponible, mais celle que les parois de la chaudière absorbent pour l'échauffement de l'eau et sa transformation en vapeur. Ces quantités ne seraient équivalentes que si toute la chaleur développée par la combustion était employée utilement, c'est-à-dire si les gaz qui lui servent de véhicule pouvaient être refroidis jusqu'à la température ambiante.

On peut imaginer, à la rigueur, que ces gaz sont, moyennant l'emploi d'un réchauffeur parfait, refroidis jusqu'à la température T_2, qui est celle de l'eau d'alimentation puisée au trop plein du condenseur ; les pertes de l'appareil évaporatoire seraient, en ce cas, fort réduites, elles comprendraient surtout celles que l'on peut étudier indépendamment du cycle (rayonnement, combustion incomplète).

La question est en réalité plus complexe, car il ne suffit pas que la chaleur développée entre en jeu dans le cycle, nous savons que la température à laquelle elle intervient exerce sur le rendement une grande influence.

Nous devons d'abord écarter, au sujet de l'emploi de la chaleur produite par la combustion, un mode d'interprétation qui conduirait,

1. L'*Industrie*, 13 mars 1892. (Dwelshauvers-Dery).

ainsi que l'a montré M. Zeuner, à déprécier à tort la machine à vapeur ; c'est ce qui sera fait au numéro suivant.

169. — *Transmission de la chaleur à la chaudière.* — Le combustible, dont la nature est le poids sont déterminés, est supposé complètement brûlé dans le foyer ; la quantité de chaleur qu'il dégage en s'unissant avec l'air est employée à augmenter la chaleur interne des gaz en présence, et à effectuer leur travail de dilatation sous la pression atmosphérique.

La combustion n'est pas un phénomène réversible, mais le mélange gazeux qui en résulte peut être considéré comme un seul corps (ch. III et IV), qui, lorsque le combustible est du coke, possède une chaleur spécifique moyenne à pression constante égale à 0,24 [1], la proportion d'air en excès ne fait pas varier sensiblement cette valeur.

Soient T_a la température ambiante absolue ;

T_o la température la plus élevée après la combustion.

L'état final du mélange gazeux est le même que si l'on avait communiqué aux corps qui le composent, et sous pression constante, la chaleur développée par la combinaison ; cette opération est représentée par la ligne AB de la figure 115, et la chaleur communiquée équivaut à la surface OABb.

Fig. 115

Lorsque, pour le même poids de combustible, on admet un poids d'air de plus en plus grand, la quantité de chaleur développée reste la même, mais la transformation est représentée par AB', dont les abscisses, toutes choses restant égales, sont proportionnelles au poids du mélange qui subit l'échauffement. La température finale est donc abaissée.

On sait que la houille [2] est généralement brûlée avec un volume d'air deux fois plus grand que celui qui serait rigoureusement nécessaire pour la combustion, mais, même

1. Il y aurait évidemment lieu, pour calculer exactement, de tenir compte de l'élévation de la chaleur spécifique avec la température (chap. IV), mais, la valeur particulière de C n'altère pas le raisonnement dans son ensemble.
2. Par suite de la difficulté que l'on éprouve à bien mélanger le combustible et le comburant.

dans ces conditions, la température T_o du foyer est encore très élevée, et bien supérieure à celle de la vapeur aux pressions les plus grandes que l'on admette.

Il semble que, pour élever le rendement du moteur, la température T_1 du cycle de la vapeur devrait être égale à T_o. Si l'on fait abstraction des difficultés d'ordre pratique, on est tenté de considérer la machine à vapeur comme un appareil défectueux, attendu que la chaleur y est reçue à une température de beaucoup inférieure à celle du foyer. Mais, il ne faut pas perdre de vue que si les gaz maintenaient la chaudière à la température T_o, ils s'échapperaient à la cheminée à cette même température, attendu que la chaleur ne pourrait passer des gaz déjà refroidis à un corps maintenu plus chaud ; en élevant la température supérieure du cycle à T_o, on lui donnerait un rendement très élevé, mais il ne recevrait pas de chaleur, celle-ci serait entièrement emportée par les gaz.

170. — Il est vrai que l'on pourrait disposer, sur le parcours des gaz, une série de réchauffeurs à température graduellement décroissante à partir de la chaudière, mais nous ne devons pas perdre de vue que la *quatrième opération* du cycle de Carnot ramène le corps travailleur à l'état initial, ce qui rend le réchauffeur théoriquement inutile.

Si l'on veut, pour le chauffage de la chaudière, utiliser la zone des températures élevées, il faut renoncer au cycle de Carnot ; le cycle réel a l'avantage précédemment signalé (120, note), de rendre utilisable la chaleur contenue dans les gaz déjà refroidis à une température insuffisante pour la vaporisation.

Or, rien n'empêche de supposer que la chaudière soit formée d'une série de réchauffeurs possédant toutes les températures décroissantes du mélange gazeux qui se refroidit, et parcourus en sens contraire par l'eau d'alimentation. On peut voir, dans ce cas, que le diagramme entropique de l'eau se superpose à celui des gaz ; il n'y aurait donc pas vaporisation, même dans le réchauffeur le plus élevé de la série. La vaporisation n'aurait lieu que par la détente adiabatique BD (fig. 115), de l'eau à température T_o admise dans le cylindre, et la condensation DA ramènerait le mélange à l'état liquide et à la température du dernier réchauffeur.

Le rendement obtenu par le procédé idéal que nous venons d'indiquer est celui que l'on obtiendrait en supposant, comme M. Zeuner l'a

fait [1], que la chaleur est employée à échauffer une série de petites chaudières indépendantes, dont la température décroît comme celle des gaz, et qui alimentent, chacune, un moteur séparé fonctionnant suivant un cycle de Carnot. La succession de ces cycles infiniment petits couvrirait exactement la surface BDA, qui doit donc être considérée comme représentant le maximum théorique de la chaleur pouvant être convertie en travail.

En désignant par P le poids du mélange gazeux, on a :

$$OABb = PC\,(T_o - T_a)$$

$$\overline{AD} = PC\int_{T_a}^{T_o}\frac{dT}{T} = PC\; l_n\,\frac{T_o}{T_a}$$

$$OADb = \overline{AD} \times T_a = PC\,T_a\; l_n\,\frac{T_o}{T_a}$$

donc :

$$ABD = PC\left(T_o - T_a - T_a\; l_n\,\frac{T_o}{T_a}\right)$$

On peut admettre que le kilogramme de houille de composition moyenne dégage 7.500 calories, et l'on a alors, théoriquement, en prenant $T_a = 288°$ et en supposant que l'on emploie 16 kilogrammes d'air pour la combustion :

$$ABD = 4.500 \text{ calories.}$$

Quel que soit alors le perfectionnement apporté à la machine et à la chaudière, ce chiffre de 4.500 calories ne peut être dépassé ; de plus, il est loin d'être atteint avec le seul système admissible en pratique pour le chauffage, et qui consiste à faire passer la chaleur à la chaudière à une température modérée.

171. — Dans le système de chauffage réel, les gaz circulent le long des parois de la chaudière, auxquelles ils cèdent la chaleur en se refroidissant sous la pression atmosphérique ; cette opération est représentée par la ligne BA, figure 115, mais elle ne peut s'étendre en dessous de la température du corps à chauffer ; soit T' cette température, la quantité de chaleur cédée à la paroi est exprimée par la surface BC*cb*, inférieure

1. Zeuner, 2e édition, p. 470.

à la chaleur de combustion de toute la quantité CAO*c*, qui est perdue à la cheminée.

On voit immédiatement que la perte à la cheminée est d'autant plus réduite que la combustion se fait avec un moindre excès d'air, car la surface CAO*c* est plus petite que C'AO*c*'.

Pour la question qui nous occupe, il est plus commode de donner aux surfaces qui représentent les quantités de chaleur la forme rectangulaire, comme l'a fait *M. Hermann* [1], mais en général, les lignes du tracé ne pouvant être considérées comme des transformations, elles auront le caractère de simples constructions géométriques.

Représentons par le rectangle OA, figure 116, la quantité de chaleur

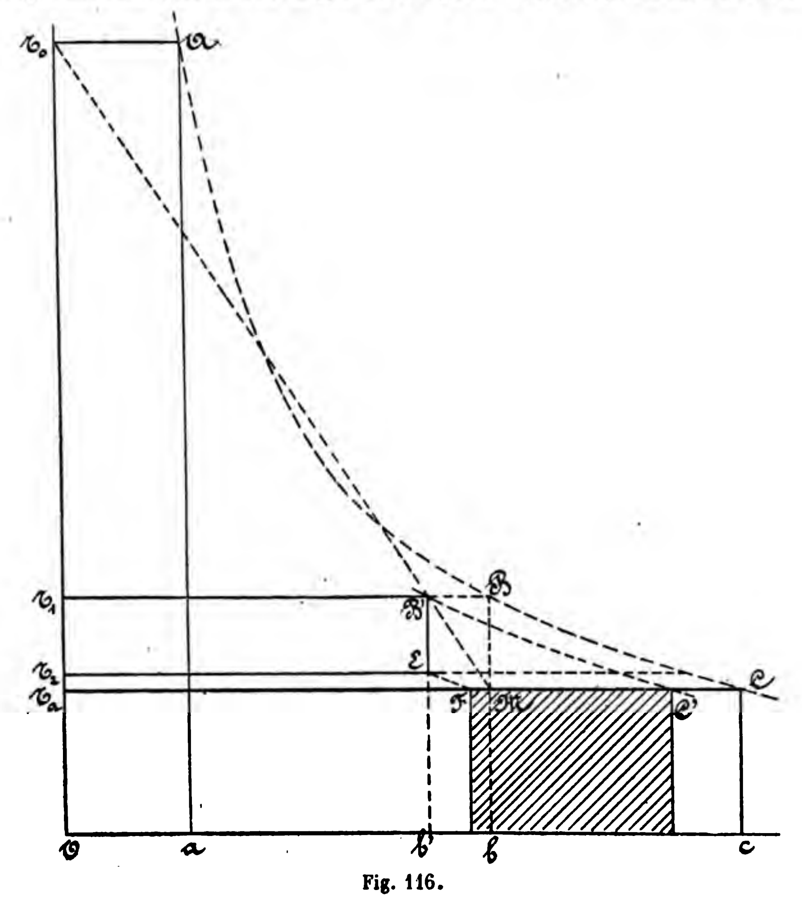


Fig. 116.

1. *Gustav Hermann.* — Die graphische Behandlung der mechanischen

développée par la combustion, c'est-à-dire la surface qui, dans la figure 115, était représentée par OABb, et faisons passer, par le point A, l'hyperbole équilatère AC. Tous les rectangles construits sur les coordonnées d'un point de l'hyperbole étant équivalents, la quantité de chaleur engendrée est aussi représentée par les rectangles OB ou OC, dont la surface est :

$$PC\,(T_o - T_a)$$

Considérons d'abord le cas limite où les gaz quitteraient la chaudière à la température T_1 de la vapeur saturée ; la chaleur emportée à la cheminée sera :

$$PC\,(T_1 - T_a)$$

la valeur relative de cette perte est :

$$\frac{T_1 - T_a}{T_o - T_a}$$

En joignant les points M et T_o, on partage la ligne T_1 B en deux segments, et il est facile de voir, par la considération des triangles semblables B' B M, T_a T_o M, que la chaleur perdue à la cheminée est représentée par le rectangle B'b, ou, si l'on mène par le point B' l'hyperbole équilatère B' C', par le rectangle C' c.

La chaleur absorbée par la chaudière est donc réduite au rectangle OB', qui, dans l'hypothèse où la machine fonctionne suivant le cycle de Carnot, représente la chaleur Q_1 communiquée pendant la première opération du cycle.

La chaleur transformée en travail est représentée par le rectangle T_1E, et la chaleur Q_2, abandonnée au réfrigérant, est le rectangle OE, ou le rectangle OF, obtenu en menant l'arc d'hyperbole équilatère EF.

Ce procédé présente l'avantage de donner toutes les quantités de chaleur qui jouent un rôle dans le problème, sous la forme de rectangles ayant la même hauteur T_a, et de les rendre plus facilement com-

Waerme theorie. — Zeitschrift des V. D. I. — 1884. Mémoire réimprimé, Berlin Springer, 1885.

Voir aussi, pour ce qui concerne l'emploi de la chaleur fournie à la machine seulement, l'article intitulé : « *Heat distribution in steam Engines,* » *Engineering,* 1892, 2e sem. p. 658; cet article donne, pour une machine de laboratoire, fonctionnant à simple, double, ou triple expansion, avec ou sans enveloppes, c'est-à-dire dans six hypothèses, la décomposition de l'unité de chaleur fournie par la chaudière.

parables. La quantité de chaleur transformée en travail est représentée par la surface ombrée, évidemment équivalente au rectangle T_2 B'.

La figure 117 donne le tracé pour la machine réelle, c'est-à-dire dans

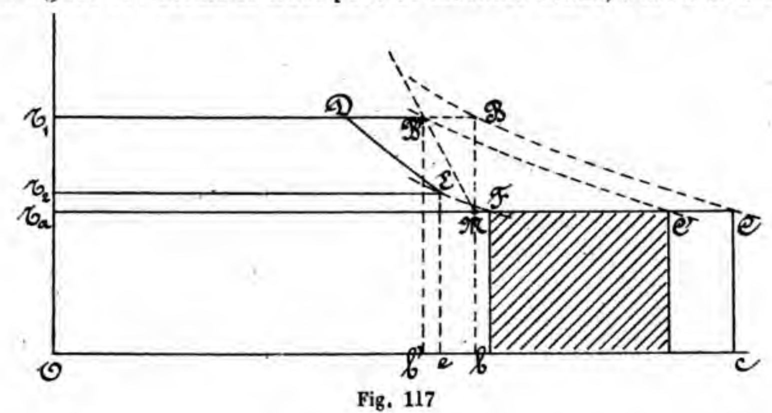


Fig. 117

laquelle existe la période ED d'échauffement du liquide (1) ; le poids du fluide travailleur doit être choisi de telle manière que la surface OT_1 D E *e* soit égale au rectangle OB', qui est le même que dans la figure 116. La chaleur perdue à la cheminée est la même que dans le cas précédent, mais la perte au réfrigérant (rectangle OE ou OF) est plus grande.

Lorsque l'on emploie un réchauffeur théoriquement parfait, les gaz sont abandonnés à la cheminée à la température T_2 (fig. 118) ; cette

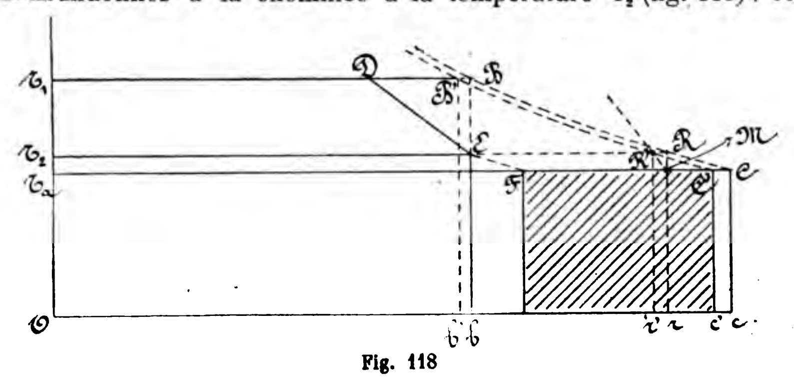


Fig. 118

1. Le cycle entropique du moteur, D T_1 T_2 E, est disposé d'une manière inverse de celle que nous avons habituellement employée, ce qui n'a pas d'importance, pourvu que l'on n'attribue pas aux lignes le caractère de transformations, et que l'on se borne à opérer sur des surfaces. Il est évident aussi que dans le passage de la chaleur au corps à échauffer, le *postulatum de Clausius* doit toujours être respecté.

donnée permet de trouver, au moyen d'une construction analogue à celle qui a été employée dans les deux premiers cas, la quantité de chaleur R'*r* (ou C'*c*, ou B' *b*) emportée par les gaz. La quantité de chaleur utilement absorbée, tant par le réchauffeur que par la chaudière, est donc représentée par le rectangle OB', dont on trouve la surface équivalente dans la figure DT_1 O *b*E.

La quantité de chaleur abandonnée au condenseur est plus grande que dans chacun des deux cas précédents, mais la perte à la cheminée est moindre, et la quantité de travail obtenu est comparable à celle que donne le cycle de Carnot.

Enfin, la figure 119 est établie dans l'hypothèse, plus conforme à la

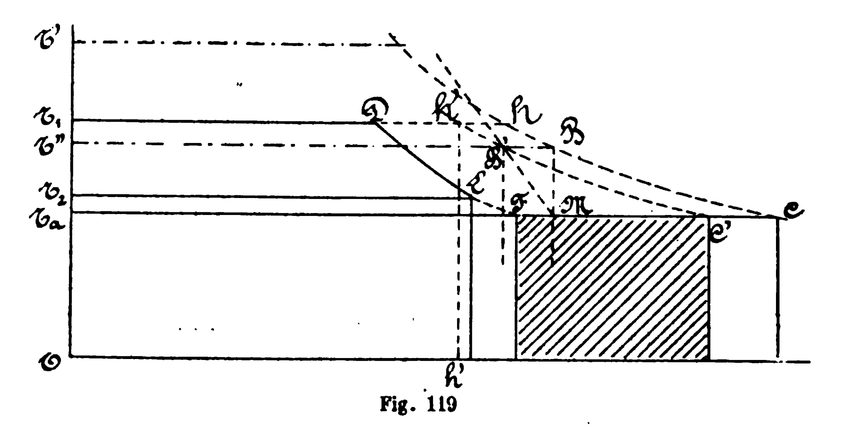


Fig. 119

réalité, où les gaz quittent le réchauffeur à une température T'', supérieure de 100° à celle de l'eau d'alimentation ; d'ailleurs les gaz quittent le corps principal à la température T', notablement supérieure à T_1 ; la température T' ne joue aucun rôle dans le problème théorique, ce qui se comprend du reste, puisque si elle est trop élevée, une partie du réchauffeur peut jouer le rôle de vaporisateur, mais il faudrait alors que les températures fussent étagées dans le réchauffeur.

Quoiqu'il en soit, la quantité de chaleur utilement absorbée tant par la chaudière que par le réchauffeur est donnée par le rectangle OB' ou O H', et le diagramme donne, comme dans les cas précédents, ce qui est converti en travail.

172. — En supposant, ce qui est vraisemblable lorsque l'on tient compte de la chaleur spécifique moyenne aux températures élevées, que

la température T_0 soit 1600° (1327° C.), et que les gaz abandonnent le réchauffeur à 423° (150° C.), prenant de plus :

$$T_1 = 473 \ (200° \ C.)$$

et :

$$T_2 = 323 \ (50° \ C.)$$

on trouve, au moyen d'un calcul graphique analogue à ceux qui ont été exposés, que la chaleur développée par la combustion se répartit, pour la machine réelle, de la manière suivante :

Chaleur transformée en travail.	$\alpha = 0.27$
— abandonnée au condenseur.	$\beta = 0.63$
— emportée par le gaz.	$\gamma = 0.10$
	1.00

Les machines à triple expansion les plus parfaites consomment, par cheval indiqué et par heure, avec des générateurs établis dans de très bonnes conditions, 650 grammes de charbon [1], ce qui équivaut à 4875 calories; en employant les chiffres ci-dessus, nous devrions retrouver, sous forme de travail :

$$4.875 \times 0.27 \times E = 560.000 \text{ kgm. environ.}$$

1. Il s'agit ici d'un résultat exceptionnel, mais qui doit être considéré comme acquis. Il existe de nombreux rapports d'essais de chaudières et de moteurs dans les bulletins des associations de propriétaires d'appareils à vapeur; quelques-uns (nous citerons par exemple divers essais de M. Longridge) sont assez complets pour servir de base à la discussion. La plupart ont le caractère de simples essais industriels et ne fournissent qu'un résultat global; nous devons faire remarquer que la consommation de vapeur est souvent donnée sans tenir compte de la température à laquelle la pompe alimentaire extrait l'eau de la bâche du condenseur, contrairement à l'habitude, plus rationnelle, que l'on a prise, dans les essais de chaudières, d'évaluer la vaporisation en supposant, par exemple, l'eau d'alimentation à 0°, et la vapeur à une pression déterminée, constante pour tous les essais; la proportion d'eau entrainée n'est pas toujours déterminée, enfin les machines d'usines sont souvent à charge variable, et l'on n'a en ce cas aucune garantie que le calcul des diagrammes fournit bien le travail moyen (voir notre 1er fascicule, n° 49).

Quelques essais modernes bien conduits, et riches en données de tous genres, ont été effectués sous les auspices de l'*Institution of Mechanical Engineers*, par un comité spécial placé sous la direction de M. A. B. W. Kennedy; ces essais, au nombre de cinq, ont porté sur des machines marines de divers types (*Minutes of p. of the I. M. E.* May 1889, May 1890, May 1892).

Voir aussi la bibliographie indiquée par M. Dwelshauvers-Dery, étude calorimétrique, etc., encyclopédie Léauté, pp. 199 à 210; un essai de locomobile Paxman par M. A. B. W. Kennedy (*Journal of the Sy of Arts*, 15 fév. 1889).

au lieu de 270.000 qui sont réellement produits et qui n'en représentent que les 0,48.

L'écart provient de pertes négligées aussi bien pour la chaudière que pour la machine, et qui sont dues à l'imperfection de la combustion, au rayonnement, aux étranglements, à l'influence de la paroi du cylindre.

La chaudière est du reste plus parfaite que le récepteur, car la machine en question demande à la chaudière 5,50 kilogrammes de vapeur à l'heure par cheval, et lui restitue l'eau à 35° environ, c'est-à-dire qu'elle dépense 3470 calories ; elle devrait convertir en travail :

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \times 3.470 = 1.041 \text{ calories}$$

ou produire :

$$1.041 \times 425 = 442.425 \text{ kgm.}$$

Le rendement de la machine seule est donc :

$$\frac{270.000}{442.000} = 0,61$$

de celui que donnerait son cycle réel, ou :

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Le rendement de la chaudière est :

$$\frac{0,48}{0,61} = 0,79$$

de celui que donnerait le fonctionnement admis ou :

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Quant au travail disponible par le procédé du numéro 170, il serait, pour 650 grammes de charbon brûlé :

$$4.500 \times 0,650 = 2.925 \text{ calories}$$

La machine ne produit que 270.000 kilogrammètres, ou l'équivalent de 635 calories.

Le rendement global, relativement à la machine la plus parfaite que l'on puisse imaginer, est donc :

$$\frac{625}{2.925} = 0,216 \text{ (1)}$$

1. Si l'on considérait le cycle de Carnot comme possible entre les tempéra-

En résumé, il résulte de la discussion à laquelle nous avons consacré ce paragraphe, que les points suivants doivent être considérés comme acquis :

1° La chaleur développée par la combustion de 650 *grammes* de houille brûlant complètement dans le foyer est. . . . . 4.875 calor.

Cette consommation est prise comme terme comparatif dans ce qui suit :

2° Le maximum de la chaleur qui peut être converti en travail au moyen d'un cycle partagé en une infinité d'étages, empruntant la chaleur à la température décroissante des gaz, mais sans chute appréciable, et l'abandonnant à la température de l'atmosphère est : 2.925 calor.

Pour rapprocher ce chiffre du précédent il n'y aurait qu'un seul moyen, ce serait d'élever la température de la combustion en réduisant le poids d'air au minimum ; (nous supposons que la combustion s'opère à la pression atmosphérique).

3° Le maximum de la chaleur convertie en travail par le mode de fonctionnement admis dans la figure 119 est : . . . . 1.316 calor.

Le moyen à employer pour rapprocher ce chiffre du précédent consisterait à décomposer la chaudière en plusieurs parties successives, à températures échelonnées. L'élévation de la pression rend ce système peu pratique.

4° La chaleur réellement convertie en travail par les installations les plus parfaites connues à ce jour est : 635 calor.

La différence entre ce résultat et celui que l'on devrait obtenir a pour cause les pertes provenant du rayonnement, de la combustion incomplète, des étranglements, de l'espace nuisible et de l'effet des parois.

tures T_o et T_a, le rendement serait:

$$\frac{635}{\frac{T_o - T_a}{T_o} 7.500} = 0{,}113$$

mais nous avons vu (169-170) que cette manière d'envisager le rendement n'est pas justifiée.

CHAPITRE VI

Machines pour la production industrielle du froid (1).

173. — Nous distinguerons les machines qui comportent l'emploi d'un fluide non liquéfiable dans les limites des températures et des pressions de fonctionnement, et celles où le fluide subit des alternatives de liquéfaction et de vaporisation. Il y a, entre ces deux catégories de machines, les mêmes différences qu'entre les moteurs à air chaud et les moteurs à vapeur.

Le *postulatum* de Clausius énonce que la chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid à un corps plus chaud, et que cette opération, lorsqu'elle s'effectue, est accompagnée de quelque autre changement; les machines qui nous occupent ont pour objet de produire ce changement.

Soit ABCD (fig. 120) le cycle de Carnot (traduit en coordonnées entropie et température), et supposons qu'il soit décrit en sens inverse de celui d'un moteur thermique, entre la température T_1 du corps froid, et la température T_2 la plus basse à laquelle la chaleur peut s'écouler sur les corps extérieurs par simple conductibilité. La quantité de chaleur A B *m n*, ou Q_1, est enlevée au corps froid à la température constante T_1 et elle est versée, en même temps que la chaleur qui résulte du travail produit, à la source supérieure, qui reçoit ainsi la quantité de chaleur Q_2.

Fig. 120

La source T_1 tend continuellement à se réchauffer par contact avec les corps extérieurs, ou par la chaleur que ceux-ci rayonnent; le maintien de la température T_1 résulte de l'équilibre qui s'établit entre la chaleur qui tend à rentrer et celle qui est cédée pour effectuer l'opération AB.

1. Les premières machines avaient été construites en Angleterre par *Piazza Smyth* vers 1839, et en Amérique, par *Gorrie*.

L'effet utile de la machine frigorifique idéale peut être pris égal au rapport de la quantité Q_1 de chaleur enlevée, à celle équivalente au travail dépensé; ce rapport :

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

est plus élevé (1) que l'unité, et d'autant plus grand que la température T_1, à maintenir, se rapproche davantage de la température T_2 ; on en conclut qu'il y a tout interêt à adopter, pour la température supérieure du cycle, la température ambiante elle-même ; quant à la température inférieure T_1, elle résulte de l'usage industriel que l'on a en vue.

§ I.

Machines à air.

174. — Le cycle de Carnot pourrait être réalisé au moyen d'une machine fermée, les transmissions de chaleur, Q_1, Q_2, s'opéreraient par conductibilité, mais ce procédé est purement idéal, car nous retrouverons ici les formes désavantageuses et l'encombrement des cycles étudiés au chapitre III.

En substituant aux transformations adiabatiques des transformations à volume constant, on réduit l'encombrement, en même temps que l'on conserve les qualités du cycle, à la condition toutefois que la chaleur nécessaire pour opérer la transformation 2 (fig. 121) soit celle qu'abandonne la transformation 4. Cette condition est théoriquement possible moyennant l'emploi d'un régénérateur et l'on voit que la machine n'est autre qu'une machine de Stirling renversée.

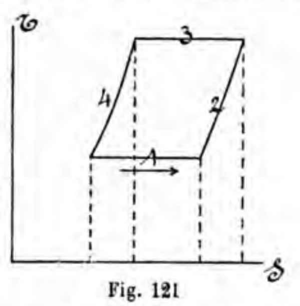


Fig. 121

La machine de *Kirk*, conçue en 1862, est construite d'après ce prin-

1. Ce résultat n'indique évidemment pas qu'il y ait de l'énergie créée par l'opération; la chaleur n'a du reste aucune valeur tant que la température ambiante n'est pas dépassée.

cipe ([1]), elle a fait l'objet d'applications récentes; le *schéma* de cet *appareil* (fig. 122), comprend un cylindre C, dans lequel s'opèrent successivement la compression et la détente du cycle; ce cylindre est en communication avec une chambre M, dans laquelle peut se mouvoir le piston déplaceur D; le fond de cette chambre est maintenu, par une circulation d'eau, à la température T_2, le couvercle reçoit la circulation du liquide froid (eau salée, dissolution de chlorure de calcium) à laquelle il faut enlever de la chaleur; le piston déplaceur peut livrer passage à l'air qui se rend d'une face à l'autre du piston, mais en le forçant à traverser le régénérateur R. La machine fonctionne de la manière suivante:

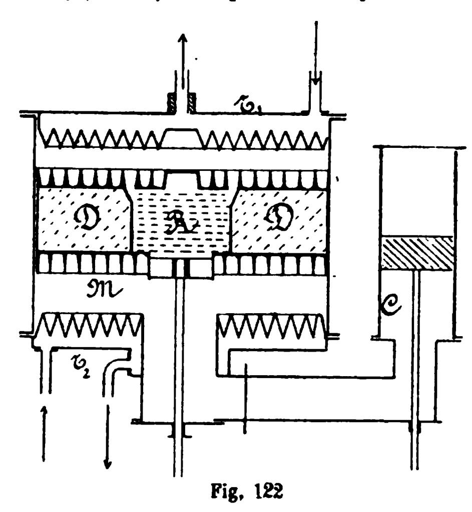


Fig. 122

Le piston déplaceur étant au sommet de sa course, l'air est comprimé par le cylindre C, mais sa température est maintenue constante par la circulation d'eau du fond de la chambre, l'opération 3 du cycle s'accom-

1. Engineering 1888, 2e sem. p. 551.
On consultera utilement, surtout pour l'étude organique des machines de ce chapitre, les ouvrages fort complets de M. *G. Richard*. Rapport au congrès de mécanique appliquée, Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, 2e série, t. I, et les « Machines frigorifiques et leurs applications à l'Exposition de 1889. » Revue technique de l'Exposition, 11e partie, 2e et 3e fascicules, ainsi que les articles suivants, de la Revue « *Engineering* » :
Kilbourn, Mechanical Refrigeration, 1881, 2e sem. pp. 403, 427, 465.
d° Installation du dock de Hull, 1886, 1er sem. p. 535.
Lightfoot, on Refrigerating, etc., 1886, 1re sem. p. 605, 2e sem. pp. 22, 34, 97.
Pontifex's, Ice-making Machinery (à absorption) 1887, 1er sem. p. 289.
Delavergne, System, etc. (à compression, à ammoniaque) 1888, 1er sem. pp. 589, 614, 626.
Hall's Arrangements for cold storage on ship board, 1888, 2e sem. pp. 32, 33.
Windhausen, machine à acide carbonique, même vol. p. 58.
— Ammonia Refrigerating machine, 1889, 1er sem. pp. 134, 143.
J. E. Hall. Duplex cold air, 1890, 2e sem. p. 540.
Test of Refrigerating Plant, même vol. 2e sem. p. 63.
Refrigerating and Ice making plant, 1891, 2e sem. p. 652.
Les machines frigorifiques, par M. H. Fauchez, compte-rendu de la Société des Ingénieurs civils de France, avril 1892, ainsi que les rapports de M. Schroeter et les mémoires cités plus loin.

plit. Le piston du cylindre C étant maintenu immobile au fond du cylindre, le déplaceur est amené au bas de sa course, l'air de la chambre se rend dans le compartiment supérieur de celle-ci, en se dépouillant de sa chaleur sur le régénérateur, qui l'absorbe ; l'opération 4 du cycle est ainsi effectuée. Le piston du cylindre C se déplace ensuite, et l'air froid se détend en enlevant au couvercle une certaine quantité de chaleur ; c'est cette opération que l'on pourrait appeler la phase utile de la machine, car c'est celle qui maintient le liquide incongelable qui circule dans le couvercle à la température inférieure T_1, elle est représentée sur le cycle par la ligne 1. Enfin le piston de travail étant immobile, le déplaceur est relevé, l'air froid repasse dans le compartiment inférieur de le chambre en reprenant la chaleur déposée sur le régénérateur, ce qui achève le cycle en effectuant l'opération 2.

La machine de Kirk est entièrement fermée, l'air qui se perd par les fuites est restitué par un petit compresseur auxiliaire. Le fond et le couvercle sont disposés de manière à favoriser la transmission de la chaleur à l'air, ou réciproquement.

175. — La plupart des machines à air comportent un cycle ouvert [1], et sont composées des organes représentés figure 123.

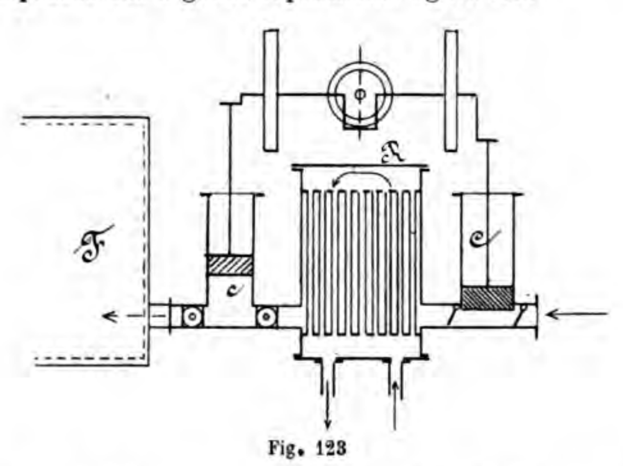


Fig. 123

C est un cylindre compresseur, qui aspire l'air à la pression et à la température de l'atmosphère.

1. Ces machines sont comparables aux moteurs à air de Hock, Brown, Bénier, Chap. III.

R est un réfrigérant, généralement tubulaire, disposé comme un condenseur à surface; il est traversé par un courant d'eau qui ramène l'air comprimé à une température voisine de celle de l'atmosphère.

c est un cylindre où l'air comprimé qui vient du réfrigérant se détend suivant la loi adiabatique: le piston de ce cylindre fournit un travail qui vient en déduction de celui qu'absorbe la compression; à cette fin, les deux pistons sont reliés à un même arbre, qui reçoit aussi l'action d'un moteur; on emploie même un mode de connexion plus simple, en montant les deux pistons sur une même tige, mais comme ils ont alors la même course, les cylindres doivent avoir des sections différentes.

L'air qui s'échappe du cylindre *c* est à la température finale de la détente, il est refoulé à la pression atmosphérique dans le local à refroidir; celui-ci est, par exemple, une chambre F à parois isolantes, dans laquelle est disposé un cloisonnage ayant pour but de faire circuler méthodiquement l'air froid; celui-ci se réchauffe peu à peu en absorbant la chaleur que lui cèdent les parois de la chambre et les objets qui s'y trouvent, puis il s'échappe à une température nécessairement un peu inférieure à celle de la chambre, et il reprend à l'extérieur la température ambiante.

Si nous faisons abstraction de l'espace nuisible, et si nous admettons que la compression et la détente s'effectuent suivant la loi adiabatique, le diagramme des pressions sera donné dans le compresseur par le contour ABCD (fig. 124), la ligne AB ayant pour ordonnée la pression

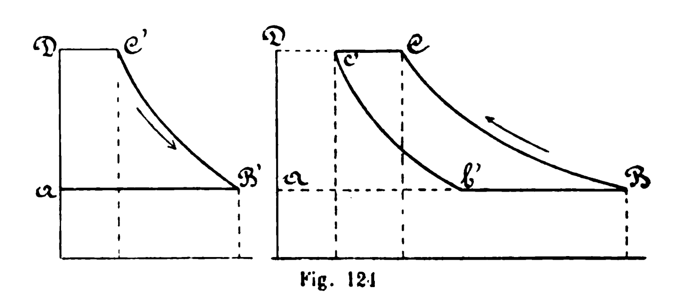


Fig. 124

atmosphérique; l'ordonnée de la ligne CD ne dépend que du rapport qui existe entre le volume d'air admis au cylindre de détente, et le volume du cylindre compresseur; elle est réglée d'après l'abaissement de température que l'on veut produire.

Le diagramme du cylindre de détente est DC'B'A; la ligne B'A correspond à l'expulsion, dans la chambre froide, du volume d'air AB' à la tem-

pérature la plus basse du cycle, soit T_1; ce volume correspond au poids qui occupe le voiume AB à la température ambiante.

Les opérations qui s'accomplissent dans le compresseur et le cylindre de détente sont représentées, lorsque l'on tient compte des opérations qui s'annulent en se superposant, par les trois lignes BC, Cc' c'b'. Le cycle est donc ouvert suivant le côté b'B; c'est dans la chambre froide, puis dans l'atmosphère, que s'effectue la transformation qui ferme le cycle, c'est-à-dire l'échauffement à pression constante qui produit la dilatation b'B.

Soit T_2 la température de l'atmosphère et du réfrigérant R réalisée aux points B et c' du cycle, T_1 la température après la détente au point b' T_3 la température après la compression au point C; nous aurons, d'après les propriétés des lignes adiabatiques :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

Le cycle entropique est du reste le même que dans la machine de Brown, il est donné par le contour $B_1C_1c'_1b'_1$ (fig. **124** *bis*). La chaleur soustraite, partie à la chambre F, partie à l'atmosphère, est représentée par la surface $B_1Bbb'_1$, tandis que la chaleur équivalente au travail dépensé est donnée par la surface du cycle.

Soit Θ la température absolue à laquelle on maintient la chambre froide; l'air sortant du cylindre de détente s'échauffe, sur son parcours, jusqu'à la température Θ [1], et la période utile du cycle est alors terminée; la quantité de chaleur soustraite à la chambre F est donc réduite à la surface $bb'_1D\,d$, dont l'expression est :

Fig. 124 *bis*.

$$Q = PC\,(\Theta - T_1)$$

P étant le poids d'air engagé dans le cycle.

1. Tout au moins dans le cas limite, ce qui suppose le séjour de l'air assez prolongé; nos raisonnements s'appliquent également au cas où l'air servirait à refroidir à la température Θ un circuit de liquide incongelable enfermé dans un tuyautage; Θ serait la température au point de départ du liquide, le retour aurait lieu à une température plus élevée.

La chaleur correspondant au travail dépensé est:

$$AL = PC\,(T_3 - T_2) - PC\,(T_2 - T_1)$$

ou, en exprimant T_3 en fonction de T_2 et T_1 :

$$AL = PC\,\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1}$$

L'expression du rendement se trouverait facilement en divisant Q par AL; on pourrait aussi, en considérant T_2 et Θ comme les données de la question, trouver la température T_1 qui procure le rendement le plus élevé, on trouve:

$$T_1 = \frac{T_2\,\Theta}{2\,T_2 - \Theta}$$

Cette recherche n'est cependant d'aucune utilité, car les cycles des machines réelles diffèrent notablement de celui que nous avons admis.

Si l'on visait à donner à la machine une activité aussi grande que possible, sans se préoccuper de la dépense de travail, il faudrait évidemment rendre Q aussi grand que possible, c'est-à-dire abaisser T_1, ce qui entraine l'augmentation de T_3; il faudrait donc comprimer l'air à une pression de plus en plus élevée.

176. — Le cycle que nous avons considéré présente, au point de vue du rendement, un défaut capital : celui de rejeter la chaleur à une température supérieure à T_2, en entrainant une dépense de travail inutile; les lignes de transformation B_1C_1, $C_1\,c'_1$ seraient avantageusement remplacées par la compression isothermique $B_1\,c'_1$ mais ce résultat ne peut être obtenu qu'en refroidissant l'air d'une manière efficace pendant la compression même. Pour y arriver, on emploie deux moyens : on entoure le cylindre et les fonds du compresseur d'une enveloppe à circulation d'eau froide, et on injecte de l'eau dans un état très divisé à l'intérieur du cylindre ; chacun de ces moyens peut aussi être employé seul.

On ne parvient cependant pas à effectuer la compression sans accroissement de température, mais on abaisse l'exposant k de la courbe de compression :

$$pv^k = C^{te}$$

La transformation est alors représentée par B_1C'', dont on trouve facilement l'équation lorsque l'on connaît la valeur de k (36). On achève le refoulement sous pression constante dans le réfrigérant R.

D'autre part, la détente ne saurait être adiabatique dans le cylindre c, la ligne $c'_1b'_1$ est donc remplacée par c'_1b''.

Il y a lieu de remarquer enfin que le réfrigérant ne ramène pas rigoureusement l'air comprimé à la température ambiante, ce qui modifie encore le diagramme.

177. — *Echangeur de Siemens.* — L'air du compresseur, amené à la température T_2 ou à une température peu supérieure à celle-ci par la circulation d'eau froide du réfrigérant, peut être refroidi à une température notablement inférieure lorsqu'on utilise l'air qui s'échappe de la chambre F à la température Θ ; nous avons supposé jusqu'ici que cet air était rejeté dans l'atmosphère, à laquelle il soustrait de la chaleur pour se réchauffer, mais cet effet se produit sans aucun bénéfice pour la machine, puisque le compresseur aspire de l'air à la température ambiante.

Le procédé de refroidissement que nous venons d'indiquer a été imaginé par *Siemens* en 1857 (*interchanger*) et employé par *Windhausen* en 1869 [1]; on voit que, par ce moyen, la ligne de refroidissement à pression constante pourrait se prolonger jusqu'à la température Θ (fig. 125); les lignes comprises entre les températures Θ et T_2 sont isodiabatiques, et correspondent à des transformations qui s'effectuent à l'intervention de l'échangeur ou régénérateur, sans communication avec les sources.

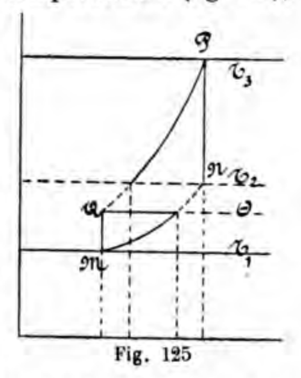


Fig. 125

Par ce procédé, nous avons abaissé la température de l'air jusqu'à la limite T_1, comme dans le cas précédent, et nous avons enlevé à la chambre froide, entre les températures T_1 et Θ la même quantité de chaleur, mais en dépensant un travail beaucoup moindre; on peut même imaginer que les lignes PQ, MN se rapprochent indéfiniment, le rendement tend de plus en plus vers celui du cycle de Carnot qui fonctionnerait entre les températures T_1 et Θ, mais la machine deviendrait de plus en plus encombrante pour la même quantité de chaleur à enlever.

1. Il est employé aujourd'hui dans les machines de Bell et Coleman.

Le refroidissement complémentaire dû à l'échangeur ne contribue pas seulement à améliorer le rendement : il condense la vapeur d'eau qui sature l'air comprimé, ce qui diminue la formation du givre dans les lumières du cylindre de détente. Cette formation est la difficulté contre laquelle on a toujours à lutter dans les machines basées sur la détente de l'air [1]. Il est à peine nécessaire de faire remarquer que le fonctionnement de l'échangeur est en pratique beaucoup moins satisfaisant que ne le suppose sa conception théorique.

178. — *Causes de perte de rendement.* — L'influence de l'espace nuisible du cylindre de détente peut être annulée par une compression convenable, obtenue en fermant l'échappement de l'air froid, mais le cylindre est un peu plus grand que si l'espace nuisible n'existait pas; dans le compresseur, l'espace nuisible reste plein d'air, qui se détend pendant la course d'aspiration, et qui diminue la capacité de l'appareil. L'influence des espaces nuisibles se traduit donc finalement par une légère augmentation des résistances passives [2], mais cette perte est négligeable à côté de celle qu'occasionne l'humidité de l'air.

Le cycle de Carnot ne serait pas affecté par la proportion d'humidité plus ou moins grande contenue dans le fluide travailleur, dont la nature importe peu, mais il n'en est pas de même du cycle ouvert, car la condensation de la vapeur d'eau qui sature l'air au moment où il est admis dans le détendeur, et la congélation de cette eau, dégagent une certaine quantité de chaleur qui limite l'abaissement de température.

L'air aspiré par le compresseur à la température ambiante renferme une certaine proportion de vapeur d'eau, atteignant au maximum celle qui correspond à la saturation sous la pression atmosphérique. La compression *isothermique* diminue le volume de l'air, et celui-ci se sature de plus en plus; si on pousse assez loin la compression, la vapeur se condense, et à partir de ce moment, le poids de vapeur que peut contenir l'air diminue proportionnellement à son volume.

L'eau provenant de la vapeur condensée pourrait toujours être écartée au moyen de purgeurs bien disposés ; il est à remarquer, du reste, que la quantité d'eau que l'on injecte dans le cylindre compresseur lui-même,

1. *Minutes of Proceedings of the Institution of C. E.* t. XXXVII, 1874. Mechanical production of Cold, by A. C. Kirk, t. LXVIII, 1882, mémoire de Coleman sur le même sujet.

2. *Théorie des machines à froid*, par M. Ledoux, Ingénieur des mines. Annales des mines, 7e série, t. XIV.

lorsque l'on emploie ce moyen de refroidissement, n'a théoriquement aucune influence sur l'humidité de l'air, bien qu'elle amène une saturation plus rapide de ce fluide, à la condition, toutefois, que le liquide soit écarté au moment de l'admission au cylindre détendeur.

Pour étudier convenablement le problème, il faut considérer les transformations de l'air humide au moyen des équations établies au n° 56. Dans le cylindre de détente, le phénomène se complique, la vapeur d'eau se condense sur les parois froides, puis elle se congèle en se dépouillant, au profit de la paroi, de sa chaleur interne ; la paroi cède ensuite de la chaleur à l'air vers la fin de la détente. M. Ledoux a calculé dans cette hypothèse, pour divers degrés de compression, l'abaissement de la température en dessous de celle de l'atmosphère, et le nombre de calories qui pourraient être soustraites par l'air s'il se réchauffait jusqu'à la température ambiante.

Dans le cas où la compression s'opère adiabatiquement, l'état hygrométrique de l'air étant égal à $\frac{1}{2}$, la machine donne un rendement inférieur à celui que l'on obtiendrait avec de l'air sec, mais la différence diminue au fur et à mesure que la pression s'élève.

La pression de marche admise est d'environ 3 atmosphères effectives, une pression plus grande augmente l'activité de la machine, mais diminue son rendement.

179. — *Données pratiques.* — Le rapport entre le volume des cylindres compresseur et détendeur est réglé par le rapport de la température absolue finale que l'on veut réaliser, à la température ambiante; pour éviter que la pression motrice du cylindre de détente ne s'abaisse en dessous de la pression atmosphérique, on est obligé d'adopter des cylindres de détente relativement petits.

Les machines frigorifiques à air sont volumineuses, mais leurs cycles atteignent facilement des températures très basses, ce qui est un avantage pour certaines applications. En outre, l'air froid peut être mis directement en contact avec les corps dont on veut empêcher l'élévation de température sans qu'il soit nécessaire d'employer une solution incongelable.

Ces solutions, indispensables pour les autres catégories de machines, circulent dans des tuyaux dont les parois agissent par conductibilité, mais la vapeur contenue dans l'air des locaux à refroidir s'y dépose et

s'y congèle ; ils se couvrent d'une couche de glace compacte qui nuit à l'absorption. Malgré cette circonstance défavorable, les machines à ammoniaque et à acide sulfureux luttent avantageusement contre les machines à air dans la plupart des cas, à cause de leurs rendements supérieurs, et les machines à air sont de plus en plus réservées à quelques applications spéciales.

Ainsi, à bord des navires, il serait gênant et dangereux d'emporter et de manipuler des provisions d'acide sulfureux, d'ammoniaque anhydre, d'éther, etc.; d'ailleurs, les cales doivent pouvoir admettre une cargaison quelconque, et dans ces conditions il serait difficile d'y monter le tuyautage compliqué destiné à la circulation du liquide froid. La machine à air a donc été jusqu'aujourd'hui employée dans la marine, on ne peut guère citer que quelques exceptions récentes à cette règle [1].

Lorsqu'on dispose d'une canalisation d'air comprimé refroidi (comme celles de Paris, d'Offenbach, etc.), l'appareil frigorifique proprement dit se réduit au cylindre détendeur ; celui-ci accomplit nécessairement un certain travail, qui peut être employé à restituer à la canalisation un certain poids d'air, toujours inférieur à celui qui a été dépensé. En supposant nulles les résistances passives, la détente et la compression étant adiabatiques, les poids en question seraient dans le rapport de la température finale absolue à la température initiale dans le cylindre de détente.

Plusieurs moyens sont employés pour éviter les inconvénients des dépôts de neige dont il a été question au n° 178.

Bell et Coleman ont recours à la condensation aussi complète que possible par la méthode du refroidissement préalable. L'air comprimé se refroidit par une aspersion d'eau dans une colonne qu'il parcourt en montant, l'eau est séparée dans une colonne descendante et recueillie par un purgeur automatique. L'air se rend ensuite au faisceau tubulaire, qui joue le rôle d'échangeur; ce faisceau est traversé, à l'extérieur des tubes, par l'air quittant la chambre froide; l'air comprimé est enfin admis au détendeur, et s'échappe dans la chambre froide.

Dans les machines de *Lightfoot*, on a recours, pour obtenir la condensation de la vapeur d'eau, à une première détente préalable ; enfin, dans

1. J. et E. Hall, promoteurs et constructeurs de machines à air, viennent de pourvoir les paquebots *Britannic* et *Germanic* de machines à acide carbonique; ce corps présente l'avantage de réduire l'encombrement; il n'attaque pas le cuivre, les condenseurs à surface peuvent donc être construits au moyen de ce métal bon conducteur. *Engineering*, 1892, 2e sem. p. 58.



la plupart des cas, on se borne à disposer, à la sortie de l'air détendu, des *boîtes à neige*; on appelle ainsi des chambres de dépôt garnies de plaques armées de pointes que l'on nettoie facilement.

On trouvera des données numériques intéressantes dans le mémoire de *M. Coleman* et la revue citée de *M. Richard.* Les machines à air ne produisent par cheval indiqué et par heure au compresseur, que 6 kilogrammes de glace environ, l'eau et la glace étant à zéro (soit 480 calories négatives); elles semblent définitivement réservées à la fabrication de l'air froid [1].

§ II

Machines à vapeur liquéfiable [2]

180. — *Machines à compression.* — Ces machines comprennent un récipient F, figure 126, jouant le rôle de chaudière, dans lequel le fluide travailleur soustrait la chaleur à la solution incongelable qui y circule et s'y refroidit. En sortant du serpentin noyé dans le récipient F, le fluide

1. D'après un essai de M. Schroeter (Untersuchungen an Kaeltemaschinen verschiedener Systeme, 1er rapport, Munich, Oldenbourg, 1887) les principaux résultats d'une machine de Bell-Coleman établie dans une boucherie de Hambourg, sont :

Puissance en chevaux indiqués au cylindre à vapeur. .		85,12
— — —	au compresseur . . .	128,85
— — —	au détendeur. . . .	60,10
Température centigrade	à l'entrée du compresseur. .	19,3
— —	à la sortie.	28,3
— —	à l'entrée du cylindre de détente	19,00
— —	à la sortie.	— 47,00

Pression effective, environ 3 kgs par cm. carré.

L'effet de la machine est évalué en remarquant que l'air refroidi à la température — 47° absorbe, pour remonter à la température ambiante ou 19°,3, une quantité de chaleur que l'on obtient en multipliant le poids de l'air qui traverse les cylindres par l'élévation de la température et par la chaleur spécifique de l'air à pression constante; on obtient ainsi 371 calories par cheval indiqué au cylindre à vapeur, résultat notablement inférieur à celui des machines du paragraphe II.

2. La première machine de ce genre a été produite par Perkins, en 1835.

travailleur, à l'état de mélange de liquide et de vapeur, est aspiré par une pompe C, qui le comprime et le refoule sous pression dans un

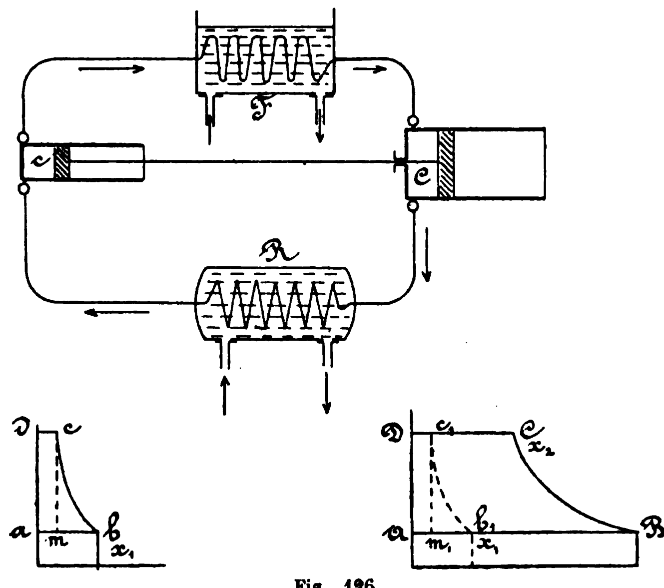


Fig. 126

réfrigérant ou condenseur à surface R, ramené, par une circulation d'eau, à la température ambiante ; le corps que renferme la machine est liquéfié par son passage dans ce réfrigérant, sous l'effet de la température et de la pression ; il est admis, dans cet état, au cylindre de détente *c*, d'où il s'échappe à l'état de vapeur à basse température, pour revenir dans le récipient F où il se retrouve à l'état initial et recommence son cycle.

Les corps employés étant plus ou moins coûteux, ou toxiques, ou très irritants, les machines sont à cycle fermé. De plus, on supprime presque toujours le cylindre de détente, et le fluide retourne à son état initial en passant par un appareil à étranglement ; on perd ainsi un certain travail, car on pourrait associer un cylindre détendeur au cylindre de compression, comme on le fait dans les machines à air.

Pour les vapeurs saturées, la pression est toujours fonction de la température, on voit que le choix du fluide sera motivé par cette considération. Ainsi, on ne pourrait employer l'eau, qui, sous une pression très réduite, ne se vaporise qu'à des températures trop élevées pour le but que l'on poursuit.

Les liquides susceptibles d'emploi sont l'éther sulfurique, l'acide sulfureux, l'éther méthylique, le chlorure de méthyle, l'ammoniaque.

On se sert également de liquides mixtes (mélange d'acide sulfureux et d'acide carbonique de M. Raoul Pictet). Le tableau suivant, emprunté à M. Zeuner [1], condense les données des expériences de Regnault pour les corps que l'on peut employer :

	Température centigrade	PRESSION EN ATMOSPHÈRES					
		Ether sulfurique	Acide sulfureux	Ether méthylique	Chlorure de méthyle	Ammoniaque	Acide carbonique
1	— 30	—	0.3782	0.7586	0.7618	1.1534	—
2	— 20	0.0907	0.6309	1.1605	1.1621	1 8391	19.924
3	— 10	0.1509	1.0032	1.7192	1.7231	2.8283	26.763
4	0	0.2426	1.5330	2.4724	2.4881	4.2074	35.403
5	10	0.3774	2.2626	3 4591	3.5042	6.0687	46.051
6	20	0.5694	3.2395	4.7184	4.8250	8.5092	58.837
7	30	0.8353	4.5155	6.2868	6.5006	11.6213	—
8	40	1.1935	3.2395	—	—	15.4953	—

181.— *Cycle des machines à compression.*— Supposons qu'on veuille employer l'un des corps ci-dessus, l'éther, par exemple, entre la température ambiante (20°) pour le condenseur, et — 20° pour la température inférieure. Le compresseur, supposé sans espace nuisible, aspire le volume AB, à la température inférieure, le titre du mélange étant x; la compression BC donne au titre la valeur x_2; le piston refoule au condenseur le volume CD.

Dans le condenseur, le fluide est réduit au volume du liquide qui est admis au cylindre de détente; la détente cb amène une vaporisation partielle, et le titre prend la valeur x_1; le volume est alors ab, mais le fluide, en se dilatant dans le serpentin F, sous l'influence de la chaleur que lui transmet le liquide incongelable, prend le volume AB dans le compresseur.

On pourrait évidemment supposer que les deux opérations, compression et détente, sont produites dans le même cylindre ; on aurait alors

1. Zur Theorie der Kalt Dampfmaschinen *Civil Ingenieur* 1881.

un cycle fermé, $b_1 BC c_1$, résultant de la superposition des deux diagrammes.

Pour l'écart de température admis (— 20° à + 20°) les pressions limites sont, pour les différents liquides, celles des lignes 2 et 6 du tableau; pour l'éther, le cycle tout entier est à une pression notablement inférieure à celle de l'atmosphère; cette circonstance occasionne certaines difficultés, à cause des rentrées d'air.

Une trop grande pression amène d'autres inconvénients, à cause des fuites, et parce qu'il est difficile de l'atteindre, étant donné l'espace nuisible qui existe forcément dans tout compresseur.

On voit que les liquides qui se prêtent le mieux au fonctionnement des machines à produire le froid, sont : l'acide sulfureux, l'éther méthylique, le chlorure de méthyle et l'ammoniaque. L'acide carbonique, malgré ses hautes pressions, est cependant employé, (machines *Halot*, *Lebrun*); l'éther, malgré l'inconvénient signalé, est employé dans les machines de *Mackay;* le chlorure de méthyle (machine *Vincent*) et l'éther méthylique (machine *Tellier*) sont inflammables. L'acide sulfureux (machine *Pictet*) et l'ammoniaque (machines *Linde*, *Fixary*, *Lavergne*) présentent au plus haut degré les qualités que nous devons rechercher dans les cycles des appareils frigorifiques [1].

182.— Nous admettrons que le poids du fluide qui intervient dans le cycle de la figure 126 soit de 1 kilogramme; la quantité de chaleur Q_1, soustraite au corps froid, est celle nécessaire pour effectuer la transformation isothermique b_1B. La compression BC est supposée adiabatique; la quantité de chaleur Q_2, versée au condenseur par le fluide qui se rend du compresseur au cylindre de détente, est celle qu'il faut enlever au corps pour effectuer la transformation Cc_1, pendant laquelle le titre diminue depuis la valeur x_2 jusqu'à zéro. Si on appelle T_1 et T_2 les températures absolues des deux sources, on aura, puisque le cycle est composé de deux lignes isothermiques et de deux lignes adiabatiques :

$$\frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Nous pouvons appliquer à la machine à vapeur les conclusions déjà formulées pour les machines à air idéales; il est nécessaire, notamment, pour obtenir un effet utile élevé, de ne pas abaisser inutilement la tem-

1. Pour les propriétés de ces corps, voir Chapitre I, n° 66.

pérature T_1; même pour la fabrication de la glace, t_1 ne descend pas en-dessous de — 15°; dans les brasseries, il s'agit en général de maintenir des caves à la température zéro : on peut résoudre le problème en prenant une machine de petites dimensions et en abaissant la température T_1, mais cette solution n'est pas avantageuse.

Nous avons vu au chapitre I que les vapeurs sont de deux espèces : l'éther se liquéfie pendant la compression, les vapeurs d'acide sulfureux et d'ammoniaque se comportent comme la vapeur d'eau et se surchauffent.

On peut toujours déterminer, pour ces dernières vapeurs, le titre initialqui doit être réalisé pour qu'il n'y ait surchauffe à aucun moment de la compression adiabatique.

183. — Les problèmes pratiques exigent que l'on puisse calculer les dimensions des cylindres pour produire un effet donné; Q_1 est déterminé, non par kilogramme de fluide et par parcours de cycle, mais par seconde.

Soient P le poids du fluide qui intervient dans le cycle;

» n le nombre de compressions par minute [1].

Le titre x_1 est donné par l'équation :

$$\frac{r_1 x_1}{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} l \frac{dT}{T}$$

l étant la chaleur spécifique du liquide.

En outre, pour les vapeurs autres que celles de l'éther [2], on détermine le titre x de manière à obtenir de la vapeur sèche, mais non surchauffée à la fin de la compression, on a donc, puisque $x_2 = 1$:

$$\frac{r_1 x}{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} l \frac{dT}{T} + \frac{r_2}{T_2}$$

La connaissance des valeurs de l et r spéciales à chaque corps permet

1. Ce nombre résulte des conditions organiques comme dans les machines à vapeur.

2. Pour la vapeur d'éther, on adopterait $x = 1$, puisque ce corps se liquéfie par la compression.

de trouver x et x_1 ; la quantité de chaleur enlevée au corps froid par kilogramme de fluide et pour chaque évolution est :

$$r_1 (x - x_1)$$

On aura donc :

$$Q_1 = P \frac{n}{60} r_1 (x - x_1)$$

qui permettra de déterminer P lorsque l'on connaît n.

Le volume engendré pendant l'aspiration par le piston du compresseur se déduit du titre, il aura pour valeur :

$$P \left[u + (u'_1 - u) x \right]$$

on trouverait de la même manière le volume du cylindre de détente :

$$P \left[u + (u'_1 - u) x_1 \right]$$

184.— *Encombrement relatif des machines.*— Le poids P, nécessaire pour obtenir un effet donné, varie, à nombre égal de coups de piston, en raison inverse du produit :

$$r_1 (x - x_1)$$

Le volume du compresseur varie, par conséquent, comme la fonction :

$$\frac{u + (u'_1 - u) x}{r_1 (x - x_1)}$$

on a, du reste, d'après les équations du numéro précédent, pour les vapeurs qui se comportent comme la vapeur d'eau :

$$r_1 (x - x_1) = \frac{T_1}{T_2} r_2$$

On a aussi, par l'équation de Clapeyron :

$$u'_1 - u = \frac{r_1}{A T_1 \left(\frac{dp}{dt}\right)_1}$$

En négligeant le volume u du liquide, on trouve que le volume du

compresseur est proportionnel, lorsque l'on passe d'un fluide à l'autre en restant entre les mêmes températures, à la fonction :

$$\frac{r_1}{r_2 \left(\frac{dp}{dt}\right)_1}$$

Pour la vapeur d'éther, il faudrait multiplier par x_2 le dénominateur de cette fonction.

On trouve, en appliquant cette formule pour la marge habituelle des températures et les différents corps employés, des nombres qui sont proportionnels à l'encombrement des cylindres ; l'acide carbonique donne les machines les plus compactes ; celles à ammoniaque sont environ six fois plus grandes. Les machines à acide sulfureux sont environ trois fois plus volumineuses que les machines à ammoniaque. Enfin, les machines à éther sont très désavantageuses à ce point de vue, comme on pouvait s'y attendre, à cause de leurs faibles pressions.

185. — *Suppression du cylindre détendeur.* — Dans les machines réelles, le fluide liquéfié du condenseur rentre au générateur en passant par un robinet dont on règle l'ouverture conformément au régime que l'on veut établir [1]. L'écoulement se produit du milieu dont la pression est p_2 et la température T_2 vers le milieu caractérisé par les valeurs p_1 et T_1 ; soit w la vitesse dans l'orifice, on a :

$$A \frac{w^2}{2g} = q_2 - q_1 - r_1 x_1 + A (p_2 - p_1) u$$

Comme nous l'avons vu dans les problèmes sur l'écoulement, l'énergie extérieure du jet s'éteint graduellement et s'emploie à élever le titre de la vapeur, qui, au lieu d'avoir la valeur x_1, comme précédemment, devient x'_1, on a :

$$r_1 (x'_1 - x_1) = q_2 - q_1 - r_1 x_1 + A (p_2 - p_1) u$$

ou :

$$r_1 x'_1 = q_2 - q_1 + A (p_2 - p_1) u$$

La chaleur enlevée à la source inférieure est donc moindre que dans

1. Il faut bien remarquer que le cylindre détendeur ne pourrait être supprimé dans une machine à air, l'abaissement de température serait localisé, et disparaîtrait lorsque l'air serait rentré au repos.

le cas où le cylindre détendeur existe; la dépense de travail est plus grande, puisque le piston du cylindre de détente ne concourt plus à l'opération; la dépense d'eau est encore la même pour refroidir la vapeur comprimée.

Le diagramme entropique permet de se rendre compte du changement produit par la suppression du cylindre de détente. En effet, le terme $A(p_2 - p_1)u$ est très faible, et la chaleur $r_1 x'_1$ est représentée, très approximativement, par la surface $m'mcb'$ (fig. 127); or, si l'on porte en mb'' l'entropie correspondant au poids x'_1 de vapeur, le rectangle $m'b''$ représente aussi la quantité de chaleur $r_1 x'_1$; les deux surfaces mbc, $b'b''$, sont donc égales.

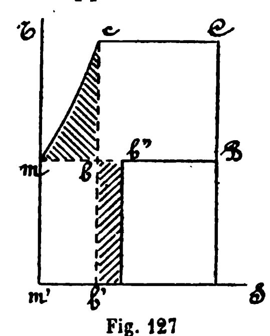


Fig. 127

En supprimant le cylindre de détente, on a diminué la chaleur enlevée à la source inférieure, qui était $r(x - x_1)$ ou le rectangle b' B, de la surface couverte de hachures. En même temps, on a augmenté le travail dépensé ou la chaleur équivalente b B C c, de la quantité $m\,b\,c$; les deux surfaces couvertes de hachures étant égales, le nouveau rendement s'obtiendra en ajoutant la quantité de chaleur que représente chacune d'elles au dénominateur de l'expression qui donnait le rendement du cycle de Carnot, l'autre se retranchant du numérateur.

La perte en question n'est pas très considérable, on préfère la subir et simplifier la machine par la suppression d'un cylindre.

186. — Les machines frigorifiques à vapeur donnent lieu aux mêmes recherches que les machines motrices quant à l'influence des parois, qui absorbent ici de la chaleur pendant la compression et le refoulement pour en restituer pendant l'aspiration, cet échange se fait par l'intermédiaire d'une pellicule liquide qui mouille les parois, et qui se vaporise pendant l'aspiration, sous l'influence de la diminution de pression; une partie de la chaleur, au lieu d'être versée à la source supérieure, retourne au corps froid.

L'étude des machines frigorifiques n'a pas encore été faite à ce point de vue [1].

Le diagramme entropique montre également qu'il y a intérêt à éviter

1. M. Zeuner, mémoire cité, a donné quelques indications générales sur cette question.

la surchauffe, puisque, dans ce cas, le cycle devient désavantageux sous le rapport du travail consommé (fig. 128).

187. — *Machines à acide sulfureux de M. Pictet* (1). — Le corps en question ne présente aucun danger, et donne lieu à des pressions modérées, mais il ne peut y avoir dans l'appareil aucune rentrée d'eau ou d'air. Le compresseur et le moteur sont souvent disposés côte à côte ; les soupapes, le calage des manivelles et d'autres détails donnent lieu aux mêmes observations que dans les compresseurs d'air ; comme l'eau ne peut être injectée au cylindre, celui-ci est refroidi par une enveloppe venue de fonte, l'intérieur du piston et de la tige sont de même rafraichis par un courant d'eau froide amené d'un réservoir, et évacué au moyen de connexions flexibles.

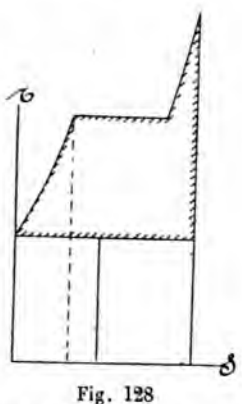


Fig. 128

Pour la fabrication de la glace, le régime de marche est à peu près le suivant, en supposant que l'eau à congeler soit à la température de 10° C :

1.	Température moyenne du bac à glace et de la solution de chlorure de calcium incongelable dans laquelle sont plongés les moules. .	— 6°
2.	Pression absolue du condenseur en kilog. par cm².	3.70
3.	— — de la vapeur détendue	1.15
4.	— — de compression au diagramme.	4.25
5.	— — d'aspiration —	0.75
6.	Température dans le condenseur	22°
7.	— — le vaporisateur	—16°
8.	Dans ces conditions, la production de glace brute par cheval indiqué sur le piston à vapeur est de	28 kgs.

(La chaleur latente de formation de la glace est de 79c,25, sa chaleur spécifique est 0,504.)

Les différences entre les chiffres 2 et 4, d'une part, 3 et 5, d'autre part, sont dues aux résistances des soupapes et des tuyautages.

M. Pictet a préconisé l'emploi, comme corps travailleur, d'un mélange d'acide sulfureux et d'acide carbonique qui, pour une certaine pression

1. Pour la description de ces machines : V. *Richard*, ouvrage cité, *Ledoux-dito*, le vaporisateur ou récipient F est très ingénieusement combiné.

tendent à se combiner d'eux-mêmes par l'affinité, sans l'intervention du travail extérieur. Cette combinaison a lieu avec dégagement de chaleur qui est enlevée par l'eau du condenseur. La détente sépare les deux vapeurs, et cette décomposition est accompagnée d'une absorption de chaleur. Le jeu de l'affinité soulage par conséquent le compresseur.

Tessié du Motay et Rossi avaient proposé d'autres corps mixtes; les données de la physique sur ces mélanges ne sont pas suffisantes pour permettre l'étude des machines dans lesquelles on les emploie.

188. — *Machines à ammoniaque.* — Les machines de Linde et de Fixary sont les plus connues sur le continent; on cherche surtout, dans ces appareils, à éviter les fuites, que favorise la haute pression, et qui occasionnent une perte du corps gazeux; celui-ci est, du reste, particulièrement irritant, et on imaginé des dispositions ingénieuses pour rendre les pistons et les presse-étoupes étanches [1]. Ces machines sont les moins encombrantes de toutes, si l'on en excepte celles à acide carbonique; nous donnerons, comme nous l'avons fait pour les machines à acide sulfureux, quelques chiffres destinés à caractériser le régime de fonctionnement [2].

Température de la solution froide dans laquelle sont plongés les moules.	— 4°4
Pression absolue au condenseur, en kgs par cm²	7.00
— — de la vapeur détendue —	2.75
Température de l'ammoniaque liquéfiée dans le condenseur . . .	13
— de la vapeur détendue	— 11.5
— de l'eau à la sortie du condenseur	8 à 10°
Production de glace brute par cheval indiqué sur le piston à vapeur, l'eau versée dans les moules étant à 9° C.	33.6

Dans les machines qui nous occupent, le contrôle de l'essai peut toujours être obtenu en remarquant que le corps travailleur reçoit la chaleur que lui cède le corps à refroidir, ainsi que l'équivalent du travail de compression; il abandonne à l'eau de circulation du condenseur une

1. *Richard*, ouvrage cité.

2. Les deux rapports publiés par M. Schroeter, professeur à l'Institut technique de Munich, donnent les résultats détaillés de nombreux essais sur des machines de différents systèmes (à air, à acide sulfureux, à ammoniaque, à absorption), ces rapports renferment une foule de données précieuses et constituent le document le plus utile pour l'étude pratique des machines à froid. Le 1er rapport a été cité au n° 179, le second a été publié en 1890, il est entièrement consacré à la description de la station d'essai de Munich et au compte-rendu des machines Linde et Pictet.

quantité de chaleur que l'on évalue par des observations thermométriques et la mesure du débit. Si le corps ne recevait pas de chaleur par conductibilité sur son trajet entre le vaporisateur et le compresseur, et si, d'autre part, la vapeur comprimée ne se refroidissait pas entre le compresseur et le condenseur, la somme algébrique des quantités de chaleur énumérées devrait être nulle; dans les expériences de M. Schroeter, ces vérifications ont généralement lieu, à peu de chose près.

189. — *Appareils à affinité.* — La première idée de ces machines se trouve dans l'expérience de *Leslie*, dans laquelle on congèle de l'eau par évaporation dans le vide, en absorbant sa vapeur par l'acide sulfurique (1).

L'appareil à absorption le plus simple est celui de Carré, produit vers 1860, dans lequel on opérait avec une dissolution concentrée d'ammoniaque (2). Ce corps a continué à être employé dans les machines de l'espèce, dont le type est l'appareil Carré continu; celui-ci comprend une chaudière, A (fig. 129), renfermant une solution ammoniacale; sous

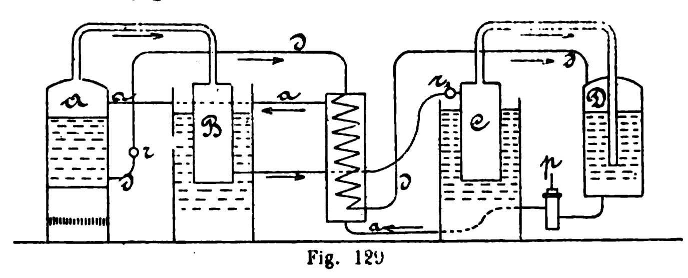


Fig. 129

l'action de la chaleur, le gaz se sépare de la solution, sous une pression qui correspond à la température, et qui doit être suffisante pour que le gaz puisse se liquéfier dans le récipient B, à la température ambiante; on a soin de refroidir ce réservoir au moyen d'un courant d'eau, et le gaz y afflue constamment.

Le liquide formé se rend dans le récipient C à faible pression, où il se vaporise à basse température, et enlève la chaleur aux corps exté-

1. Windhausen a produit, entr'autres nombreuses machines à froid, un appareil mixte fonctionnant à vapeur d'eau raréfiée; une pompe à air maintient le vide, la plus grande partie de la vapeur formée est absorbée par de l'acide sulfurique, qu'on doit concentrer de temps en temps. *Schroeter*, 1er rapport.

2. Cet appareil, connu sous le nom d'appareil domestique de Carré, vient d'être perfectionné par M. *L. Perkins*, qui l'a rendu à peu près continu. Industrie Moderne, 1889, p. 137 (appareil *Arktos*).

rieurs ; ce vase C joue le rôle du vaporisateur des machines à compression. L'opération serait terminée s'il n'était nécessaire de faire rentrer l'ammoniaque dans le cycle, ce qui se fait en utilisant l'affinité. Le gaz est absorbé dans l'eau que renferme le réservoir D, dont la solution s'enrichit constamment et se rapproche de la saturation, tandis que la solution A s'appauvrit.

Pour établir la continuité, une pompe alimentaire *p* prend, au fond du vase D, le liquide concentré, et le refoule par le tuyautage *a* dans la chaudière ; en même temps, on enlève à celle-ci, au moyen du tuyau *d*, la solution appauvrie, pour l'amener dans le vase D.

Le régime de la machine résulte du réglage des robinets r, r_1.

Le liquide pauvre emporterait, de A vers D, une certaine quantité de chaleur en pure perte, car on est obligé de refroidir le vase D, d'autant, plus que la pression est réduite, puisqu'elle est approximativement la même que dans le vaporisateur C ; d'autre part, le liquide riche, qui se rend de D vers A, devrait être échauffé ; on parvient à réaliser la double opération au moyen du serpentin échangeur de température ; ce serpentin, parcouru par le liquide pauvre dans un sens, cède en partie sa chaleur au liquide concentré qui circule en sens contraire, à l'extérieur de ses parois.

Théoriquement, les poids de liquide qui passent dans le même temps dans les circuits *a* et *d* étant égaux, les températures pourraient s'échanger, mais ce résultat idéal ne peut être atteint pratiquement ; sinon, l'alimentation de la chaudière A n'occasionnerait d'autre dépense de chaleur que celle due au travail de la pompe *p*, travail qui est très faible.

Désignons par Q_1 la chaleur enlevée au réfrigérant, par Q_2 celle qui est cédée à l'eau du condenseur B. La chaleur communiquée à la chaudière doit être $Q_2 - Q_1$, car la dissolution retourne à son état primitif sans accomplir aucun travail (nous négligeons le travail négatif de la pompe, et nous supposons que l'échangeur fonctionne d'une manière parfaite). Le rendement a pour expression :

$$\frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

Il a donc la même forme que pour les autres machines frigorifiques [1]. De plus, pour un même poids de gaz circulant par seconde

1. *Ledoux*, ouvrage cité

dans l'appareil, et pour des températures T_1 et T_2 égales à celles que nous avons désignées par les mêmes notations dans les machines à compression, la quantité $Q_2 - Q_1$ est sensiblement celle qui équivaut au travail de compression.

L'analogie entre les deux genres de machines est fort grande, l'affinité de l'eau du vase D pour le gaz remplace l'action du piston du compresseur pendant l'aspiration. La séparation du gaz sous l'action de la chaleur remplace la compression; le passage du gaz de la température T_1 à la température T_2, à laquelle il doit être élevé pour pouvoir se liquéfier par simple circulation d'eau, exige une augmentation de pression qui résulte ici d'une application de chaleur directe.

Il semblerait même que le procédé de l'absorption dût être plus économique, puisque la chaleur obtenue au moyen du travail coûte d'autant plus cher que le cycle de la machine motrice est moins parfait.

Les considérations développées dans cet aperçu sont modifiées par deux causes essentielles : d'une part, pour maintenir dans le vase D une absorption suffisamment active, on est obligé de le refroidir en lui enlevant une quantité de chaleur q [1]; la chaleur X à fournir à la chaudière est donc, par le fait, augmentée d'autant, puisque :

$$X + Q_1 = Q_2 + q$$

ou :

$$X = Q_2 - Q_1 + q$$

La dépense d'eau de refroidissement se trouve également augmentée, ce qui constitue une gêne dans la plupart des cas.

On observe, en second lieu, qu'une certaine quantité d'eau (environ 3 %), distille en même temps que l'ammoniaque; sa liquéfaction a pour effet d'augmenter Q_2 sans changer Q_1, car l'eau, à la température du réfrigérant, conserve l'état liquide; la valeur de X peut donc augmenter notablement. L'eau joue un rôle doublement nuisible en retenant encore une certaine proportion d'ammoniaque dans le condenseur.

M. Ledoux, en évaluant l'effet de certaines proportions d'eau entraînée, a trouvé des rendements que l'expérience confirme (1.200 calories négatives par kilogramme de charbon brûlé). Le chauffage de la solution ammoniacale se fait par la vapeur d'une chaudière, ou par des vapeurs d'échappement perdues.

1. La dissolution de l'ammoniaque dans l'eau met en liberté une quantité de chaleur évaluée, par kilogramme de gaz, à 517 calories sous la pression atmosphérique normale, et à la température correspondante.

TABLE I

Température en degrés centigrades t	Température absolue T	$\frac{dp}{dt}$ [1]	Température en degrés centigrades t	Température absolue T	$\frac{dp}{dt}$ [1]
0	273	0 3289	100	373	27.189
5	278	0.4503	105	378	31.454
10	283	0.6088	110	383	36.212
15	288	0 8132	115	388	41.499
20	293	1.0738	120	393	47.348
25	298	1.4022	125	398	53.795
30	303	1.8117	130	403	60.873
35	308	2.3171	135	408	61.617
40	313	2.9347	140	413	77.060
45	318	3.6825	145	418	86.234
50	323	4.5800	150	423	96.171
55	328	5.6484	155	428	106.901
60	333	6.9100	160	433	118.455
65	338	8.3891	165	438	130.858
70	343	10.111	170	443	144.138
75	348	12.104	175	448	158.319
80	353	14.395	180	453	173.423
85	358	17.017	185	458	189.470
90	363	20.002	190	463	206.478
95	368	23.388	195	468	224.462
100	373	27.189	200	473	243.438

1. Valeurs calculées par M. Zeuner; p est exprimé en millimètres de mercure.

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
0°	0,0063	0,00	0,000	606,50	575,41	0,005
1	0,0067	1,00	0,004	605,81	574,64	0,005
2	0,0072	2,00	0,007	605,11	573,86	0,005
3	0,0077	3,00	0,011	604,42	573,09	0,006
4	0,0083	4,00	0,015	603,72	572,31	0,006
5	0,0089	5,00	0,018	603,02	571,53	0,007
6	0,0095	6,00	0,022	602,33	570,75	0,007
7	0,0102	7,00	0,025	601,63	569,98	0,008
8	0,0109	8,00	0,029	600,94	569,20	0,008
9	0,0117	9,00	0,032	600,24	568,42	0,009
10	0,0125	10,00	0,036	599,55	567,64	0,009
11	0,0133	11,00	0,040	598,85	566,86	0,010
12	0,0142	12,00	0,043	598,16	566,08	0,010
13	0,0152	13,00	0,047	597,46	565,30	0,011
14	0,0162	14,01	0,050	596,77	564,52	0,012
15	0,0173	15,01	0,054	596,07	563,73	0,013
16	0,0184	16,01	0,057	595,37	562,95	0,013
17	0,0196	17,01	0,060	594,68	562,17	0,014
18	0,0209	18,01	0,064	593,98	561,39	0,015
19	0,0222	19,01	0,067	593,29	560,60	0,016
20	0,0236	20,01	0,071	592,59	559,82	0,017
21	0,0251	21,01	0,074	591,89	559,03	0,018
22	0,0267	22,01	0,078	591,20	558,25	0,019
23	0,0284	23,01	0,081	590,50	557,46	0,020
24	0,0302	24,02	0,084	589,80	556,68	0,021
25	0,0320	25,02	0,088	589,11	555,89	0,023
26	0,0340	26,02	0,091	588,41	555,10	0,024
27	0,0360	27,02	0,094	587,72	554,32	0,025
28	0,0382	28,02	0,098	587,02	553,53	0,027
29	0,0405	29,02	0,101	586,32	552,74	0,028
30	0,0429	30,03	0,104	585,62	551,95	0,030
31	0,0454	31,03	0,108	584,93	551,16	0,032
32	0,0481	32,03	0,111	584,23	550,37	0,033
33	0,0509	33,03	0,114	583,53	549,58	0,035
34	0,0538	34,04	0,118	582,84	548,79	0,037
35	0,0569	35,04	0,121	582,14	548,00	0,039
36	0,0601	36,04	0,124	581,44	547,21	0,041
37	0,0635	37,04	0,127	580,74	546,82	0,044
38	0,0670	38,05	0,131	580,05	545,63	0,046
39	0,0708	39,05	0,134	579,35	544,84	0,048
40	0,0747	40,05	0,137	578,65	544,04	0,051
41	0,0787	41,05	0,140	577,95	543,25	0,054
42	0,0830	42,06	0,143	577,25	542,46	0,056
43	0,0875	43,06	0,147	576,55	541,67	0,059
44	0,0922	44,06	0,150	575,86	540,87	0,062

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
45°	0,0971	45,07	0,153	575,16	540,08	0,065
46	0,1022	46,07	0,156	574,46	539,28	0,069
47	0,1075	47,08	0,159	573,76	538,49	0,072
48	0,1131	48,08	0,162	573,06	537,69	0,075
49	0,1190	49,08	0,165	572,36	536,90	0,079
50	0,1251	50,09	0,169	571,66	536,10	0,083
50,5	0,1282	50,59	0,170	571,31	536,71	0,085
51	0,1314	51,09	0,172	570,96	535,31	0,087
51,5	0,1347	51,59	0,173	570,61	534,91	0,089
52	0,1381	52,10	0,175	570,26	534,51	0,091
52,5	0,1415	52,60	0,176	569,91	534,11	0,093
53	0,1450	53,10	0,178	569,56	533,72	0,095
53,5	0,1486	53,60	0,179	569,21	533,32	0,098
54	0,1522	54,11	0,181	568,86	532,92	0,100
54,5	0,1559	54,61	0,182	568,52	532,52	0,102
55	0,1597	55,11	0,184	568,17	532,12	0,105
55,5	0,1636	55,61	0,186	567,82	531,72	0,107
56	0,1676	56,12	0,187	567,47	531,33	0,109
56,5	0,1716	56,62	0,189	567,12	530,93	0,112
57	0,1757	57,12	0,190	566,76	530,53	0,114
57,5	0,1800	57,62	0,192	566,41	530,13	0,117
58	0,1842	58,13	0,193	566,06	529,73	0,120
58,5	0,1886	58,63	0,195	565,71	529,33	0,122
59	0,1931	59,13	0,196	565,36	528,93	0,125
59,5	0,1977	59,63	0,198	565,01	528,53	0,128
60	0,2023	60,14	0,199	564,66	528,14	0,131
60,5	0,2071	60,64	0,201	564,31	527,74	0,134
61	0,2119	61,14	0,202	563,96	527,34	0,136
61,5	0,2168	61,65	0,204	563,61	526,94	0,139
62	0,2219	62,15	0,205	563,26	526,54	0,143
62,5	0,2270	62,65	0,207	562,91	526,14	0,146
63	0,2322	63,15	0,208	562,56	525,74	0,149
63,5	0,2376	63,66	0,210	562,21	525,34	0,152
64	0,2430	64,16	0,211	561,86	524,94	0,155
64,5	0,2485	64,66	0,213	561,51	524,55	0,159
65	0,2542	65,17	0,214	561,16	524,15	0,162
65,5	0,2599	65,67	0,216	560,81	523,75	0,165
66	0,2658	66,17	0,217	560,46	523,35	0,169
66,5	0,2718	66,68	0,219	560,11	522,95	0,173
67	0,2779	67,18	0,220	559,76	522,55	0,176
67,5	0,2841	67,68	0,222	559,40	522,15	0,180
68	0,2904	68,19	0,223	559,05	521,75	0,184
68,5	0,2969	68,69	0,225	558,70	521,35	0,187
69	0,3034	69,19	0,226	558,35	520,95	0,191
69,5	0,3101	69,70	0,228	558,00	520,55	0,195

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
70°	0,3169	70,20	0,229	557,65	520,16	0,199
70,5	0,3239	70,71	0,230	557,30	519,76	0,203
71	0,3309	71,21	0,232	556,95	519,36	0,208
71,5	0,3381	71,71	0,233	556,60	518,96	0,212
72	0,3455	72,22	0,235	556,24	518,56	0,216
72,5	0,3529	72,72	0,236	555,89	518,16	0,221
73	0,3605	73,22	0,238	555,54	517,76	0,225
73,5	0,3682	73,73	0,239	555,19	517,36	0,230
74	0,3761	74,23	0,241	554,84	516,96	0,234
74,5	0,3841	74,74	0,242	554,49	516,56	0,239
75	0,3923	75,24	0,244	554,14	516,16	0,244
75,5	0,4006	75,74	0,245	553,78	515,77	0,248
76	0,4090	76,25	0,246	553,43	515,37	0,253
76,5	0,4176	76,75	0,248	553,08	514,97	0,258
77	0,4264	77,26	0,249	552,73	514,57	0,264
77,5	0,4353	77,76	0,251	552,38	514,17	0,269
78	0,4443	78,26	0,252	552,03	513,77	0,274
78,5	0,4536	78,77	0,254	551,67	513,37	0,279
79	0,4629	79,27	0,255	551,32	512,97	0,285
79,5	0,4725	79,78	0,257	550,97	512,58	0,290
80	0,4822	80,28	0,258	550,62	512,18	0,296
80,5	0,4921	80,79	0,259	550,27	511,78	0,301
81	0,5021	81,29	0,261	549,91	511,38	0,307
81,5	0,5123	81,80	0,262	549,56	510,98	0,313
82	0,5227	82,30	0,264	549,21	510,58	0,319
82,5	0,5332	82,81	0,265	548,86	510,19	0,325
83	0,5440	83,31	0,267	548,51	509,79	0,331
83,5	0,5549	83,81	0,268	548,15	509,39	0,338
84	0,5660	84,32	0,269	547,80	508,99	0,344
84,5	0,5773	84,82	0,271	547,45	508,59	0,350
85	0,5888	85,33	0,272	547,10	508,19	0,357
85,5	0,6004	85,83	0,274	546,74	507,80	0,364
86	0,6123	86,34	0,275	546,39	507,40	0,370
86,5	0,6243	86,84	0,276	546,04	507,00	0,377
87	0,6366	87,35	0,278	545,69	506,60	0,384
87,5	0,6490	87,85	0,279	545,33	506,21	0,391
88	0,6617	88,36	0,281	544,98	505,81	0,398
88,5	0,6746	88,87	0,282	544,63	505,41	0,406
89	0,6876	89,37	0,283	544,27	505,02	0,413
89,5	0,7009	89,88	0,285	543,92	504,62	0,420
90	0,7144	90,38	0,286	543,57	504,22	0,428
90,5	0,7281	90,89	0,288	543,22	503,82	0,436
91	0,7420	91,39	0,289	542,86	503,43	0,444
91,5	0,7562	91,90	0,290	542,51	503,03	0,452
92	0,7705	92,40	0,292	542,16	502,63	0,460

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_o^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
°	kg.					kg.
92,5	0,7851	92,91	0,293	541,80	502,24	0,463
93	0,8000	93,41	0,295	541,45	501,84	0,476
93,5	0,8150	93,92	0,296	541,10	501,45	0,485
94	0,8303	94,43	0,297	540,74	501,05	0,493
94,5	0,8459	94,93	0,299	540,39	500,66	0,502
95	0,8617	95,44	0,300	540,04	500,26	0,511
95,5	0,8777	95,94	0,301	539,68	499,86	0,520
96	0,8939	96,45	0,303	539,33	499,47	0,529
96,5	0,9105	96,95	0,304	538,98	499,07	0,538
97	0,9272	97,46	0,306	538,62	498,68	0,547
97,5	0,9443	97,97	0,307	538,27	498,28	0,557
98	0,9616	98,47	0,308	537,92	497,89	0,566
98,5	0,9791	98,98	0,310	537,56	497,50	0,576
99	0,9969	99,49	0,311	537,21	497,10	0,586
99,5	1,0150	99,99	0,312	536,85	496,71	0,596
100	1 atm. 1,0334	100,50	0,314	536,50	496,31	0,606
100,2	1,0408	100,70	0,314	536,36	496,14	0,610
100,4	1,0483	100,91	0,315	536,22	495,97	0,614
100,6	1,0558	101,11	0,315	536,08	495,80	0,618
100,8	1,0626	101,31	0,316	535,93	495,64	0,622
101	1,0709	101,51	0,316	535,79	495,49	0,626
101,2	1,0786	101,72	0,317	535,65	495,33	0,630
101,4	1,0862	101,92	0,318	535,51	495.17	0,635
101,6	1,0940	102,12	0,318	535,37	495,01	0,639
101,8	1.1017	102,32	0,319	535,22	494,85	0,643
102	1,1096	102,53	0,319	535,08	494,69	0,647
102,2	1,1174	102,73	0,320	534,94	494,53	0,652
102,4	1,1253	102,93	0,320	534,80	494,37	0,656
102,6	1,1333	103,14	0,321	534,66	494,21	0,661
102,8	1,1413	103,34	0,321	534,52	494,06	0,665
103	1,1494	103,54	0,322	534,38	493,90	0,669
103,2	1,1575	103,74	0,322	534,23	493,74	0,674
103,4	1,1656	103,95	0,323	534.09	493,58	0,678
103,6	1,1738	104,15	0,323	533,95	493,42	0,683
103,8	1,1820	104,35	0,324	533,81	493,26	0,687
104	1,1903	104,55	0,325	533,67	493,10	0,692
104,2	1,1987	104.76	0,325	533,52	492,95	0,696
104,4	1,2070	104,96	0,326	533,38	492,79	0,701
104,6	1,2155	105,16	0,326	533,24	492,63	0,705
104,8	1,2239	105,37	0,327	533,10	492,47	0,710
105	1,2325	105,57	0,327	532,96	492,31	0,715
105,2	1,2411	105,77	0,328	532.82	492,15	0,719
105,4	1,2497	105,97	0,328	532,67	491,99	0,724
105,6	1,2584	106,18	0,329	532,53	491,84	0,729
105,8	1,2671	106,38	0,329	532,39	491,68	0,734

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg					kg.
106°	1,2759	106,58	0,330	532,25	491,52	0,738
106,2	1,2847	106,79	0,330	532,11	491,36	0,743
106,4	1,2936	106,99	0,331	531,96	491,20	0,748
106,6	1,3025	107,19	0,331	531,82	491,04	0,753
106,8	1,3115	107,39	0,332	531,68	490,88	0,758
107	1,3205	107,60	0,333	531,54	490,72	0,762
107,2	1,3296	107,80	0,333	531,40	490,57	0,767
107,4	1,3387	108,00	0,334	531,26	490,41	0,772
107,6	1,3479	108,21	0,334	531,11	490,25	0,777
107,8	1,3571	108,41	0,335	530,97	490,09	0,782
108	1,3664	108,61	0,335	530,83	489,93	0,787
108,2	1,3758	108,81	0,336	530,69	489,77	0,792
108,4	1,3852	109,02	0,336	530,55	489,61	0,797
108,6	1,3946	109,22	0,337	530,40	489,45	0,803
108,8	1,4041	109,42	0,337	530,26	489,30	0,808
109	1,4136	109,63	0,338	530,12	489,14	0,813
109,2	1,4233	109,83	0,338	529,98	488,98	0,818
109,4	1,4329	110,03	0,239	529,84	488,82	0,823
109,6	1,4426	110,24	0,339	529,69	488,66	0,828
109,8	1,4524	110,44	0,340	529,55	488,50	0,834
110	1,4623	110,64	0,341	529,41	488,34	0,839
110,2	1,4721	110,84	0,341	529,27	488,19	0,844
110,4	1,4820	111,05	0,342	529,13	488,03	0,850
110,6	1,4920	111,25	0,342	528,98	487,87	0,855
110,8	1,5020	111,45	0,343	528,84	487,71	0,861
111	1,5121	111,66	0,343	528,70	487 55	0,866
111,2	1,5223	111,86	0,344	528,56	487,39	0,871
111,4	1,5325	112,06	0,344	528,41	487,23	0,877
111,6	1,5428	112,27	0,345	528,27	487,08	0,882
111,8	1,5531	112,47	0,345	528,13	486,92	0,888
112	1,5635	112,67	0,346	527,99	486,76	0,893
112,2	1,5739	112,87	0,346	527,84	486,60	0,899
112,4	1,5844	113,08	0,347	527,70	486,44	0,905
112,6	1,5949	113,28	0,347	527,56	486,28	0,910
112,8	1,6055	113,48	0,348	527,42	486,12	0,916
113	1,6162	113,69	0,348	527,28	485,97	0,922
113,2	1,6269	113,89	0,349	527,14	485,81	0,928
113,4	1,6377	114,10	0,350	526,99	485,65	0,933
113,6	1,6485	114,30	0,350	526,85	485,49	0,939
113,8	1,6594	114,50	0,351	526,71	485,33	0,945
114	1,6704	114,70	0,351	526,57	485,17	0,951
114,2	1,6814	114,91	0,352	526,42	485,01	0,957
114,4	1,6925	115,11	0,352	526,28	484,86	0,963
114,6	1,7036	115,31	0,353	526,14	484,70	0,969
114,8	1,7148	115,52	0,353	526,00	484,54	0,975

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
115°	1,7261	115,72	0,354	525,85	484,38	0,981
115,2	1,7374	115,92	0,354	525,71	484,22	0,987
115,4	1,7488	116,13	0,355	525,57	484,06	0,993
115,6	1,7602	116,33	0,355	525,43	483,90	0,999
115,8	1,7717	116,53	0,356	525,29	483,75	1,005
116	1,7823	116,74	0,356	525,14	483,59	1,011
116,2	1,7949	116,94	0,357	525,00	483,43	1,017
116,4	1,8066	117,14	0,357	524,86	483,27	1,023
116,6	1,8183	117,35	0,358	524,72	483,11	1,030
116,8	1,8301	117,55	0,358	524,57	482,96	1,036
117	1,8420	117,75	0,359	524,43	482,80	1,042
117,2	1,8539	117,96	0,359	524,29	482,64	1,049
117,4	1,8659	118,16	0,360	524,15	482,48	1,055
117,6	1,8780	118,37	0,361	524,00	482,32	1,061
117,8	1,8901	118,57	0,361	523,86	482,16	1,068
118	1,9023	118,77	0,362	523,72	482,00	1,074
118,2	1,9145	118,98	0,362	523,58	481,85	1,081
118,4	1,9269	119,18	0,363	523,43	481,69	1,087
118,6	1,9392	119,38	0,363	523,29	481,53	1,094
118,8	1,9517	119,59	0,364	523,15	481,37	1,101
119	1,9642	119,79	0,364	523,01	481,21	1,107
119,2	1,9768	119,99	0,365	522,86	481,05	1,114
119,4	1,9894	120,20	0,365	522,72	480,89	1,120
119,6	2,0021	120,40	0,366	522,58	480,74	1,127
119,8	2,0149	120,60	0,366	522,44	480,58	1,134
120	2,0278	120,81	0,367	522,29	480,42	1,141
120,2	2,0407	121,01	0,367	522,15	480,26	1,148
120,4	2,0536	121,21	0,368	522,01	480,10	1,154
120,6	2,0667	121,42	0,368	521,87	479,94	1,161
120,8	2 atm. 2,0798	121,62	0,369	521,72	479,79	1,168
121	2,0930	121,82	0,369	521,58	479,63	1,175
121,2	2,1062	122,03	0,370	521,44	479,47	1,182
121,4	2,1195	122,23	0,370	521,30	479,31	1,189
121,6	2,1329	122,44	0,371	521,15	479,15	1,196
121,8	2,1464	122,64	0,371	521,01	478,99	1,203
122	2,1599	122,84	0,372	520,87	478,84	1,210
122,2	2,1735	123,05	0,372	520,73	478,68	1,218
122,4	2,1872	123,25	0,373	520,58	478,52	1,225
122,6	2,2009	123,45	0,373	520,44	478,36	1,232
122,8	2,2147	123,66	0,374	520,30	478,20	1,239
123	2,2286	123,86	0,375	520,15	478,04	1,247
123,2	2,2425	124,06	0,375	520,01	477,89	1,254
123,4	2,2565	124,27	0,376	519,87	477,73	1,261
123,6	2,2706	124,47	0,376	519,73	477,57	1,269
123,8	2,2848	124,68	0,377	519,58	477,41	1,276

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
124°	2,2990	124,88	0,377	519,44	477,25	1,284
124,2	2,3133	125,08	0,378	519,30	477,09	1,291
124,4	2,3277	125,29	0,378	519,16	476,94	1,299
124,6	2,3421	125,49	0,379	519,01	476,78	1,306
124,8	2,3566	125,70	0,379	518,87	476,62	1,314
125	2,3712	125,90	0,380	518,73	476,46	1,321
125,2	2,3859	126,10	0,380	518,58	476,30	1,329
125,4	2,4006	126,31	0,381	518,44	476,14	1,337
125,6	2,4154	126,51	0,381	518,30	475,99	1,344
125,8	2,4303	126,70	0,382	518,16	475,83	1,352
126	2,4453	126,92	0,382	518,01	475,67	1,360
126,2	2,4603	127,12	0,383	517,87	475,51	1,368
126,4	2,4754	127,33	0,383	517,73	475,35	1,376
126,6	2,4906	127,53	0,384	517,58	475,19	1,384
126,8	2,5059	127,73	0,384	517,44	475,04	1,392
127	2,5212	127,94	0,385	517,30	474,88	1,400
127,2	2,5367	128,14	0,385	517,15	474,72	1,408
127,4	2,5522	128,35	0,386	517,01	474,56	1,416
127,6	2,5677	128,55	0,386	516,87	474,40	1,424
127,8	2,5834	128,75	0,387	516,73	474,24	1,432
128	2,5991	128,96	0,387	516,58	474,09	1,440
128,2	2,6149	129,16	0,388	516,44	473,93	1,449
128,4	2,6308	129,37	0,388	516,30	473,77	1,457
128,6	2,6467	129,57	0,389	516,15	473,61	1,465
128,8	2,6628	129,77	0,389	516,01	473,45	1,473
129	2,6789	129,98	0,390	515,87	473,29	1,482
129,2	2,6951	130,18	0,390	515,73	473,14	1,490
129,4	2,7114	130,39	0,391	515,58	472,98	1,499
129,6	2,7277	130,59	0,391	515,44	472,82	1,507
129,8	2,7441	130,79	0,392	515,30	472,66	1,516
130	2,7607	131,00	0,392	515,15	472,50	1,524
130,2	2,7773	131,20	0,393	515,01	472,34	1,533
130,4	2,7939	131,41	0,393	514,87	472,19	1,542
130,6	2,8107	131,61	0,394	514,72	472,03	1,550
130,8	2,8275	131,81	0,394	514,58	471,87	1,559
131	2,8444	132,02	0,395	514,44	471,71	1,568
131,2	2,8614	132,22	0,395	514,29	471,55	1,576
131,4	2,8785	132,43	0,396	514,15	471,40	1,585
131,6	2,8957	132,63	0,396	514,01	471,24	1,594
131,8	2,9129	132,83	0,397	513,87	471,08	1,603
132	2,9303	133,04	0,397	513,72	470,92	1,612
132,2	2,9477	133,24	0,398	513,58	470,76	1,621
132,4	2,9652	133,45	0,398	513,44	470,60	1,630
132,6	2,9828	133,65	0,399	513,29	470,44	1,639
132,8	3,0004	133,85	0,399	513,15	470,29	1,648

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg					kg.
133°	3,0182	134,06	0,400	513,01	470,13	1,657
133,2	3,0360	134,26	0,400	512,86	469,97	1,667
133,4	3,0540	134,47	0,401	512,72	469,81	1,676
133,6	3,0720	134,67	0,401	512,58	469,65	1,685
133,8	3,0901	134,88	0,402	512,43	469,49	1,695
134	3 atm. 3,1082	135,08	0,402	512,29	469,34	1,704
134,2	3,1265	135,29	0,403	512,15	469,18	1,713
134,4	3,1449	135,49	0,403	512,00	469,02	1,723
134,6	3,1633	135,69	0,404	511,86	468,86	1,732
134,8	3,1818	135,90	0,404	511,72	468,71	1,742
135	3,2005	136,10	0,405	511,57	468,55	1,751
135,2	3,2192	136,31	0,405	511,43	468,39	1,761
135,4	3,2379	136,51	0,406	511,29	468,23	1,771
135,6	3,2568	136,72	0,406	511,14	468,07	1,780
135,8	3,2758	136,92	0,407	511,00	467,91	1,790
136	3,2949	137,12	0,407	510,85	467,76	1,800
136,2	3,3140	137,33	0,407	510,71	467,60	1,810
136,4	3,3332	137,53	0,408	510,57	467,44	1,819
136,6	3,3526	137,74	0,409	510,43	467,28	1,829
136,8	3,3720	137,94	0,409	510,28	467,12	1,839
137	3,3915	138,15	0,410	510,14	466,96	1,849
137,2	3,4111	138,35	0,410	510,00	466,81	1,859
137,4	3,4308	138,56	0,411	509,85	466,65	1,869
137,6	3,4506	138,76	0,411	509,71	466,49	1,880
137,8	3,4705	138,97	0,412	509,56	466,33	1,890
138	3,4904	139,17	0,412	509,42	466,17	1,900
138,2	3,5105	139,37	0,413	509,28	466,02	1,910
138,4	3,5306	139,58	0,413	509,13	465,86	1,920
138,6	3,5509	139,78	0,414	508,99	465,70	1,931
138,8	3,5712	139,99	0,414	508,85	465,54	1,941
139	3,5917	140,19	0,415	508,70	465,38	1,952
139,2	3,6122	140,40	0,415	508,56	465,22	1,962
139,4	3,6328	140,60	0,416	508,42	465,07	1,973
139,6	3,6535	140,81	0,416	508,27	464,91	1,983
139,8	3,6743	141,01	0,417	508,13	464,75	1,994
140	3,6953	141,21	0,417	507,99	464,59	2,004
140,2	3,7163	141,41	0,418	507,84	464,43	2,015
140,4	3,7374	141,62	0,418	507,70	464,28	2,026
140,6	3,7586	141,83	0,419	507,55	464,12	2,037
140,8	3,7798	142,03	0,419	507,41	463,96	2,048
141	3,8012	142,24	0,420	507,27	463,80	2,058
141,2	3,8227	142,44	0,420	507,12	463,64	2,069
141,4	3,8443	142,65	0,421	506,98	463,49	2,080
141,6	3,8660	142,85	0,421	506,84	463,33	2,091
141,8	3,8878	143,06	0,422	506,69	463,17	2,102

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
142°	3,9097	143,26	0,422	506,55	463,01	2,113
142,2	3,9316	143,47	0,423	506,40	462,85	2,125
142,4	3,9537	143,67	0,423	506,26	462,69	2,136
142,6	3,9759	143 88	0,424	506,12	462,54	2,147
142,8	3,9982	144,08	0,424	505,97	462,38	2,158
143	4,0205	144,29	0,425	505,83	462,22	2,170
143,2	4,0430	144,49	0,425	505,69	462,06	2,181
143,4	4,0656	144,70	0,426	505,54	461,90	2,192
143,6	4,0883	144,90	0,426	505,40	461,75	2,204
143,8	4,1111	145,11	0,427	505,25	461,59	2,216
144	4 atm. 4,1340	145,31	0,427	505,11	461,43	2,227
144,2	4,1569	145,52	0,428	504,97	461,27	2,239
144,4	4,1800	145,72	0,428	504,82	461,11	2,250
144,6	4,2032	145,93	0,429	504,68	460,96	2,262
144,8	4,2265	146,13	0,429	504,53	460,80	2,274
145	4,2499	146,34	0,430	504,39	460,64	2,286
145,2	4,2734	146,54	0,430	504,25	460,48	2,298
145,4	4,2970	146,75	0,431	504,10	460,32	2,310
145,6	4,3207	146,95	0,431	503,96	460,16	2,322
145,8	4,3446	147,16	0,432	503,81	460,01	2,334
146	4,3685	147,36	0,432	503,67	459,85	2,346
146,2	4,3925	147,57	0,433	503,53	459,69	2,358
146,4	4,4166	147,77	0,433	503,38	459,53	2,370
146,6	4,4409	147,98	0,434	503,24	459,37	2,382
146,8	4,4652	148,18	0,434	503,09	459,22	2,394
147	4,4897	148,39	0,435	502,95	459,06	2,407
147,2	4,5142	148,59	0,435	502,81	458,90	2,419
147,4	4,5389	148,79	0,436	502,66	458,74	2,431
147,6	4,5637	149,00	0,436	502,52	458,58	2,444
147,8	4,5886	149,20	0,437	502,37	458,43	2,456
148	4,6136	149,41	0,437	502,23	458,27	2,469
148,2	4,6387	149,62	0,438	502,09	458,11	2,482
148,4	4,6639	149,82	0,438	501,94	457,95	2,494
148,6	4,6892	150,03	0,439	501,80	457,79	2,507
148,8	4,7146	150,23	0,439	501,65	457,63	2,520
149	4,7402	150,44	0,440	501,51	457,48	2,533
149,2	4,7658	150,64	0,440	501,36	457,32	2,545
149,4	4,7916	150,85	0,441	501,22	457,16	2,558
149,6	4,8175	151,05	0,441	501,08	457,00	2,571
149,8	4,8434	151,26	0,441	500,93	456,84	2,584
150	4,8695	151,46	0,442	500,79	456,69	2,597
150,2	4,8957	151,67	0,442	500,64	456,53	2,611
150,4	4,9221	151,87	0,443	500,50	456,37	2,624
150,6	4,9485	152,08	0,443	500,36	456,21	2,637
150,8	4,9750	152,28	0,444	500,21	456,05	2,650

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
151°	5,0017	152,49	0,444	500,07	455,90	2,664
151,2	5,0285	152,69	0,445	499,92	455,74	2,677
151,4	5,0554	152,90	0,445	499,78	455,58	2,690
151,6	5,0824	153,11	0,446	499,63	455,42	2,704
151,8	5,1095	153,31	0,446	499,49	455,26	2,717
152	5,1367	153,52	0,447	499,34	455,11	2,731
152 2	5,1641	153,72	0,447	499,20	454,95	2,745
152,4	5 atm. 5,1916	153,93	0,448	499,06	454,79	2,758
152,6	5,2191	154,13	0,448	498.91	454,63	2,772
152,8	5,2469	154,34	0,449	498,77	454,47	2,786
153	5,2747	154,54	0,449	498,62	454,32	2,800
153,2	5,3026	154,75	0,450	498,48	454,16	2,814
153,4	5,3307	154,95	0,450	498,33	454,00	2,828
153,6	5,3588	155,16	0,451	498,19	453,84	2,842
153,8	5,3871	155,37	0,451	498,04	453,68	2,856
154	5,4155	155,57	0,452	497,90	453,52	2,870
154,2	5,4441	155,78	0,452	497,76	453,37	2,884
154,4	5,4727	155,98	0,453	497,61	453,21	2,898
154,6	5,5015	156,19	0,453	497,47	453,05	2,913
154,8	5,5304	156,39	0,454	497,32	452,89	2,927
155	5,5594	156,60	0,454	497,18	452,73	2,942
155,2	5,5885	156,80	0,455	497,03	452,58	2,956
155,4	5,6178	157,01	0,455	496,89	452,42	2,971
155,6	5,6471	157,21	0,455	496,74	452,26	2,985
155,8	5,6766	157,42	0,456	496,60	452,10	3,000
156	5,7063	157,63	0,456	496,45	451,94	3,015
156,2	5,7360	157,83	0,457	496,31	451,79	3,029
156,4	5,7659	158,04	0,457	496,17	451,63	3,044
156,6	5,7959	158,24	0,458	496,02	451,47	3,059
156,8	5,826	158,45	0,458	495,88	451,31	3,074
157	5,8562	158,65	0,459	495,73	451,15	3,089
157,2	5,8866	158,86	0,459	495,59	451,00	3,104
157,4	5,9171	159,07	0,460	495,44	450,84	3,119
157,6	5,9477	159 27	0,460	495,30	450,68	3,134
157,8	5,9784	159,48	0,461	495,15	450,52	3,149
158	6,0093	159,68	0,461	495,01	450,36	3,165
158,2	6,0403	159,89	0,462	494,86	450,21	3,180
158,4	6,0714	160,09	0,462	494,72	450,05	3,195
158,6	6,1027	160,30	0,463	494,57	449,89	3,211
158,8	6,1340	160,51	0,463	494,43	449,73	3,226
159	6,1655	160,71	0,464	494,28	449,57	3,242
159,2	6,1972	160,92	0,464	494,14	449,42	3,257
159,4	6 atm. 6,2289	161,12	0,465	493,99	449,26	3,273
159,6	6,2608	161,33	0,465	493,85	449,10	3,289
159,8	6,2928	161,54	0,466	493,70	448,94	3,305

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
160°	6,3250	161,74	0,466	493,56	448,78	3,320
160,2	6,3573	161,95	0,466	493,41	448,62	3,336
160,4	6,3897	162,15	0,467	493,27	448,47	3,352
160,6	6,4222	162,36	0,467	493,12	448,31	3,368
160,8	6,4549	162,56	0,468	492,98	448,15	3,384
161	6,4877	162,77	0,468	492,84	447,99	3,401
161,2	6,5206	162,98	0,469	492,69	447,83	3,417
161,4	6,5537	163,18	0,469	492,55	447,68	3,433
161,6	6,5869	163,39	0,470	492,40	447,52	3,449
161,8	6,6202	163,59	0,470	492,26	447,36	3,466
162	6,6537	163,80	0,471	492,11	447,20	3,482
162,2	6,6873	164,01	0,471	491,97	447,04	3,499
162,4	6,7210	164,21	0,472	491,82	446,89	3,515
162,6	6,7549	164,42	0,472	491,68	446,73	3,532
162,8	6,7889	164,63	0,473	491,53	446,57	3,549
163	6,8230	164,83	0,473	491,38	446,41	3,565
163,2	6,8573	165,04	0,474	491,24	446,25	3,582
163,4	6,8917	165,24	0,474	491,09	446,10	3,599
163,6	6,9263	165,45	0,475	490,95	445,94	3,616
163,8	6,9610	165,66	0,475	490,80	445,78	3,633
164	6,9958	165,86	0,475	490,66	445,62	3,650
164,2	7,0308	166,07	0,476	490,51	445,46	3,667
164,4	7,0659	166,27	0,476	490,37	445,31	3,684
164,6	7,1011	166,48	0,477	490,22	445,15	3,702
164,8	7,1365	166,69	0,477	490,08	444,99	3,719
165	7,1720	166,89	0,478	489,93	444,83	3,736
165,2	7,2076	167,10	0,478	489,79	444,67	3,754
165,4	7 atm. 7,2434	167,31	0,479	489,64	444,52	3,771
165,6	7,2794	167,51	0,479	489,50	444,36	3,789
165,8	7,3155	167,72	0,480	489,35	444,20	3,807
166	7,3517	167,92	0,480	489,21	444,04	3,824
166,2	7,3880	168,13	0,481	489,06	443,88	3,842
166,4	7,4245	168,34	0,481	488,92	443,73	3,860
166,6	7,4612	168,54	0,482	488,77	443,57	3,878
166,8	7,4980	168,75	0,482	488,63	443,41	3,896
167	7,5349	168,96	0,483	488,48	443,25	3,914
167,2	7,5720	169,16	0,483	488,34	443,09	3,932
167,4	7,6092	169,37	0,483	488,19	442,93	3,950
167,6	7,6466	169,57	0,484	488,04	442,78	3,968
167,8	7,6841	169,78	0,484	487,90	442,62	3,986
168	7,7217	169,99	0,485	487,75	442,46	4,005
168,2	7,7595	170,19	0,485	487,61	442,30	4,023
168,4	7,7975	170,40	0,486	487,46	442,14	4,042
168,6	7,8355	170,61	0,486	487,32	441,99	4,060
168,8	7,8738	170,81	0,487	487,17	441,83	4,079

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
169°	7,9122	171,02	0,487	487,03	441,67	4,097
169,2	7,9507	171,23	0,488	486,88	441,51	4,116
169,4	7,9894	171,43	0,488	486,74	441,35	4,135
169,6	8,0282	171,64	0,489	486,59	441,20	4,154
169,8	8,0672	171,85	0,489	486,44	441,04	4,173
170	8,1063	172,05	0,490	486,30	440,88	4,192
170,2	8,1456	172,26	0,490	486,15	440,72	4,211
170,4	8,1850	172,47	0,490	486,01	440,56	4,230
170,6	8,2246	172,67	0,491	485,86	440,41	4,249
170,8	8,2643	172,88	0,491	485,72	440,25	4,268
171	8 atm. 8,3042	173,08	0,492	485,57	440,09	4,288
171,2	8,3442	173,29	0,492	485,42	439,93	4,307
171,4	8,3844	173,50	0,493	485,28	439,77	4,327
171,6	8,4247	173,70	0,493	485,13	439,61	4,346
171,8	8,4652	173,91	0,494	484,99	439,46	4,366
172	8,5058	174,12	0,494	484,84	439,30	4,385
172,2	8,5466	174,32	0,495	484,70	439,14	4,405
172,4	8,5875	174,53	0,495	484,55	438,98	4,425
172,6	8,6286	174,74	0,496	484,40	438,82	4,445
172,8	8,6699	174,94	0,496	484,26	438,67	4,465
173	8,7113	175,15	0,497	484,11	438,51	4,485
173,2	8,7528	175,36	0,497	483,97	438,35	4,505
173,4	8,7946	175,56	0,497	483,82	438,19	4,525
173,6	8,8364	175,77	0,498	483,68	438,03	4,545
173,8	8,8785	175,98	0,498	483,53	437,88	4,566
174	8,9206	176,19	0,499	483,38	437,72	4,586
174,2	8,9630	176,39	0,499	483,24	437,56	4,606
174,4	9,0055	176,60	0,500	483,09	437,40	4,627
174,6	9,0481	176,81	0,500	482,95	437,24	4,648
174,8	9,0910	177,01	0,501	482,80	437,09	4,668
175	9,1339	177,22	0,501	482,65	436,93	4,689
175,2	9,1771	177,43	0,502	482,51	436,77	4,710
175,4	9,2204	177,63	0,502	482,36	436,61	4,731
175,6	9,2638	177,84	0,503	482,22	436,45	4,751
175,8	9 atm. 9,3074	178,05	0,503	482,07	436,29	4,772
176	9,3512	178,25	0,503	481,92	436,14	4,794
176,2	9,3951	178,46	0,504	481,78	436,98	4,815
176,4	9,4392	178,67	0,504	481,63	435,82	4,836
176,6	9,4835	178,88	0,505	481,49	435,66	4,857
176,8	9,5279	179,08	0,505	481,34	435,50	4,879
177	9,5725	179,29	0,506	481,19	435,35	4,900
177,2	9,6173	179,50	0,506	481,05	435,19	4,922
177,4	9,6622	179,70	0,507	480,90	435,03	4,943
177,6	9,7072	179,91	0,507	480,76	434,87	4,965
177,8	9,7525	180,12	0,508	480,61	434,71	4,986

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_o^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
178°	9,7978	180,33	0,508	480,46	434,56	5,008
178,2	9,8435	180,53	0,509	480,32	434,40	5,030
178,4	9,8892	180,74	0,509	480,17	434,24	5,052
178,6	9,9351	180,95	0,509	480,03	434,08	5,074
178,8	9,9812	181,15	0,510	479,88	433,92	5,096
179	10,0274	181,36	0,510	479,73	433,77	5,118
179,2	10,0738	181,57	0,511	479,59	433,61	5,141
179,4	10,1204	181,78	0,511	479,44	433,45	5,163
179,6	10,1671	181,98	0,512	479,29	433,29	5,185
179,8	10,2140	182,19	0,512	479,15	433,13	5,208
180	10,2611	182,40	0,513	479,00	432,97	5,230
180,2	10,3084	182,60	0,513	478,86	432,82	5,253
180,4	10 atm. 10,3558	182,81	0,514	478,71	432,66	5,276
180,6	10,4034	183,02	0,514	478,56	432,50	5,299
180,8	10,4511	183,23	0,514	478,42	432,34	5,321
181	10,4990	183,43	0,515	478,27	432,18	5,344
181,2	10,5471	183,64	0,515	478,13	432,03	5,367
181,4	10,5954	183,85	0,516	477,98	431,87	5,390
181,6	10,6439	184,06	0,516	477,83	431,71	5,413
181,8	10,6925	184,26	0,517	477,68	431,55	5,437
182	10,7413	184,47	0,517	477,54	431,39	5,460
182,2	10,7902	184,68	0,518	477,39	431,24	5,483
182,4	10,8394	184,89	0,518	477,25	431,08	5,507
182,6	10,8887	185,09	0,519	477,10	430,92	5,530
182,8	10,9382	185,30	0,519	476,95	430,76	5,554
183	10,9878	185,51	0,519	476,81	430,60	5,577
183,2	11,0377	185,72	0,520	476,66	430,44	5,601
183,4	11,0877	185,92	0,520	476,51	430,29	5,625
183,6	11,1379	186,13	0,521	476,37	430,13	5,649
183,8	11,1882	186,34	0,521	476,22	429,97	5,673
184	11,2388	186,55	0,522	476,07	429,81	5,697
184,2	11,2894	186,75	0,522	475,93	429,65	5,721
184,4	11,3404	186,96	0,523	475,78	429,50	5,745
184,6	11 atm. 11,3915	187,17	0,523	475,63	429,34	5,770
184,8	11,4427	187,38	0,524	475,49	429,18	5,794
185	11,4942	187,58	0,524	475,34	429,02	5,818
185,2	11,5458	187,79	0,524	475,19	428,86	5,843
185,4	11,5976	188,00	0,525	475,05	428,70	5,868
185,6	11,6495	188,21	0,525	474,90	428,55	5,892
185,8	11,7017	188,41	0,526	474,75	428,39	5,917
186	11,7540	188,62	0,526	474,61	428,23	5,942
186,2	11,8066	188,83	0,527	474,46	428,07	5,967
186,4	11,8593	189,04	0,527	474,31	427,91	5,992
186,6	11,9122	189,25	0,528	474,17	427,76	6,017
186,8	11,9652	189,45	0,528	474,02	427,60	6,042

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ
	kg.					kg.
187°	12,0185	189,66	0,529	473,87	427,44	6,067
187,2	12,0719	189,87	0,529	473,73	427,28	6,093
187,4	12,1255	190,08	0,529	473,58	427,12	6,118
187,6	12,1793	190,28	0,530	473,43	426,96	6,144
187,8	12,2333	190,49	0,530	473,29	426,81	6,169
188	12,2875	190,70	0,531	473,14	426,65	6,195
188,2	12,3419	190,91	0,531	472,99	426,49	6,221
188,4	12,3964	191,12	0,532	472,85	426,33	6,246
188,6	12 atm. 12,4512	191,32	0,532	472,70	426,17	6,272
188,8	12,5061	191,53	0,533	472,55	426,02	6,298
189	12,5612	191,74	0,533	472,40	425,86	6,324
189,2	12,6165	191,95	0,534	472,26	425,70	6,350
189,4	12,6720	192,16	0,534	472,11	425,54	6,377
189,6	12,7277	192,36	0,534	471,96	425,38	6,403
189,8	12,7835	192,57	0,535	471,82	425,22	6,429
190	12,8396	192,78	0,535	471,67	425,07	6,456
190,2	12,8958	192,99	0,536	471,52	424,91	6,482
190,4	12,9523	193,20	0,536	471,38	424,75	6,509
190,6	13,0089	193,40	0,537	471,23	424,59	6,536
190,8	13,0657	193,61	0,537	471,08	424,43	6,562
191	13,1227	193,82	0,538	470,93	424,27	6,589
191,2	13,1799	194,02	0,538	470,79	424,12	6,616
191,4	13,2373	194,24	0,538	470,64	423,96	6,643
191,6	13,2949	194,44	0,539	470,49	423,80	6,670
191,8	13,3527	194,65	0,539	470,35	423,64	6,698
192	13,4107	194,86	0,540	470,20	423,48	6,725
192,2	13 atm. 13,4688	195,07	0,540	470,05	423,33	6,752
192,4	13,5272	195,28	0,541	469,90	423,17	6,780
192,6	13,5858	195,48	0,541	469,76	423,01	6,807
192,8	13,6445	195,69	0,542	469,61	422,85	6,835
193	13,7035	195,90	0,542	469,46	422,69	6,863
193,2	13,7626	196,11	0,542	469,32	422,53	6,891
193,4	13,8220	196,32	0,543	469,17	422,38	6,918
193,6	13,8815	196,53	0,543	469,02	422,22	6,946
193,8	13,9413	196,73	0,544	468,87	422,06	6,975
194	14,0012	196,94	0,544	468,73	421,90	7,003
194,2	14,0614	197,15	0,545	468,58	421,74	7,031
194,4	14,1217	197,36	0,545	468,43	421,58	7,059
194,6	14,1822	197,57	0,546	468,28	421,43	7,088
194,8	14,2430	197,78	0,546	468,14	421,27	7,116
195	14,3039	197,98	0,546	467,99	421,11	7,145
195,2	14,3651	198,19	0,547	467,84	420,95	7,173
195,4	14,4264	198,40	0,547	467,69	420,79	7,202
195,6	14 atm. 14,4880	198,61	0,548	467,55	420,63	7,231
195,8	14,5497	198,82	0,548	467,40	420,48	7,260

t	$\frac{p}{10000}$	q	$\int_0^t \frac{dq}{273+t}$	r	ρ	γ (1)
	kg.					kg.
196°	14,6117	199,03	0,549	467,25	420,32	7,289
196,2	14,6738	199,24	0,549	467,10	420,16	7,318
196,4	14,7362	199,44	0,550	466,96	420,00	7,347
196,6	14,7987	199 65	0,550	466,81	419,84	7,377
196,8	14,8615	199,86	0,550	466,66	419,69	7,406
197	14,9245	200,07	0,551	466,51	419,53	7,435
197,2	14,9876	200,28	0,551	466,37	419,37	7,465
197,4	15,0510	200,49	0,552	466,22	419,21	7,494
197,6	15,1146	200,70	0,552	466,07	419,05	7,524
197,8	15,1784	200,90	0,553	465,92	418,89	7,554
198	15,2424	201,11	0,553	465,78	418,74	7,584
198,2	15,3066	201,32	0,554	465,63	418,58	7,614
198,4	15,3710	201,53	0,554	465,48	418,42	7,644
198,6	15,4357	201,74	0,554	465,33	418,26	7,674
198,8	15 atm. 15,5005	201,95	0,555	465,19	418,10	7,704
199	15,5655	202,16	0,555	465,04	417,94	7,735
199,2	15,6308	202,36	0,556	464,89	417,78	7,765
199,4	15,6963	202,57	0,556	464,74	417,63	7,796
199,6	15,7619	202,78	0,557	464,60	417,47	7,826
199,8	15,8278	202,99	0,557	464,45	417,31	7,857
200	15,8939	203,20	0,558	464,30	417,15	7,888

(1) Dans ces tables, γ représente en kg. le poids de 1 mc. de vapeur.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Thermodynamique générale

§ I

Loi caractéristique existant pour chaque corps.

§ II

Premier principe, ou principe de Mayer.

§ III

Étude des gaz permanents.

§ IV

Principe de Carnot.

§ V

Diagramme de l'entropie et de la température. Cycles de rendement maximum.

§ VI

Transformations non réversibles.

§ VII

Vapeurs saturées

§ VIII

Vapeurs surchauffées

CHAPITRE II

Écoulement des fluides.

§ I

Écoulement des gaz permanents

§ II

Ecoulement des vapeurs.

§ III

Appareils à jet.

CHAPITRE III

Machines à air chaud.

§ I

Machines à cycle fermé.

§ II

Machines à cycle ouvert.

CHAPITRE IV

Machines à gaz ou à mélanges détonants.

§ I

Combustion et explosion.

§ II

Cycles théoriques des machines à gaz.

§ III

Étude organique des moteurs à gaz.

§ IV

Modes d'allumage et de réglage.

§ V.

Moteurs alimentés aux gaz pauvres et moteurs à pétrole.

CHAPITRE V

Machines à vapeur.

§ I

Cycles des machines à vapeur d'eau.

§ II

Étranglements et autres pertes analogues.

§ III

Condensation.

§ IV

Machines à cycles spéciaux.

§ V

Action des parois.

§ VI

Mouvement de la chaleur dans la paroi.

§ VII

Utilisation de la chaleur produite dans le foyer.

CHAPITRE VI

Machines pour la production industrielle du froid.

§ I

Machines à air.

§ II

Machines à vapeur liquéfiable.

TABLES DES PROPRIÉTÉS DE LA VAPEUR D'EAU

